Universität Tübingen
Fachbereich Mathematik

PD Dr. R. Jakob 05.06.14

Gewöhnliche Differentialgleichungen
SS 2014
7.Übung

AUFGABE 15: Geben Sie die Lösungsfunktionen ϕ_f, die für jedes Paar (τ, x) aus dem Definitionsgebiet $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ eines stetig differenzierbaren Vektorfeldes $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ anhand der eindeutigen, maximalen Lösung $y_{\tau,x} : I_{(\tau,x)} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ des AWP's

$$y'(t) = f(t, y), \qquad y(\tau) = x$$

explizit durch $\phi_f(t, \tau, x) := y_{\tau,x}(t)$ definiert ist, für die folgenden C^1-Vektorfelder (bzw. C^1-Funktionen) f an. Versuchen Sie ausserdem deren Definitionsgebiete $\mathcal{D}$ in allen Fällen präzise anzugeben, in denen Ihnen dies möglich erscheint.

1) $n = 1$ und $f(t, y) := a(t)y + b(t)$ für zwei stetig differenzierbare Funktionen a, b auf $(t_0, t_1) \neq \emptyset$ und für beliebige $y \in \mathbb{R}$.

2) $n = m^2 \in \mathbb{N}$ und $f(t, Y) := A \cdot Y$, für alle $t \in \mathbb{R}$ und für beliebige Matrizen $Y \in \mathrm{Mat}_{m,m}(\mathbb{R})$, wobei A eine zeitunabhängige Matrix aus $\mathrm{Mat}_{m,m}(\mathbb{R})$ sei.

3) Nun soll konkret das in (2) aufgestellte Ergebnis für ϕ_f für die $(3 \times 3)-$Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & 2 & 0 \\ -4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

und

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & \sqrt{6} \\ 0 & \sqrt{6} & 2 \end{pmatrix}$$

so präzise wie nur möglich angegeben werden. Verwenden Sie hierzu, dass man diese Matrizen über $\mathbb{R}$ diagonalisieren kann, und versuchen Sie eine schlaue „Formel" bzw. Umformulierung für einen Ausdruck der Form „$B \exp(A) B^{-1}$", für beliebige $A \in \mathrm{Mat}_{m,m}(\mathbb{R})$ und $B \in \mathrm{GL}_m(\mathbb{R})$, zu beweisen, um das Ergebnis aus Teil 2 wirksam anwenden zu können.

4) Wieder $n = 1$ und $f(t, y) := 2t\, y^2$ und $f(t, y) := y + t\, y^5$ für beliebige Paare (t, y) aus der oberen Halbebene $\mathbb{H}_+$, d.h. für beliebige Zeiten $t \in \mathbb{R}$ und beliebige $y > 0$. Hierbei dürfen alle hierzu dienlichen Rechnungen aus Aufgabe 4 (auf dem 2. Übungsblatt)

natürlich benutzt werden. Nur sind für eine korrekte Bearbeitung dieser Aufgabe nun (unendlich viele) Modifikationen der dortigen Anfangswertprobleme (dort nur mit $\tau = 0$) zu betrachten, sodass man die beiden in Aufgabe 4 berechneten Lösungen nicht blind kopieren oder ,,auf gut Glück" leicht modifizieren sollte !

AUFGABE 16: Beweisen Sie das sogenannte ,,Teilfolgen-Prinzip": Sei B ein Banachraum über $\mathbb{R}$, d.h. ein Vektorraum über $\mathbb{R}$, der mit einer Norm $\| \cdot \|$ ausgestattet sei bzgl. welcher dieser vollständig ist. Dann gilt:
Eine Folge $\{f_j\} \subset B$ konvergiert gegen ein Element f aus B - d.h. es gilt $\| f_j - f \| \to 0$ für $j \to \infty$ - genau dann, wenn jede Teilfolge $\{f_{j_l}\}$ von $\{f_j\}$ eine weitere Teilfolge $\{f_{j_{l_k}}\}$ besitzt, die gegen dieses f in B konvergiert - d.h. falls $\| f_{j_{l_k}} - f \| \to 0$ für $k \to \infty$ gilt.

AUFGABE 17: Sei $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ stetig, $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ offen, und die partielle Ableitung $\partial_x f : \Omega \to \mathrm{Mat}_{n,n}(\mathbb{R})$ existiere und sei stetig. Weiter sei $y : I \times [-\epsilon, \epsilon] \to \mathbb{R}^n$ eine Familie stetiger Funktionen $y(\,\cdot\,, h)$ auf einem Intervall I, die erstens $(s, y(s,h)) \in \Omega$ für jedes $s \in I$ erfülle und die zweitens für $h \to 0$ gegen die stetige Funktion $y(\,\cdot\,, 0)$ gleichmässig (!) auf einem kompakten Intervall $[a,b] \subset I$ konvergiere.
Beweisen Sie nun den ,,verallgemeinerten Mittelwertsatz", d.h. hier präzise, dass ein $\epsilon' \in (0, \epsilon]$ existiert, sodass für jedes $h \in [-\epsilon', \epsilon']$

$$f(s, y(s,h)) - f(s, y(s,0)) = \int_0^1 \partial_x f(s, \sigma y(s,h) + (1-\sigma) y(s,0))\, d\sigma \cdot (y(s,h) - y(s,0))$$

in allen $s \in [a,b]$ gilt. Beachten bzw. verwenden Sie hierbei (auch), dass der Graph $\{(s, y(s,0)) \mid s \in [a,b]\}$ von $y(\,\cdot\,, 0)$ eine kompakte Teilmenge der offenen Menge Ω ist und dass $\sup_{s \in [a,b]} | y(s,h) - y(s,0) |$ für $h \to 0$ beliebig klein wird !

Abgabetermin ist Donnerstag, 19.06.2014. !