Universität Tübingen
Fachbereich Mathematik

PD Dr. R. Jakob 08.05.14

Gewöhnliche Differentialgleichungen
SS 2014
4.Übung

AUFGABE 8: Wir betrachten das Vektorfeld $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, welches explizit durch $F(x_1, x_2, x_3) := (x_2\, x_3, -x_1\, x_3, 2)$ gegeben sei und dazu das AWP

$$Y' = F(Y), \qquad Y(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

1) Zunächst kläre man, ob F auf ganz $\mathbb{R}^3$ oder zumindest auf allen Bällen $B_R(Y(0))$ um $Y(0)$ Lipschitz-stetig ist bzw. lineares Wachstum hat. Kann man hier mittels des Satzes von Picard-Lindelöf, Satz 2.0.5, die Existenz einer eindeutigen Lösung Y^* auf einem kurzen Intervall $[-\epsilon, \epsilon]$ garantieren ? Kann man hier sogar mit Satz 2.0.7 schliessen, dass diese Lösung Y^* zu einer maximalen Lösung fortgesetzt werden kann, die auf ganz $\mathbb{R}$ existiert ?

2) Nun betrachte man die Abbildung Φ aus dem Beweis des Satzes von Picard-Lindelöf, die hier also explizit durch

$$\Phi(Y)(t) := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \int_0^t \begin{pmatrix} Y_2\, Y_3 \\ -Y_1\, Y_3 \\ 2 \end{pmatrix} (s)\, ds$$

gegeben ist, und berechne zu dieser zunächst explizit die ersten 6 Glieder der Folge der Iterationen $Y_1 := \Phi(Y_0)$, $Y_2 := \Phi(Y_1), \ldots, Y_n := \Phi(Y_{n-1}), \ldots$, die in der konstanten Startfunktion $Y_0 \equiv (0, 1, 0)$ startet. Hieraus leite man eine schlaue Vermutung für eine allgemeine Formel für Y_{2+2n} her und verifiziere deren Korrektheit per ,,vollständger Induktion" (also wie üblich durch einen einfachen Check für $n = 0$ oder $n = 1$ und dann mittels eines anstrengenden Induktionsschritts von n auf $n+1$). Konvergieren nun Y_{2+2n} auf einem kurzen Intervall $[-\epsilon, \epsilon]$ oder sogar auf jedem kompakten Intervall $[-R, R]$ gleichmässig gegen eine Grenzfunktion Y^* ? Wie lautet diese exakt und welche Kurve beschreibt diese Funktion im $\mathbb{R}^3$ qualitativ ? Fertigen Sie am besten eine kleine Skizze an, um sich den ästhetischen Kurvenverlauf um $t = 0$ zu veranschaulichen ! Ist dieses Y^* (um $t = 0$) nur stetig oder sogar aus einer noch viel höheren Differenzierbarkeitsklasse: C^1, C^2, C^∞ ? Und ist Y^* eine Lösung des AWP's (1) ? Nur auf einem kurzen Intervall $[-\epsilon, \epsilon]$ oder sogar auf ganz $\mathbb{R}$?

3) Nun berechne man ausser dem Geschwindigkeitsvektor $\dot{Y}^*$, noch die Geschwindigkeit $| \dot{Y}^* |$, den Beschleunigungsvektor $\ddot{Y}^*$ und die Krümmungs-Funktion

$$\kappa(Y^*) := \frac{| \dot{Y}^* \times \ddot{Y}^* |}{| \dot{Y}^* |^3}$$

von Y^*.

AUFGABE 9: Zu einem stetigen Vektorfeld $F : \Omega \to \mathbb{R}^n$, $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ offen, welches

$$| F(t, y_1) - F(t, y_2) | \leq L \mid y_1 - y_2 |$$

für beliebige Paare $(t, y_1), (t, y_2) \in \Omega$ mit einer Konstanten $L \in [0, \infty)$ erfülle, betrachten wir das AWP

$$y'(t) = F(t, y(t)), \qquad y(t_0) = y_0,$$

mit $(t_0, y(t_0)) \in \Omega$. Nun seien $X : [t_0, t_0 + a] \to \mathbb{R}^n$ die eindeutige (Kurzzeit-) Lösung dieses AWP's, für ein $a > 0$, und Y nur eine ,,Näherungslösung" auf $[t_0, t_0 + a]$, das heisst Y sei aus $C^1([t_0, t_0 + a], \mathbb{R}^n)$ und erfülle $| Y(t_0) - y_0 | < \epsilon_0$ und $| Y'(t) - F(t, Y(t)) | < \epsilon$ für alle $t \in [t_0, t_0 + a]$. Man beweise nun:

$$| X - Y | (t) \leq (\epsilon_0 + a\,\epsilon)\, e^{L(t-t_0)} \qquad \forall\, t \in [t_0, t_0 + a],$$

also dass sich insbesondere die Näherungslösung Y von der Lösung X nicht ,,blitzschnell" entfernen kann.
Hinweis: Versuchen Sie Theorem 2.0.3 auf den Betrag z der Differenzfunktion $Z := X - Y$ anzuwenden. Der Hauptsatz der Diff.- und Int.-Rechnung liefert hier mal wieder einen optimalen Ansatz !

Abgabetermin ist Donnerstag, 15.05.2014. !