Universität Tübingen
Fachbereich Mathematik

PD Dr. R. Jakob 24.04.14

Gewöhnliche Differentialgleichungen
SS 2014
3.Übung

AUFGABE 6: Sei Q das kartesische Produkt $(0,a]\times B_b^n(y_0) \subset \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$, und sei $f : \bar{Q} \to \mathbb{R}^n$ eine auf dessen Abschluss $\bar{Q}$ stetige Funktion mit der zusätzlichen Eigenschaft:

$$| f(t,y_1) - f(t,y_2) | \leq \frac{1}{t} | y_1 - y_2 | \tag{1}$$

für alle Paare $(t,y_1),(t,y_2) \in Q$. Man beweise, dass es ein $\epsilon > 0$ gibt, sodass das AWP $u'(t) = f(t,u(t))$, $u(0) = y_0$ höchstens eine Lösung auf $[0,\epsilon]$ besitzt. Darf man hier eines unserer beiden Gronwall-Lemmata anwenden, oder muss man sich etwas Besonderes einfallen lassen ?

Hinweis: Nehmen Sie die Existenz zweier Lösungen u_1, u_2 auf einem Intervall $[0,\epsilon] \subset [0,a]$ an und bilden Sie die Funktion $w(s) := \frac{|u_1(s)-u_2(s)|}{s}$. Versuchen Sie zunächst die Stetigkeit von w in $s = 0$ zu beweisen, insbesondere den Wert von $w(0)$ zu ermitteln, und anschliessend mittels des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung und mittels der Voraussetzung (1) an f die Ungleichung

$$w(t) \leq \frac{1}{t} \int_0^t w(s)\, ds$$

für alle $t \in [0,\epsilon]$ zu beweisen.

AUFGABE 7: Wir spezialisieren nun die Situation von Aufgabe 6 zu $n = 1$, $y_0 = 0$ und $Q := (0,10^3] \times (-10^3,10^3)$, d.h. man solle sich Q als einen „grossen Quader" vorstellen, der sich rechts an die (senkrecht auf der horizontalen t-Achse stehenden) $y-$Achse „anschmiegt". Auf Q betrachte man nun zu einem beliebig fixierten $\delta \geq 0$ die Funktion $f_\delta(t,y)$ mit dem Wert 0, falls $y \leq 0$ (und $t \in [0,10^3]$ beliebig) ist, mit $f_\delta(t,y) := (1+\delta)\frac{y}{t}$, falls $0 < y < t^{1+\delta}$, und mit $f_\delta(t,y) := (1+\delta)t^\delta$ (also unabhängig von y), falls $0 \leq t^{1+\delta} \leq y$ gilt.

1) Man überprüfe zunächst, ob es im Fall $\delta = 0$ ausser der trivialen Lösung $y \equiv 0$ eine weitere, sehr simple Lösung des AWP's $u' = f_0(\,\cdot\,,u)$, $u(0) = 0$, auf ganz $[0,10^3]$ gibt. Dies widerspricht doch dem Resultat von Aufgabe 6 ! Man vergewissere sich daher, ob f_0 tatsächlich alle Bedingungen aus Aufgabe 6 erfüllt, insbesondere die Bedingung (1) aus Aufgabe 6 und die Stetigkeit von f auf ganz $\bar{Q}$!

2) Nun überprüfe man, ob es im Fall $\delta > 0$ ausser der trivialen Lösung $y \equiv 0$ eine weitere, ebenfalls leicht zu erratende Lösung des AWP's $u' = f_\delta(\,\cdot\,,u)$, $u(0) = 0$,

auf ganz $[0, 10^3]$ gibt. Dies widerspräche erneut dem Resultat von Aufgabe 6 ! Man vergewissere sich daher erneut, ob f_δ, für $\delta > 0$, tatsächlich sowohl die Bedingung (1) aus Aufgabe 6 erfüllt als auch stetig auf $\bar{Q}$ ist !

Abgabetermin ist Donnerstag, 08.05.2014. !