Universität Tübingen
Fachbereich Mathematik

PD Dr. Ruben Jakob 20.04.2015

Nichtlineare partielle Differentialgleichungen
SS 2015
2. Übungsblatt

AUFGABE 3:

(i) Beweisen Sie die folgende Verallgemeinerung von Proposition 7.4 der Vorlesung:

Proposition 0.1 *Es seien* $\mathcal{H}^n{}_b := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle x, b\rangle > 0\}$ *ein durch einen beliebig fixierten Richtungsvektor b der Länge 1 festgelegter Halbraum im* $\mathbb{R}^n$ *und* $u \in C^{2,\alpha}_{loc}(\overline{\mathcal{H}^n{}_b})$, $0 < \alpha < 1$, *mit* $u = 0$ *auf* $\partial\mathcal{H}^n{}_b = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle x, b\rangle = 0\}$ *und*

$$h\ddot{o}l_{\mathcal{H}^n{}_b,\alpha}(D^2u) < \infty.$$

Dann existiert eine Konstante $C(n, \alpha)$, *für die*

$$h\ddot{o}l_{\mathcal{H}^n{}_b,\alpha}(D^2u) \leq C(n, \alpha) h\ddot{o}l_{\mathcal{H}^n{}_b,\alpha}(\Delta u)$$

gilt.

Hinweis: Wählen Sie eine Drehung $O \in SO(n)$, die $O(b) = e_n$ erfüllt, verstehen Sie dessen Wirkung auf $\mathcal{H}^n{}_b$ und definieren Sie die Funktion

$$\tilde{u} := u \circ O^T \qquad \text{auf } \mathbb{R}^n_+.$$

Versuchen Sie nun mittels zu Aufgabe 2 ähnlicher Rechnungen nachzuweisen, dass erstens $\tilde{u}$ eine $C^{2,\alpha}_{loc}(\overline{\mathbb{R}^n_+})$−Funktion ist, die alle Voraussetzungen von Proposition 7.4 der Vorlesung erfüllt, sodass diese direkt auf $\tilde{u}$ angewandt werden kann und dass zweitens

$$\triangle\tilde{u} = (\triangle u) \circ O^T \qquad \text{auf } \mathbb{R}^n_+$$

gilt.

(ii) Muss der Beweis von Proposition 7.4 für diese Argumentation herangezogen werden, oder können wir uns gemütlich auf die Richtigkeit von Proposition 7.4 verlassen ?

AUFGABE 4:

Beweisen Sie nun mittels des Resultats von Aufgabe 3 die Proposition 7.5 der Vorlesung:

Proposition 0.2 *Es seien* $1 \leq \Lambda < \infty$ *und* $(a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *mit*

$$a_{ij}\xi_i\xi_j \geq \Lambda^{-1}|\xi|^2 \quad \text{für } \xi \in \mathbb{R}^n,$$
$$|a_{ij}| \leq \Lambda$$

und $u \in C^{2,\alpha}_{loc}(\overline{\mathbb{R}^n_+}), 0 < \alpha < 1$, *mit*

$$u = 0 \quad \textit{auf}\, \mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}$$

und

$$h\ddot{o}l_{\alpha,\mathbb{R}^n_+}(D^2u) < \infty.$$

Dann existiert eine Konstante $C(\Lambda, n, \alpha) > 0$*, für die*

$$h\ddot{o}l_{\alpha,\mathbb{R}^n_+}(D^2u) \leq C(\Lambda, n, \alpha) h\ddot{o}l_{\alpha,\mathbb{R}^n_+}(a_{ij}\partial_{ij}u)$$

gilt.

Hinweis: Definieren Sie wie in Aufgabe 2, bzw. im Beweis von Proposition 7.2 der Vorlesung, die Funktion $\tilde{u}(x) := u(Bx)$, für x aus dem Halbraum $\mathcal{H}^n{}_b := B^{-1}(\mathbb{R}^n_+)$, und prüfen Sie, ob $\tilde{u}$ den Bedingungen von Aufgabe 3 genügt.

<u>AUFGABE 5:</u>
Es sei $u \in C^{2,\alpha}_{loc}(\overline{\mathbb{R}^n_+}), 0 < \alpha < 1$, mit

$$u = 0 \quad \text{auf } \mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}$$

und $\triangle u = 0$ auf $\mathbb{R}^n_+$. Nun führen wir die „gerade" und „ungerade" Spiegelung an der Hyperebene $\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}$ von u durch

$$E_{\pm}u(y,t) := \begin{cases} u(y,t) & \text{falls } \ t \geq 0 \ , \\ \{\pm\}u(y,-t) & \text{falls } \ t < 0 \ , \end{cases}$$

ein.

(i) Entscheiden Sie zunächst (mit Beweis), bei welcher Wahl dieser beider Spiegelungsmöglichkeiten die fortgesetze Funktion $E_{\pm}u$ sicherlich aus $C^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$, also in jedem Punkt des $\mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar ist.

(ii) Zeigen Sie in einem zweiten Schritt, dass die (richtig) fortgesetzte Funktion sogar aus $C^{2,\alpha}_{loc}(\mathbb{R}^n)$ und ausserdem harmonisch auf ganz $\mathbb{R}^n$ ist.
Hinweis: Beweisen Sie in Aufgabenteil (ii) zunächst die Stetigkeit aller zweiten Ableitungen von u auf ganz $\mathbb{R}^n$, indem Sie zwischen den Ableitungen $\partial_{ln}u$, für $l = 1, \ldots, n-1$, und den Ableitungen $\partial_{lk}u$, mit $1 \leq l, k \leq n-1$ oder $(l,k) = (n,n)$ unterscheiden.

Abgabetermin ist Montag, der 27.04.2015.