Universität Tübingen
Fachbereich Mathematik

PD Dr. Ruben Jakob 27.04.2015

Nichtlineare partielle Differentialgleichungen
SS 2015
3. Übungsblatt

AUFGABE 6:
Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Menge. Wir nennen eine Abbildung $G := (g_{ij}) : \Omega \to S^+(n)$ in die Menge der positiv-definiten, symmetrischen $(n \times n)$-Matrizen eine Metrik auf Ω. Wir setzen

$$g^{ij} := (G^{-1})_{ij} \quad \text{und} \quad g := \det(G).$$

Zu einer C^1-Metrik G definieren wir den Beltrami-Laplace-Operator durch

$$\triangle_G(u) := \frac{1}{\sqrt{g}} \partial_i(\sqrt{g}\, g^{ij} \partial_j u) \qquad \text{für } u \in C^2(\Omega).$$

Ist $\varphi : \tilde{\Omega} \to \Omega$ ein C^2-Diffeomorphismus, so definieren wir die durch φ auf $\tilde{\Omega}$ zurückgeholte Metrik durch

$$(\varphi^*(G))_{kl} := \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij} \circ \varphi\, \partial_k(\varphi_i)\, \partial_l(\varphi_j).$$

Zeigen Sie:

(i) Es gilt

$$\triangle_{\varphi^* G}(u \circ \varphi) = \triangle_G(u) \circ \varphi \qquad \text{auf } \tilde{\Omega}.$$

(ii) Ist $G := (g_{ij}) \in C^2(\bar{\Omega}, S^+(n))$, so existieren zu jedem $x_0 \in \Omega$ eine Umgebung $B_{\rho^*}(x_0) \subset\subset \Omega$ und ein C^2-Diffeomorphismus $\phi : B_{\rho^*}(x_0) \to U$ auf eine offene Teilmenge U des $\mathbb{R}^n$, sodass

$$\triangle_{(\phi^{-1})^* G}(y_k) = 0 \qquad \text{für } k = 1, \dots, n$$

auf U gilt.
Hinweise: zu (i): Multiplizieren Sie die behauptete Gleichung mit dem Produkt $|\det(D\varphi)|\ \sqrt{g} \circ \varphi\, v \circ \varphi$, für beliebiges $v \in C_0^2(\Omega)$, und verwenden Sie zweimal den Transformationssatz der Lebesgueschen Integrationstheorie.
Zu (ii): Verwenden Sie den folgenden Existenzsatz der Schaudertheorie, auf den wir in der Vorlesung zusteuern:

Theorem 0.1 (Existenz von klassischen Lösungen für das Dirichletproblem)
Es sei $\Omega \subset\subset \mathbb{R}^n$ *offen,* $\partial\Omega \in C^{2,\alpha}, 0 < \alpha < 1,$ L *ein linearer, elliptischer Differentialoperator, der (7.1) - (7.3) auf* Ω *erfüllt,* $c \leq 0, \varphi \in C^{2,\alpha}(\Omega)$ *und* $f \in C^{0,\alpha}(\Omega)$.

Dann existiert eine eindeutige Lösung $u \in C^{2,\alpha}(\Omega)$ *des Dirichletproblems*

$$\begin{aligned} Lu &= f \quad \textit{in } \Omega, \\ u &= \varphi \quad \textit{auf } \partial\Omega \end{aligned} \tag{1}$$

und diese erfüllt

$$\| u \|_{C^{2,\alpha}(\Omega)} \leq C(\Omega, \Lambda, n, \alpha)(\| f \|_{C^{0,\alpha}(\Omega)} + \| \varphi \|_{C^{2,\alpha}(\Omega)}). \tag{2}$$

Zeigen Sie, dass Sie diesen Satz für den ausdifferenzierten Beltrami-Laplace-Operator $\triangle_G$ auf jedem hinreichend kleinen Ball $B_\rho(0)$, mit $f = 0$ und $\varphi(x) := x_k$, $k = 1, \ldots, n$, verwenden können, und benutzen Sie die a-priori-Abschätzungen (2), um zu beweisen, dass sich die n soeben gewonnenen Lösungen $\phi_{1,\rho}, \phi_{2,\rho}, \ldots, \phi_{n,\rho}$, zu einer C^2-Abbildung zusammensetzen lassen, deren Jacobi-Matrix in $x_0 = 0$ für sehr kleines ρ nahe an I_n liegt.

AUFGABE 7:

Beweisen Sie mittels des Vorgehens im Beweis von Proposition 7.4 die folgende Aussage:

Proposition 0.1 *Es seien* $u \in C^{1,\alpha}_{loc}(\overline{\mathbb{R}^n_+})$, $f \in L^p(\mathbb{R}^n_+, \mathbb{R})$, $g : \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}^n$, $0 < \alpha < 1$, $\alpha = 1 - \frac{n}{p}$, *für ein* $p \in (n, \infty)$, *mit* $h\ddot{o}l_{\alpha,\mathbb{R}^n_+}(g) < \infty$, *und* u *sei eine schwache Lösung von*

$$\triangle(u) = f + div(g) \qquad \text{schwach in } \mathbb{R}^n_+$$

mit $u = 0$ *auf* $\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}$. *Dann existiert eine Konstante* $C(n, \alpha)$, *für die*

$$h\ddot{o}l_{\alpha,\mathbb{R}^n_+}(\nabla u) \leq C(n, \alpha)(\| f \|_{L^p(\mathbb{R}^n_+)} + h\ddot{o}l_{\alpha,\mathbb{R}^n_+}(g))$$

gilt.

Hinweis: Machen Sie wieder die Fallunterscheidung wie im Beweis von Proposition 7.4, beachten Sie, dass „$\triangle(u) = f + div(g)$ schwach in $\mathbb{R}^n_+$"

$$-\int_{\mathbb{R}^n_+} \nabla u \cdot \nabla \varphi \, d\mathcal{L}^n = \int_{\mathbb{R}^n_+} f\varphi - g_i \, \partial_i \varphi \, d\mathcal{L}^n \quad \text{für alle } \varphi \in W^{1,2}_0(\mathbb{R}^n_+)$$

bedeutet, verwenden Sie in beiden Fällen das Lemma von Weyl und im schwierigen Fall ausserdem den folgenden Schauder-Regularitätssatz:

Theorem 0.2 *Es sei* $\Omega \subset\subset \mathbb{R}^n$ *offen, mit* $C^{2,\alpha}$ *-Rand und* $f \in C^{0,\alpha}(\Omega)$. *Ist* $u \in C^2_{loc}(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ *eine Lösung von*

$$\triangle u = f \quad \textit{in } \Omega$$

mit

$$u = \varphi \quad \textit{auf } \partial\Omega$$

für ein $\varphi \in C^{2,\alpha}(\Omega)$. *Dann gilt bereits* $u \in C^{2,\alpha}(\Omega)$.

Abgabetermin ist Montag, der 04.05.2015.