Universität Tübingen
Fachbereich Mathematik

PD Dr. R. Jakob 22.05.14

Gewöhnliche Differentialgleichungen
SS 2014
6.Übung

AUFGABE 13: Skizzieren Sie die beiden Strömungsbilder im Viereck $V := [-4, 4] \times [-4, 4]$, welche jeweils durch das $(2 \times 2)-$System

$$\begin{pmatrix} \dot{X}_1 \\ \dot{X}_2 \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} \tag{1}$$

für die beiden $(2 \times 2)-$Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad A = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$$

generiert werden, d.h. skizzieren Sie die Verläufe aller Lösungskurven in V von (1) zumindest qualitativ, für diese beiden konkreten Matrizen A. Diagonalisieren Sie hierfür in beiden Fällen A, d.h. bestimmen Sie jeweils eine invertierbare Matrix B, welche $B \cdot A \cdot B^{-1} = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2)$ für die reellen Eigenwerte λ_1, λ_2 von A erfüllt und wählen Sie in beiden Fällen die vier (!) Startvektoren $B^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $B^{-1}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $B^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $B^{-1}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$, um zumindest vier Lösungskurven explizit zu berechnen und demnach recht präzise zeichnen zu können.
Hinweis: Berechnen Sie in beiden Fällen zuerst die Eigenwerte λ_1, λ_2 von A, dann zwei Eigenvektoren zu λ_1, λ_2, also eine Basis des $\mathbb{R}^2$ aus Eigenvektoren von A, und verwenden Sie, dass diese Eigenvektoren die Spalten von B^{-1} liefern, sodass gerade die Matrix-Gleichung $B \cdot A \cdot B^{-1} = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2)$ gilt !

AUFGABE 14:

1) Beweisen Sie, dass für zwei miteinander kommutierende Matrizen $A, B \in \text{Mat}_{n,n}(\mathbb{R})$, die also $A \cdot B = B \cdot A$ erfüllen, die „Funktionalgleichung"

$$\exp(A + B) = \exp(A) \cdot \exp(B)$$

gilt, indem Sie den elementaren Beweis dieser Identität für beliebige komplexe Zahlen zum Beweis dieser allgemeineren Aussage zu immitieren versuchen. Bei welchem Argument geht dann eigentlich „$A \cdot B = B \cdot A$" ein ?

2) Nehmen Sie nun die eindeutige Lösbarkeit des AWP's

$$Y'(t) = C \cdot Y(t), \qquad Y(0) = Y_0 \tag{2}$$

durch die Matrix-Funktion $Y(t) = \exp(tC)\,Y_0$ auf ganz $\mathbb{R}$, für beliebige $C, Y_0 \in \mathrm{Mat}_{n,n}(\mathbb{R})$, als bewiesene Tatsache an. Versuchen Sie einen erneuten Beweis der obigen ,,Funktionalgleichung" zu geben, indem Sie dieses Wissen mit der Voraussetzung $A \cdot B = B \cdot A$ kombinieren.

3)* Geben Sie ein möglichst einfaches Beispiel zweier nicht kommutierender Matrizen A, B aus $\mathrm{Mat}_{2,2}(\mathbb{R})$ an, für die $\exp(A + B) \neq \exp(A) \cdot \exp(B)$ gilt.

Hinweis zu (2): Versuchen Sie mittels $A \cdot B = B \cdot A$ zwei (!) Lösungen des AWP's (2) für eine schlau gewählte Matrix C und $Y_0 = \mathrm{diag}(1,1,\ldots,1)$ zu finden. Was muss für diese beiden Lösungen nun in jedem $t \in \mathbb{R}$ gelten ?

Abgabetermin ist Donnerstag, 05.06.2014. !