Universität Tübingen
Fachbereich Mathematik

PD Dr. R. Jakob 26.06.14

Gewöhnliche Differentialgleichungen
SS 2014
8.Übung

AUFGABE 18: Es sei $\Omega = \mathbb{R} \times \tilde{\Omega}$, $\tilde{\Omega} \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : \tilde{\Omega} \to \mathbb{R}^n$ ein vollständiges Vektorfeld, welches von der Zeit t unabhängig sei. Weiterhin sei $\Psi : \Omega \to \tilde{\Omega}$ der von f erzeugte Fluss auf $\tilde{\Omega}$.

1) Zeigen Sie: Falls für ein fixiertes $x \in \tilde{\Omega}$ der Limes $\lim_{t\to\infty} \Psi(t,x)$ existiert und in $\tilde{\Omega}$ enthalten ist, so gilt für den Limespunkt $x_0 := \lim_{t\to\infty} \Psi(t,x)$: $f(x_0) = 0$.

2) Sei nun $\omega := \{x_0 \in \tilde{\Omega} \mid \exists\, x \in \tilde{\Omega} \text{ mit } \lim_{t\to\infty} \Psi(t,x) = x_0\}$. Zeigen Sie, dass ω mit der Nullstellenmenge von f exakt übereinstimmt, also dass $\omega = \{x \in \tilde{\Omega} \mid f(x) = 0\}$ gilt.

AUFGABE 19: Es sei $\Omega := (-\delta, \infty) \times B^n_R(0)$, $\delta > 0$ beliebig klein, und $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ ein C^1-Vektorfeld, welches

$$\langle f(t,x), x \rangle \leq 0 \qquad \forall\, t \geq 0 \quad \text{und} \quad \forall\, x \in B^n_R(0) \setminus B^n_{R-\epsilon}(0)$$

für ein beliebig kleines $\epsilon \in (0, R)$ erfülle. Dann existiert der von f erzeugte Fluss $\Psi(t, \cdot)$ für alle Zeiten $t \geq 0$, also auf ganz $\mathbb{R}_+ \times B^n_R(0)$.

AUFGABE 20: Als Ergänzung des Beispiels aus Abschnitt 3.3 der Vorlesung sollen im Folgenden die Strömungsbilder im $\mathbb{R}^2$ des linearen Systems

$$\begin{pmatrix} \dot{Y}_1 \\ \dot{Y}_2 \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix} \tag{1}$$

für eine konstante $(2 \times 2)-$Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

zumindest qualitativ klassifiziert werden, falls A zwei verschiedene, zueinander konjugierte, echt-komplexe Eigenwerte hat, also falls $\lambda_1 = \alpha + i\omega$ und $\lambda_2 = \alpha - i\omega$, für ein $\omega > 0$, die beiden Nullstellen des charakteristischen Polynoms von A sind. Die Lösungen Y von (1) sind hier C^1-Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}^2$, beschreiben also die nun zu untersuchenden ,,Strömungs-Linien" zum Vektorfeld $f(Y) := A \cdot Y$ im $\mathbb{R}^2$.

1) Wir fassen die Matrix A als Element von $\mathrm{Mat}_{2,2}(\mathbb{C})$ auf und bezeichnen mit $v_1 := x + iy \neq 0$ einen Eigenvektor von A aus $\mathbb{C}^2$ zum Eigenwert $\lambda_1 = \alpha + i\omega$. Schliessen Sie zunächst aus „$A \in \mathrm{Mat}_{2,2}(\mathbb{R})$", dass dann $v_2 := x - iy$ ein Eigenvektor von A zum Eigenwert $\lambda_2 = \alpha - i\omega$ sein muss und erklären Sie, warum somit $\{v_1, v_2\}$ eine Basis des $\mathbb{C}^2$ ist. Schliessen Sie hieraus, dass $\{x, y\}$ eine Basis des $\mathbb{R}^2$ sein muss, und leiten Sie aus „$A \cdot v_1 = \lambda_1 \cdot v_1 = (\alpha + i\omega) \cdot (x + iy)$" die Matrix-Gleichung

$$B \cdot A \cdot B^{-1} = \begin{pmatrix} \alpha & \omega \\ -\omega & \alpha \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \omega \\ -\omega & 0 \end{pmatrix} \tag{2}$$

her, wobei die invertierbare Matrix B^{-1} (oder hier etwa B ?) spaltenweise aus den Basisvektoren x und y schlau zusammengesetzt werden muss (man vergleiche hierzu Aufgabe 13) !

2) Beweisen Sie im nächsten Schritt die fundamentale Identität

$$\exp\left(t \begin{pmatrix} 0 & \omega \\ -\omega & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \cos(\omega t) & \sin(\omega t) \\ -\sin(\omega t) & \cos(\omega t) \end{pmatrix} \tag{3}$$

für beliebige $t \in \mathbb{R}$, beispielsweise mittels eines Vergleichs der Matrix-Potenzreihe exp (nach Definition 3.3.1 der Vorlesung) mit den Potenzreihen von sin und cos und mit vollständiger Induktion (also ähnlich, aber nicht so anstrengend wie in Aufgabe 8).

3) Kombinieren Sie nun Korollar 3.3.1 der Vorlesung mit den Formeln (2) und (3), der Funktionalgleichung aus Aufgabe 14 (1), und der Formel

$$\exp(B \cdot (At) \cdot B^{-1}) = B \cdot \exp(At) \cdot B^{-1}$$

aus Aufgabe 15 (3), um die eindeutige Lösung Y des AWP's

$$\begin{pmatrix} \dot{Y}_1 \\ \dot{Y}_2 \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix}, \qquad Y(0) = Y_0 \tag{4}$$

für einen beliebigen Startvektor $Y_0 \neq 0$ in einer präzisen Formel anzugeben, aus der die Bewegung von Y ab $t = 0$ konkret abgelesen werden kann.

4) Interpretieren Sie die einzelnen Faktoren in dieser Formel in Abhängigkeit von α und ω und diskutieren Sie qualitativ das Verhalten der in Y_0 startenden Lösungskurve Y, d.h.: unterscheiden Sie die drei Fälle $\alpha < 0$, $\alpha = 0$ und $\alpha > 0$, und klären Sie die Entwicklung von Y bzw. $\mid Y \mid$ für $t \to \infty$. Ist dies in allen drei Fällen möglich ? Oder beschreibt Y in einem Fall eine periodische Bewegung mit Periodendauer $= \ldots$? Drei einfache Zeichnungen wären hier hilfreich !

Abgabetermin ist Donnerstag, 03.07.2014. !