Universität Tübingen
Fachbereich Mathematik

PD Dr. Ruben Jakob 22.07.2015

Nichtlineare partielle Differentialgleichungen
SS 2015
12. Übungsblatt

AUFGABE 26:

Beweisen Sie mittels der Beweis-Techniken von Satz 7.1 (innere Schauder-a-priori-Abschätzungen), also insbesondere mittels der Beweis-Techniken der Propositionen 7.1–7.3, zusammen mit den Techniken aus Aufgabe 7 (!) die folgenden inneren $C^{1,\alpha}-$a-priori-Abschätzungen:

Theorem 0.1 *Es sei* $\Omega \subset\subset \mathbb{R}^n$ *offen und*

$$Lu := \partial_i(a_{ij}\partial_j u + b_i u) + c_i \partial_i u + du$$

ein elliptischer partieller Differential-Operator in Divergenz-Form, mit

$$a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq \Lambda^{-1}|\xi|^2 \quad \textit{für alle } x \in \Omega, \quad \textit{für alle } \xi \in \mathbb{R}^n,$$

wobei $a_{ij}, b_i \in C^{0,\alpha}(\Omega)$, *für ein* $0 < \alpha < 1$, *und* $c_i, d \in L^\infty(\Omega)$ *seien, mit*

$$\| a_{ij}, b_i \|_{C^{0,\alpha}(\Omega)} \leq \Lambda,$$
$$\| c_i, d \|_{L^\infty(\Omega)} \leq \Lambda,$$

für ein $\Lambda \in [1, \infty)$. *Ist nun* $u \in C^{1,\alpha}(\Omega)$ *eine schwache Lösung von*

$$L(u) = f + \operatorname{div}(g) \qquad \text{schwach } \textit{in } \Omega$$

für ein $f \in L^p(\Omega)$, $p = \frac{n}{1-\alpha}$, *und* $g \in C^{0,\alpha}(\Omega, \mathbb{R}^n)$, *so gilt die* $C^{1,\alpha}-$*a-priori-Abschätzung:*

$$\| u \|_{C^{1,\alpha}(\Omega')} \leq C(\Omega', \Omega, \Lambda, n, \alpha) \left(\| f \|_{L^p(\Omega)} + \| g \|_{C^{0,\alpha}(\Omega)} + \| u \|_{L^2(\Omega)}\right)$$

Hinweis: Versuchen Sie, zunächst nur mittels der Techniken der Propositionen 7.1–7.3 die schwächere, lokale Variante

$$\| u \|_{C^{1,\alpha}(B_1(0))} \leq C(\Lambda, n, \alpha) \left(\| f \|_{L^p(B_2(0))} + \| g \|_{C^{0,\alpha}(B_2(0))} + \| u \|_{C^1(B_2(0))}\right)$$

zu beweisen.

AUFGABE 27:

Es sei $\Omega \subset\subset \mathbb{R}^n$ offen, $n \geq 2$, und es sei φ eine auf $\bar{\Omega}$ Lipschitz-stetige Funktion, deren Graph eine Fläche vorgeschriebener mittlerer Krümmung H im Graphen-Punkt $(x, \varphi(x))$ ist, d.h. welche

$$\operatorname{div}\Big(\frac{\nabla\varphi}{\sqrt{1+|\nabla\varphi|^2}}\Big) = 2\,H(\varphi) \qquad \text{schwach auf } \Omega$$

für eine $C^\infty-$glatte Funktion $H : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ erfüllt. Zeigen Sie: $\varphi \in C^\infty_{loc}(\Omega)$. Gehen Sie dabei in folgenden Schritten vor:

(i) Verwenden Sie zunächst, ähnlich wie in Aufgabe 23, dass jeder Differenzenquotient $\partial^h_l\varphi$, $l \in \{1, \dots, n\}$, eine schwache Lösung einer gleichmässig elliptischen Divergenz-Form-Gleichung

$$\partial_i(a_{ij}\partial_j u) = f \qquad \text{schwach in } \Omega' \tag{1}$$

für ein adäquates f ist, falls $|h| \in (0, \operatorname{dist}(\partial\Omega', \partial\Omega))$ und $\Omega' \subset\subset \Omega$ eine beliebig fixierte, offene Teilmenge ist.

(ii) Wenden Sie anschliessend erst einmal Satz 10.1 zusammen mit Proposition 5.12 der Vorlesung auf die Familie $\{\partial^h_l\varphi\}$ an, um ein erstes Regularitäts-Resultat für φ zu gewinnen.

(iii) Kombinieren Sie das erworbene Wissen aus (ii) nun erneut mit der Tatsache, dass $\partial^h_l\varphi$ die Gleichung (1) schwach in Ω' löst, und mit der $C^{1,\alpha}-$a-priori-Abschätzung aus Aufgabe 26, um $\varphi \in C^{2,\alpha}_{loc}(\Omega)$ zu schliessen.

(iv) Können Sie nun Schauder-Theorie anwenden, um sogar $\varphi \in C^{k,\alpha}_{loc}(\Omega)$ für $k = 3, 4, 5\dots$ induktiv schliessen zu können ? Wenn ja, auf welche elliptische Nicht-Divergenzform-Gleichung, und warum genau ?

Abgabetermin ist: morgen !