Universität Tübingen
Fachbereich Mathematik

PD Dr. Ruben Jakob 06.07.2015

Nichtlineare partielle Differentialgleichungen
SS 2015
10. Übungsblatt

<u>AUFGABE 21:</u>

Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und zusammenhängend, L ein linearer, elliptischer Differentialoperator in Divergenzform, also

$$Lu := \partial_i(a_{ij}\partial_j u + b_i u) + c_i \partial_i u + du \tag{1}$$

mit

$$a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq \Lambda^{-1}|\xi|^2 \quad \text{für } \mathcal{L}^n\text{-fast alle } x \in \Omega, \quad \text{für alle } \xi \in \mathbb{R}^n, \tag{2}$$

$a_{ij}, b_i, c_i, d \in L^\infty(\Omega)$ mit

$$\| a_{ij} \|_{L^\infty(\Omega)} \leq \Lambda, \qquad \| |b_i| + |c_i| + |d|^{1/2} \|_{L^\infty(\Omega)} \leq \Gamma, \tag{3}$$

für ein $1 \leq \Lambda, \Gamma < \infty$ und $g \in L^q(\Omega), f \in L^{q/2}(\Omega)$ für ein $q > n, 2$. Ausserdem seien die Koeffizienten a_{ij} und b_i auf Ω Lipschitz-stetig mit $\| a_{ij}, b_i \|_{C^{0,1}(\Omega)} \leq \Lambda$. Seien desweiteren $u_k \in W^{1,2}(\Omega)$ nicht-negative, stetige, schwache Lösungen der Gleichung

$$L(u) = f + \operatorname{div}(g) \quad \text{auf } \Omega$$

mit $u_k \leq u_{k+1}$ auf Ω und $\int_{B_\rho(x_0)} u_k \leq M < \infty$ für jedes k und für <u>einen</u> Ball $B_{2\rho}(x_0) \subset\subset \Omega$. Zeigen Sie mittels der Harnack-Ungleichung (und in Punkt (iii) mittels L^2-Theorie):

(i) $\{u_k(x)\}$ ist in jedem Punkt $x \in \Omega$ eine monoton wachsende, <u>konvergente</u> Folge.

(ii) $\{u_k\}$ konvergiert in $C^0_{loc}(\Omega)$ und punktweise monoton gegen eine stetige Funktion $u^* \in C^0(\Omega)$.

(iii) $\{u_k\}$ konvergiert auch in $W^{2,2}_{loc}(\Omega)$ gegen u^*, falls bereits $u_1 \in W^{2,2}_{loc}(\Omega)$ bekannt ist.

<u>AUFGABE 22:</u>

Zeigen Sie das folgende „Starke Maximumprinzip für Operatoren in Divergenzform":

Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und zusammenhängend, L ein linearer, elliptischer Differentialoperator in Divergenzform, der die Eigenschaften (1)–(3) aus Aufgabe 21 erfülle, und ausserdem

$$\int_\Omega (b_i \partial_i v - dv) \geq 0 \quad \text{für alle } v \in W_0^{1,1}(\Omega), v \geq 0. \tag{4}$$

Ist $u \in W^{1,2}(\Omega)$ eine schwache Unterlösung zu L, erfüllt also

$$Lu \geq 0 \quad \text{schwach in } \Omega,$$

und nimmt u sein nichtnegatives Maximum im Inneren von Ω in dem Sinne an, daß

$$0 \leq \sup_B u = \sup_\Omega u < \infty$$

für einen Ball $B \subset\subset \Omega$ gilt, so ist u konstant auf Ω.
Hinweis: Betrachten Sie hierfür anstatt u die Funktion $v := M - u$ für eine geschickt gewählte Konstante $M \geq 0$ und verwenden Sie die Bedingung (4), um einen der Sätze 9.1–9.3 der Vorlesung auf v anwenden zu können.

Abgabetermin ist Mittwoch, der 15.07.2015.