Universität Tübingen
Fachbereich Mathematik

PD Dr. R. Jakob 15.05.14

Gewöhnliche Differentialgleichungen
SS 2014
5.Übung

AUFGABE 10: Es sei $\Theta : [a,b] \to \mathrm{Mat}_{n,n}(\mathbb{R})$ eine Matrizen-wertige Funktion, deren Spalten aus n differenzierbaren Funktionen $\zeta_i : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ bestehen. Beweisen Sie die Ableitungsformel

$$D'(t) = \frac{d}{dt}\det(\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n)(t) = \sum_{i=1}^{n} \det(\zeta_1(t), \ldots, \zeta_i'(t), \ldots, \zeta_n(t))$$

für die Verkettung D der Determinante mit der Matrix-Funktion Θ. Schliessen Sie aus dieser, dass D stetig differenzierbar auf $[a,b]$ ist, falls Θ bzw. jede ihrer Spaltenfunktionen ζ_i als stetig differenzierbar auf $[a,b]$ vorausgesetzt wird.
Hinweis: Betrachten Sie hierfür den Differenzenquotienten $\triangle_h(D)(t)$ von $t \mapsto D(t) = \det(\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n)(t)$, verwenden Sie die Definition der Differenzierbarkeit jeder Funktion ζ_i in t und die Linearität der Determinante in jeder ihrer Spalten, und versuchen Sie bei Ausmultiplikation der komplizierten Determinante $\det(\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n)(t+h)$ diejenigen Terme zu isolieren, die sich nicht wie „$o(h)$" verhalten ! Welche Terme sind für die Existenz bzw. für den exakten Wert des Grenzwertes $\lim_{h\to 0} \triangle_h(D)(t)$ überhaupt relevant ?

AUFGABE 11:

1) Geben Sie die allgemeine Lösung y der homogenen linearen Differentialgleichung

$$y^{(5)} - 9\,y^{(4)} + 31\,y^{(3)} - 63\,y^{(2)} + 108\,y' = 108\,y$$

5−ter Ordnung an. Verwenden Sie hierfür die Informationen, dass eine Nullstelle des zu dieser korrespondierenden Polynoms $P(\lambda) := \lambda^5 - 9\,\lambda^4 + 31\,\lambda^3 - 63\,\lambda^2 + 108\lambda - 108$ $\mu = 2i$ lautet und dass P nur eine reelle Nullstelle (eventuell von Ordnung > 1) hat. Polynomdivision kann nicht schaden !

2) Geben Sie die allgemeine Lösung y der homogenen linearen Differentialgleichung

$$y^{(4)} - 12\,y^{(3)} + 51\,y^{(2)} - 90\,y' = -50\,y$$

4−ter Ordnung an. Verwenden Sie hierfür die Information, dass eine Nullstelle des zu dieser korrespondierenden Polynoms $P(\lambda) := \lambda^4 - 12\,\lambda^3 + 51\,\lambda^2 - 90\,\lambda + 50$ $\mu = 3 + i$ lautet. Polynomdivision kann auch hier nicht schaden !

AUFGABE 12: Wir betrachten das lineare AWP erster Ordnung

$$X'(t) = A(t) \cdot X(t), \qquad X(1) = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

mit der $(2 \times 2)-$Matrix $A(t) := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{t^2} & \frac{1}{t} \end{pmatrix}$ für C^1-Funktionen $X : [1, \infty) \to \mathbb{R}^2$.

1) Zunächst prüfe man, ob die theoretischen Erkenntnisse aus Kapitel 3 der Vorlesung sowohl die Existenz als auch die Eindeutigkeit einer globalen Lösung X auf $[1, \infty)$ garantieren.

2) Unabhängig vom Resultat dieser Prüfung versuche man die/eine globale Lösung X auf $[1, \infty)$ explizit zu berechnen, indem man das obige AWP auf ein AWP zweiter Ordnung für eine skalare Funktion $y : [1, \infty) \to \mathbb{R}$ mit $y(1) = 2$ umformuliert.
Hinweis: Die sich ergebende Differentialgleichung zweiter Ordnung kann leicht auf eine lineare Differentialgleichung erster Ordnung reduziert werden, die wiederum durch eine bereits ,,eintrainierte Technik" explizit gelöst werden kann.

Abgabetermin ist Donnerstag, 22.05.2014. !