Universität Tübingen
Fachbereich Mathematik

PD Dr. Ruben Jakob 13.04.2015

Nichtlineare partielle Differentialgleichungen
SS 2015
1. Übungsblatt

AUFGABE 1:
Es sei $u_m \in C^{2,\alpha}_{loc}(\mathbb{R}^n)$ eine Folge, die $\text{höl}_{\mathbb{R}^n,\alpha} D^2 u_m := \sum_{i,j=1}^n \text{höl}_{\mathbb{R}^n,\alpha}(\partial_{ij} u_m) = 1$ für jedes $m \in \mathbb{N}$ erfülle.

(i) Beweisen Sie, dass es eine Teilfolge u_{m_l}, ein Paar $(i,j) =: \gamma \in \{1,\dots,n\}^2$, einen Standard-Einheitsvektor e_i, Punkte $x_{m_l} \in \mathbb{R}^n$ und $h_{m_l} > 0$ geben muss, für welche

$$h_{m_l}^{-\alpha} |\partial^\gamma u_{m_l}(x_{m_l} \pm h_{m_l} e_i) - \partial^\gamma u_{m_l}(x_{m_l})| \geq \frac{1}{2n^3} > 0$$

für alle l gilt.

(ii) Beweisen Sie für die reskalierten Funktionen

$$\tilde{u}_m(x) := h_m^{-2-\alpha}\, u_m(x_m + h_m x) :$$

$\text{höl}_{\mathbb{R}^n,\alpha}(\partial_{ij}\tilde{u}_m) = \text{höl}_{\mathbb{R}^n,\alpha}(\partial_{ij} u_m)$ und somit $\text{höl}_{\mathbb{R}^n,\alpha} D^2 \tilde{u}_m = \text{höl}_{\mathbb{R}^n,\alpha} D^2 u_m$ und $\text{höl}_{\mathbb{R}^n,\alpha} \triangle \tilde{u}_m = \text{höl}_{\mathbb{R}^n,\alpha} \triangle u_m$.

AUFGABE 2:
Es sei

$$A := (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$$

symmetrisch, positiv definit und erfülle

$$\Lambda^{-1} I_n \leq A \leq C_n \Lambda I_n.$$

Zu A existiert genau eine positiv definite Wurzel $B = (b_{ij})$, d.h. genau eine positiv definite $(n \times n)-$Matrix B, die $A = B^2$ und $B^T = B$ erfüllt. Zeigen Sie:

(i)

$$\Lambda^{-1/2} I_n \leq B \leq (C_n \Lambda)^{1/2} I_n. \tag{1}$$

(ii) Sei nun $u \in C^{2,\alpha}_{loc}(\mathbb{R}^n)$ mit $\text{höl}_{\mathbb{R}^n,\alpha} D^2 u < \infty$ gegeben, und setzen wir

$$\tilde{u}(x) = u(Bx).$$

Zeigen Sie: $\tilde{u}$ erfüllt

$$\partial_k \tilde{u}(x) = \partial_i u(Bx) b_{ik},$$

$$\partial_{kl} \tilde{u}(x) = \partial_{ij} u(Bx) b_{ik} b_{jl},$$

insbesondere

$$\Delta\tilde{u}(x) = a_{ij}\partial_{ij}u(Bx) \tag{2}$$

und (zusammen mit (1)) die Abschätzungen

$$\begin{aligned}
h\ddot{o}l_{\mathbb{R}^n,\alpha}\Delta\tilde{u} &\leq C_n\Lambda^{\alpha/2}\ h\ddot{o}l_{\mathbb{R}^n,\alpha}(a_{ij}\partial_{ij}u) < \infty, \\
h\ddot{o}l_{\mathbb{R}^n,\alpha}D^2\tilde{u} &\leq C_n\Lambda^{1+\alpha/2}\ h\ddot{o}l_{\mathbb{R}^n,\alpha}D^2u < \infty, \\
h\ddot{o}l_{\mathbb{R}^n,\alpha}D^2u &\leq C_n\Lambda^{1+\alpha/2}\ h\ddot{o}l_{\mathbb{R}^n,\alpha}D^2\tilde{u}.
\end{aligned}$$

(iii) Folgern Sie hieraus schliesslich $\tilde{u} \in C^{2,\alpha}_{loc}(\mathbb{R}^n)$ (Mittelwertsatz). Kann man die obigen (Un-)Gleichungen nun derart schlau kombinieren, dass sich sogar $\tilde{u} \in C^{2,\alpha}(\mathbb{R}^n)$ ergibt ?

Abgabetermin ist Montag, der 20.04.2015.