Universität Tübingen
Fachbereich Mathematik

PD Dr. Ruben Jakob 15.07.2015

Nichtlineare partielle Differentialgleichungen
SS 2015
11. Übungsblatt

AUFGABE 23:

Es sei $\Omega \subset\subset \mathbb{R}^n$ offen und zusammenhängend, $n \geq 2$, und es seien φ_1 und φ_2 zwei auf $\bar{\Omega}$ Lipschitz-stetige Funktionen, deren Graphen Minimalflächen sind, d.h. welche

$$\operatorname{div}\Big(\frac{\nabla\varphi_i}{\sqrt{1+|\nabla\varphi_i|^2}}\Big) = 0 \quad \text{schwach auf } \Omega$$

$i = 1,2$ erfüllen. Zeigen Sie, dass aus den Voraussetzungen "$\varphi_2 \geq \varphi_1$ auf Ω" und "$\varphi_2(x_0) = \varphi_1(x_0)$ in einem Punkt $x_0 \in \Omega$" bereits $\varphi_2 = \varphi_1$ auf ganz Ω geschlossen werden kann. Versuchen Sie hierzu mittels der Hesse-Matrix der Funktion $A(p) := \sqrt{1+|p|^2}$ und mittels des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung eine (schwache) elliptische Differentialgleichung 2. Ordnung für die Differenz $u := \varphi_2 - \varphi_1$ zu ermitteln, sodass Sie einen Satz (oder eine Technik) der Vorlesung oder des letzten Übungsblattes anwenden können.

AUFGABE 24:

Es sei die Koeffizienten-Matrix (a_{ij}) durch $a_{11}(x,y) = x^2$, $a_{12}(x,y) = -3xy$ und $a_{22}(x,y) = 10\,y^2$ gegeben. Zeigen Sie, dass die Funktion $u(x,y) = x^2$ die Divergenzform-Gleichung

$$\partial_i(a_{ij}\,\partial_j u) = 0 \qquad \text{auf } \mathbb{R}^2$$

klassisch erfüllt. Offenbar gilt $u \geq 0$ auf $\mathbb{R}^2$ und $\inf_{\mathbb{R}^2} u = u(0) = 0$ bzw. $-u \leq 0$ und $\sup_{\mathbb{R}^2}(-u) = 0$. Warum liefert dies keinen Widerspruch zur Harnack-Ungleichung bzw. zum starken Maximum-Prinzip aus Aufgabe 22 ?

AUFGABE 25*:

Beweisen Sie folgende Variante der Harnack-Ungleichung in Dimension 2: Sei $B_{\rho_0}(0)$ ein Ball in $\mathbb{R}^2$ und u eine schwache, nicht-negative Lösung der Divergenzform-Gleichung

$$\partial_i(a_{ij}\partial_j u) + c_i\partial_i u = 0 \qquad \text{auf } B_{\rho_0}(0)$$

mit $\Lambda^{-1}\,\delta_{ij} \leq a_{ij} \leq \Lambda\,\delta_{ij}$ und $\| a_{ij}, c_i \|_{L^\infty(B_{\rho_0}(0))} \leq \Lambda$. Dann gilt:

$$\sup_{B_{\rho_0/2}(0)} u \leq C(\Lambda,\rho_0) \inf_{B_{\rho_0/2}(0)} u. \tag{1}$$

Gehen Sie dabei in folgenden Schritten vor:

(i) [Courant-Lebesgue-Lemma] Sei $u \in W^{1,2}(B_{\rho_0}(0))$ eine beliebige Funktion, deren Oszillation $\operatorname{osc}_{\partial B_\rho(0)} u$ auf den Kreisen $\partial B_\rho(0)$ in ρ nicht-fallend ist. Dann gilt:

$$(\operatorname{osc}_{\partial B_\rho(0)} u)^2 \leq \frac{2\pi}{\log(\rho_0/\rho)} \int_{B_{\rho_0}(0)} |\nabla u|^2 \, d\mathcal{L}^n,$$

für $0 < \rho < \rho_0$. Hierbei sei

$$\operatorname{osc}_{\partial B_\rho(0)} u := \mathrm{ess} - \sup\{|u(x_1) - u(x_2)| | x_1, x_2 \in \partial B_\rho(0)\}$$

definiert.

(ii) Sei $u \in W^{1,2}(B_{\rho_0}(0))$ eine positive, schwache Oberlösung zum Differential-Operator

$$Lu := \partial_i(a_{ij}\, \partial_j u + b_i\, u) + c_i\, \partial_i u + d\, u,$$

d.h. u erfülle $L(u) \leq 0$ schwach auf $B_{\rho_0}(0)$, und $u(x) > 0$ in $\mathcal{L}^n$-f.a. Punkten $x \in B_{\rho_0}(0)$, wobei wieder $\Lambda^{-1}\, \delta_{ij} \leq a_{ij} \leq \Lambda\, \delta_{ij}$ und $\| a_{ij}, b_i, c_i, d \|_{L^\infty(B_{\rho_0}(0))} \leq \Lambda$ vorausgesetzt sei. Dann gilt für den Logarithmus $v := \log(u)$:

$$\int_{B_\rho(0)} |\nabla v|^2 \, d\mathcal{L}^n \leq C(\Lambda)\, \rho_0^2\, (1 + (\rho_0 - \rho)^{-2}),$$

für jedes $\rho \in (0, \rho_0)$. Testen Sie hierfür die schwache Differential-Ungleichung "$L(u) \leq 0$" mit einer Test-Funktion der Form $\frac{\eta^2}{u+\varepsilon}$, mit einem beliebigen $\varepsilon > 0$ und einer geeigneten Abschneidefunktion $\eta \in C_0^1(B_{\rho_0}(0))$.

(iii) Kombinieren Sie die Ergebnisse aus den Aufgaben-Teilen (i) und (ii) mit dem schwachen Maximum-Prinzip der L^2-Theorie, Satz 6.1, um die Behauptung (1) herzuleiten.

Abgabetermin ist Mittwoch, der 22.07.2015.