Universität Tübingen
Fachbereich Mathematik

PD Dr. R. Jakob 17.04.14

Gewöhnliche Differentialgleichungen
SS 2014
2.Übung

AUFGABE 4:

1) Geben Sie die explizite Lösung des AWP's

$$y'(t) = 5y(t) + t, \qquad y(0) = y_0 \in \mathbb{R}$$

an und klären Sie, für welchen speziellen Anfangswert $y_0^* < 0$ sich die (eindeutige) Lösung y^* des entsprechenden AWP's qualitativ von den Lösungen der AWP's mit $y_0 \neq y_0^*$ unterscheidet.

2) Geben Sie die explizite Lösung des AWP's

$$y'(t) = \frac{\alpha}{t}\, y(t), \qquad y(1) = y_1 \geq 0$$

für ein beliebiges, festes $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ auf dem Zeitintervall $[1, \infty)$ an und diskutieren Sie, wie sich die (eindeutige) Lösung für $\alpha > 0$ bzw. für $\alpha < 0$ bei $y_1 > 0$ und speziell für $y_1 = 0$ verhält.

3) Geben Sie die explizite Lösung des AWP's

$$y'(t) = 2t\, y^2(t), \qquad y(0) = y_0 \geq 0$$

an und überlegen Sie sich, auf welchem Intervall um die 0 die (eindeutige) Lösung y überhaupt nur existieren kann, falls $y_0 > 0$ ist. Wie lautet die Lösung bei $y_0 = 0$?

4) Geben Sie die explizite Lösung des AWP's

$$y'(t) = y(t) + t\, y^5(t), \qquad y(0) = y_0 \geq 0$$

an und entscheiden Sie, ob die (eindeutige) Lösung $y(t)$ im Fall $y_0 > 0$ auf ganz $[0, \infty)$ existieren kann oder ob sie bereits zu einem endlichen Zeitpunkt „explodiert". Wie lautet die Lösung im Fall $y_0 = \sqrt[4]{4}$, und wie lange existiert sie, bis sie „uns verlässt" ? Und wie lautet die Lösung für $y_0 = 0$?

AUFGABE 5:

Es sei $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ stetig, und $y : (-\epsilon, \epsilon) \longrightarrow \mathbb{R}^n$ sei stetig auf $(-\epsilon, \epsilon)$, differenzierbar auf $(-\epsilon, \epsilon) \setminus \{0\}$ und zudem eine Lösung von

$$y' = f(\,\cdot\,, y) \qquad \text{auf } (-\epsilon, \epsilon) \setminus \{0\}.$$

Zeigen Sie, dass y auf ganz $(-\epsilon, \epsilon)$ stetig differenzierbar ist und $y' = f(\,\cdot\,, y)$ auf ganz $(-\epsilon, \epsilon)$, also insbesondere $y'(0) = f(0, y(0))$, erfüllt.
Hinweis: Beachten Sie, dass hier nach dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung zu jedem $h \in (0, \epsilon)$ ein $\xi_h \in (0, h)$ mit $\frac{y(h)-y(0)}{h} = y'(\xi_h)$ bzw. ein $\tilde{\xi}_h \in (-h, 0)$ mit $\frac{y(-h)-y(0)}{-h} = y'(\tilde{\xi}_h)$ existiert, und prüfen Sie, wie überhaupt die Ableitung einer Funktion in einem Punkt aus $\mathbb{R}$ (hier offenbar die Ableitung von y in 0) in der Analyis I-Vorlesung definiert wurde ! Was muss existieren, usw...?

Abgabetermin ist Donnerstag, 24.04.2014. Gesegnete Ostern !