Universität Tübingen
Fachbereich Mathematik

PD Dr. R. Jakob 03.07.14

Gewöhnliche Differentialgleichungen
SS 2014
9.Übung

AUFGABE 21: Es sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ durch $f(x) := A \cdot x$ für eine konstante, reelle $(n \times n)-$Matrix A gegeben.

1) Berechnen Sie zunächst den von f erzeugten Fluss Ψ auf $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ mittels des in Aufgabe 15, (2) aufgestellten Resultats bzw. mittels Korollar 3.3.1 der Vorlesung.

2) Da sich $\Psi(t, \cdot)$ für jedes $t \geq 0$ als eine lineare Abbildung von $\mathbb{R}^n$ nach $\mathbb{R}^n$ herausstellt, liegt es nahe, eine präzise Formel für deren Determinante, also für $\det \Psi(t, \cdot)$, für $t \geq 0$, in Abhängigkeit von A aufzustellen. Aus welcher Formel der Vorlesung folgt diese gesuchte Formel sofort, und wie lautet diese exakt ?

3) Aus der Lebesgueschen Mass-Theorie ist bekannt, dass für jede lineare Abbildung $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ die Formel
$$\mathcal{L}^n(L(S)) = \mid \det(L) \mid \; \mathcal{L}^n(S) \tag{1}$$
für jede Teilmenge $S \subset \mathbb{R}^n$ gilt. Kombinieren Sie nun diese Formel mit den Resultaten aus den Aufgabenteilen (1) und (2), um eine Formel für das Volumen $V_S(t) := \mathcal{L}^n(\Psi(t, S))$ der durch den Fluss Ψ deformierten Menge $\Psi(t, S)$ im Laufe der Zeit $t \geq 0$ aufzustellen, und vergleichen Sie dieses Resultat mit dem Korollar 5.1.1 von Liouville's Theorem 5.1.2. Stimmen die beiden Formeln für $V_S(t)$ zumindest für kompakte Teilmengen $S \subset \mathbb{R}^n$ überein ? Falls nicht, so bitte ich Sie um eine begründete Entscheidung, ob Formel (1) oder eine der beiden Formeln (5.5), (5.6) aus der Vorlesung falsch ist !

4) Schliesslich erprobe bzw. diskutiere man die in Teil (3) gefundene Formel für die Volumen-Entwicklung $V_S(t)$ einer beliebigen Teilmenge $S \subset \mathbb{R}^n$ an den Matrizen
$$A_r = \begin{pmatrix} 0 & \omega & r & 0 & 0 \\ -\omega & 0 & 0 & 0 & 0 \\ r & 0 & 0 & \omega & 0 \\ 0 & 0 & -\omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$
für ein festes $\omega > 0$ ein festes $\lambda \in \mathbb{R}$ und variables $r \in \mathbb{R}$. Setzen Sie zunächst $r = 0$. Wie lautet in diesem Fall die obige Formel exakt für $V_S(t)$, und wovon hängt

diese nur ab ? Wird das Volumen von $\Psi(t, S)$ kleiner oder grösser im Laufe der Zeit $t \geq 0$? Vergleichen Sie das Resultat mit der ,,geometrischen Wirkung" des durch $f(x) = A_0 \cdot x$ erzeugten Flusses in Kombination mit Formel (1) aus Teil (3) !

5)* Welche Formel erhalten Sie für $V_S(t)$, falls $r \neq 0$ ist ? Können Sie die Richtigkeit dieser Formel wieder mittels der ,,geometrischen Wirkung" des von $f(x) = A_r \cdot x$ erzeugten Flusses Ψ_r verifizieren, oder ist eine konkrete Berechnung von Ψ_r für $r \neq 0$ zu schwierig ?

AUFGABE 22: Wir betrachten das Vektorfeld $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ aus Aufgabe 8, welches durch $F(x_1, x_2, x_3) := (x_2\, x_3, -x_1\, x_3, 2)$ gegeben war.

