Universität Tübingen
Fachbereich Mathematik

PD Dr. Ruben Jakob 13.05.2015

Nichtlineare partielle Differentialgleichungen
SS 2015
5. Übungsblatt

AUFGABE 10:

Wie in der Vorlesung definieren wir die ,,normale Abbildung"

$$\chi_u(x) := \{b \in \mathbb{R}^n \mid u(y) \leq u(x) + \langle b, y - x\rangle \quad \forall y \in \Omega\}$$

einer beliebigen, auf einer offenen Menge Ω stetigen Funktion u. Zeigen Sie:

(i) Es gilt genau dann $\chi_u(x) \neq \emptyset$, falls $x \in \Gamma_u^+(\Omega)$ ist, und für $x \in \Gamma_u^+(\Omega)$ gilt

$$\chi_u(x) = \{\nabla u(x)\},$$

falls u im Punkt x klassisch differenzierbar ist.

(ii) Die Kontaktmenge $\Gamma_u^+ \equiv \Gamma_u^+(\Omega)$ einer beliebigen, auf Ω stetigen Funktion u ist eine abgeschlossene Teilmenge von Ω, und für eine beliebige, beschränkte offene Teilmenge $\Omega' \subset\subset \Omega$ ist das Bild $\chi_u(\overline{\Omega'})$ eine kompakte Teilmenge des $\mathbb{R}^n$.

(iii) Zeigen Sie, dass die Hesse-Matrix $D^2u(x)$ in einem Punkt $x \in \Gamma_u^+(\Omega)$ negativ-semidefinit ist, falls u in einer Umgebung des Punktes x zweifach stetig differenzierbar ist.

AUFGABE 11:

Zeigen Sie, dass die normale Abbildung χ_u der Funktion

$$u(y) := a\left(1 - \frac{\mid y - z \mid}{R}\right) \qquad \text{für} \quad y \in B_R(z)$$

[deren Graph der über der Basis $B_R(z)$ errichtete Kegel mit Höhe a und Spitze (z, a) ist] explizit durch

$$\chi_u(x) = \begin{cases} -\frac{a}{R}\frac{x-z}{|x-z|} & \text{falls} \quad x \neq z, \\ \overline{B_{a/R}(0)} & \text{falls} \quad x = z\ , \end{cases}$$

gegeben ist. Welche Teilmenge von $B_R(z)$ ist somit Γ_u^+ ?

Abgabetermin ist Mittwoch, der 20.05.2015.