Universität Tübingen
Fachbereich Mathematik

PD Dr. Ruben Jakob 04.05.2015

Nichtlineare partielle Differentialgleichungen
SS 2015
4. Übungsblatt

AUFGABE 8:

Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ eine offene Menge. Wie in Aufgabe 6 nennen wir eine Abbildung $G := (g_{ij}) : \Omega \to S^+(2)$ in die Menge der positiv-definiten, symmetrischen (2×2)-Matrizen eine Metrik auf Ω, und wir nennen für jedes $\lambda > 0$ aus $C^1(\Omega)$ das Produkt λG eine zu G konforme Metrik. Weiterin definieren wir wie in Aufgabe 6 zu jeder C^1-Metrik G den Beltrami-Laplace-Operator $\triangle_G$ durch

$$\triangle_G(u) := \frac{1}{\sqrt{g}} \partial_i(\sqrt{g}\, g^{ij} \partial_j u) \qquad \text{für } u \in C^2(\Omega).$$

Zeigen Sie:

(i) Es gilt für jede C^1-Metrik G und jedes $\lambda > 0$ aus $C^1(\Omega)$:

$$\triangle_{\lambda G}(u) = \lambda^{-1} \triangle_G(u) \qquad \text{für jedes } u \in C^2(\Omega).$$

(ii) Ist $G := (g_{ij}) \in C^2(\bar{\Omega}, S^+(2))$, so existieren zu jedem $x_0 \in \Omega$ eine Umgebung $B_{\rho^*}(x_0) \subset\subset \Omega$ und ein $C^{2,\alpha}$-Diffeomorphismus $\phi : B_{\rho^*}(x_0) \to U$ auf eine offene Teilmenge U des $\mathbb{R}^2$, sodass

$$(\phi^{-1})^* G = \lambda\, I_2 \qquad \text{auf } U$$

für eine auf U positive $C^{1,\alpha}$-Funktion λ gilt, also dass insbesondere die durch ϕ^{-1} auf U zurückgezogene Metrik zur euklidischen Metrik konform ist.

(iii)* Sei nun ausserdem u eine auf einem kleinen Ball $B_\epsilon(0)$ harmonische Funktion, also einfach mit $\partial_{11} u + \partial_{22} u = 0$ auf $B_\epsilon(0)$, und das Definitionsgebiet Ω der glatten Metrik G enthalte den Ursprung 0. Können Sie nun aus einem Resultat von Aufgabe 6 und den Punkten (i) und (ii) dieser Aufgabe schliessen, dass es einen $C^{2,\alpha}$-Diffeomorphismus ϕ auf einem winzigen Ball $B_{\rho^*}(0)$ gibt, der diesen auf eine Teilmenge U von $B_\epsilon(0)$ abbildet und sodass u auch bezüglich der zurückgezogenen Metrik $(\phi^{-1})^* G$ auf U harmonisch ist ?

Hinweis zu (ii): Verwenden Sie ein Zwischenresultat von Aufgabe 6, um die Existenz einer G-harmonischen $C^{2,\alpha}-$Funktion u auf einem kleinen Ball $B_\rho(x_0)$ um OBDA $x_0 = 0$ mit

$\nabla u(x_0) \neq 0$ zu garantieren, führen Sie auf $B_\rho(x_0)$ eine weitere $C^{2,\alpha}-$Funktion v ein, deren Ableitungen sich durch

$$\partial_k v = (-1)^k \sqrt{g} \sum_{l=1}^{2} g^{3-k,l} \, \partial_l u$$

aus den Ableitungen von u berechnen lassen (denken Sie an Funktionentheorie ! Hier ist $n = 2$!) und testen Sie, ob die Abbildung $\phi := (u, v)$ die gewünschten Eigenschaften hat.

<u>AUFGABE 9:</u>
Beweisen Sie mittels Satz 7.5 der Vorlesung:

Proposition 0.1 *(Boot strap) Es seien* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *offen,* $(a_{ij}) : \mathbb{R}^n \to S^+(n)$ *eine* $C^\infty-$*glatte Abbildung in die Menge der positiv-definiten, symmetrischen* $(n \times n)$*-Matrizen und* $f \in C^\infty(\mathbb{R})$. *Ist* $u \in C^2_{loc}(\Omega)$ *eine Lösung der quasi-linearen Differentialgleichung 2. Ordnung*

$$a_{ij}(\nabla u) \, \partial_{ij} u = f(u) \qquad \textit{auf } \Omega,$$

so ist diese bereits aus $C^\infty_{loc}(\Omega)$.

Abgabetermin ist Montag, der 11.05.2015.