1) Zeigen Sie zunächst, dass F vollständig ist, also dass der von F erzeugte Phasenfluss $\Psi_F(t, x)$ für jeden Startwert $x \in \mathbb{R}^3$ und für alle $t \in \mathbb{R}$ existiert.
Hinweis: Unterscheiden Sie zwischen der 3. und den ersten beiden Komponenten des zu F korrespondierenden AWP's
$$Y' = F(Y), \qquad Y(0) = x$$
und wenden Sie Aufgabe 19 geschickt an ! Behandeln Sie in einem ersten Schritt positive und in einem zweiten Schritt negative Zeiten t !

2) Berechnen Sie nun die Volumen-Entwicklung einer beliebigen, abgeschlossenen Teilmenge S von $\overline{B_2^3(0)}$, d.h. berechnen Sie $V_S(t) = \mathcal{L}^n(\Psi_F(t, S))$ für $t \geq 0$. Können Sie $\Psi_F(\,\cdot\,, x)$ für ein bestimmtes $x \in B_2^3(0)$ (mit $x_1^2 + x_2^2 > 0$) auf $\mathbb{R}_+$ explizit angeben ? Falls ja, so vergleichen Sie dies bitte mit dem Ergebnis für $V_S(t)$! Wie wirkt demnach vermutlich der von F erzeugte Fluss Ψ_F (qualitativ) auf den gesamten Ball $B_2^3(0)$?

AUFGABE 23: Wir betrachten für ein $m \geq 3$ die $m-$dimensionale Sphäre $\mathcal{S}^m := \{x \in \mathbb{R}^{m+1} \mid\mid x \mid= 1\}$ im $\mathbb{R}^{m+1}$.

1) Vergewissern Sie sich zunächst darüber, dass dies in der Tat eine ,,gleichungs-definierte" $C^\infty-$Mannigfaltigkeit ist, also die Nullstellenmenge einer $C^\infty-$Funktion $f : \mathbb{R}^{m+1} \to \mathbb{R}$, für die 0 ein regulärer Wert ist, d.h. für die $\nabla f \neq 0$ auf $[f = 0]$ gilt.

2) Geben Sie nun explizit eine lokale Parametrisierung (möglichst in ,,Graphen-Form") der $\mathcal{S}^m$ um den Punkt $y_0 := \frac{1}{\sqrt{m+1}}(1, 1, \ldots, 1)$ und solch eine um den Punkt $y_0 := \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 0, \ldots, 0, -1, 1, 0)$ an.

3) Geben Sie für ungerades (!) $m \geq 3$ ein $C^\infty-$glattes Vektorfeld $\Upsilon : \mathbb{R}^{m+1} \to \mathbb{R}^{m+1}$ an, welches auf ganz $\mathbb{R}^{m+1}$ höchstens lineares Wachstum besitzt und dessen Einschränkung auf die $\mathcal{S}^m$ ein Tangentialvektorfeld an die $\mathcal{S}^m$ ohne Nullstellen (!) ist. Versuchen Sie anschliessend die eindeutigen, maximalen Lösungen des AWP's
$$y'(t) = \Upsilon(y(t)), \qquad y(0) = y_0$$
für die Startpunkte $y_0 := \frac{1}{\sqrt{m+1}}(1, 1, \ldots, 1)$, $y_0 := \sqrt{\frac{2}{m+1}}(1, 0, 1, 0, \ldots, 1, 0)$, $y_0 := \frac{1}{\sqrt{m+1}}(1, -1, 1, -1, \ldots, 1, -1)$ und $y_0 := (1, 0, 0, 0, \ldots, 0)$ explizit zu berechnen. Welche Vorhersagen können Sie anhand unserer theoretischen Vorarbeit aus der Vorlesung über deren Existenz-Intervalle und über deren Beträge $t \mapsto\mid y(t) \mid$ a priori

treffen ? Haben Ihre expliziten Lösungen tatsächlich diese Eigenschaften ?
Hinweis: Beachten Sie zur Konstruktion eines Vektorfeldes Υ mit obigen erwünschten Eigenschaften, dass ein Vektorfeld Υ genau dann tangential an die $\mathcal{S}^m$ ist, falls es $\langle \Upsilon(y), y \rangle = 0$ für alle $y \in \mathcal{S}^m$ erfüllt.

Abgabetermin ist Donnerstag, der 10.07.2014 !