Universität Tübingen
Fachbereich Mathematik

PD Dr. Ruben Jakob 20.05.2015

Nichtlineare partielle Differentialgleichungen
SS 2015
6. Übungsblatt

AUFGABE 12:

Wie im Beweis des Alexandroff'schen Maximum-Prinzips betrachten wir zu fixiertem $\mu > 0$ die stetige, nicht-negative Funktion

$$g(p) := \| (p, \mu) \|_{n/(n-1)}^{-n} = (|p|^{\frac{n}{n-1}} + |\mu|^{\frac{n}{n-1}})^{1-n}$$

für $n > 1$. Zeigen Sie:

(i)

$$g(p) \geq 2^{2-n}(|p|^n + \mu^n)^{-1},$$

und versuchen Sie dies für eine Abschätzung von $\int_{B_M(0)} g \, d\mathcal{L}^n$, für einen beliebigen Ball $B_M(0)$, nach unten (!) zu nutzen, also für eine Abschätzung der Form

$$\int_{B_M(0)} g \, d\mathcal{L}^n \geq f(M, \mu, n) > 0.$$

(ii)* Können Sie eine bessere Abschätzung für $\int_{B_M(0)} g \, d\mathcal{L}^n$ angeben, also eine von f verschiedene Funktion $\tilde{f} : \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{N}_{>1} \to \mathbb{R}_{>0}$ angeben, die

$$\int_{B_M(0)} g \, d\mathcal{L}^n \geq \tilde{f}(M, \mu, n) \geq f(M, \mu, n)$$

$\forall (M, \mu, n) \in \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{N}_{>1}$ erfüllt ? Oder können Sie sogar g direkt über $B_M(0)$ integrieren ?

AUFGABE 13:

Wir betrachten den Operator $L := a_{ij} \, \partial_{ij}$ mit den Koeffizienten

$$a_{ij}(x) := \delta_{ij} + \left(\frac{n-1}{1-\lambda} - 1 \right) \frac{x_i x_j}{|x|^2}$$

für ein festes, beliebiges $\lambda \in (0,1) \cup (1,2)$ und ein $n \geq 2$.

(i) Ist L für jedes $\lambda \in (0,1) \cup (1,2)$ oder für nur gewisse $\lambda \in (0,1)$ ein elliptischer Differential-Operator 2. Ordnung auf $\Omega := B_1(0)$ im Sinne der Schaudertheorie ? Oder erfüllt L wenigstens für jedes $\lambda \in (0,1)$ die Voraussetzungen (8.1), (8.2) des Alexandroff'schen Maximumprinzips auf $B_1(0)$?

(ii) Zeigen Sie, dass das Dirichletproblem

$$\begin{aligned} \Delta u + \Big(\frac{n-1}{1-\lambda} - 1\Big) \frac{x_i x_j}{|x|^2}\, \partial_{ij} u = 0 \quad &\text{in } B_1(0), \\ u = 0 \quad &\text{auf } \partial B_1(0), \end{aligned} \tag{1}$$

ausser der trivialen Lösung noch die Lösung $v^\lambda(x) = 1 - |x|^\lambda$ auf $B_1(0)$ hat. Zeigen Sie, dass $v^\lambda \in W^{2,p}(B_1(0))$ für (mindestens) jedes

$$p < \frac{n}{2-\lambda}$$

gilt, für jedes $\lambda \in (0,2)$. Ist es möglich, dass eine Funktion $x \mapsto |x|^\lambda$ für ein $\lambda \in (0,1)$ sogar in $W^{2,n}(B_1(0))$ enthalten ist ?

(iii) Zeigen Sie, dass das Alexandroff'sche Maximumprinzip nicht (!) durch eine Abschätzung der Form

$$\sup_\Omega u \le \sup_{\partial\Omega} u_+ + C(\Lambda, n)\ diam\ \Omega \parallel f_-/\mathcal{D}^* \parallel_{L^p(\Omega)}$$

unter der etwas schwächeren Voraussetzung $f/\mathcal{D}^* \in L^p(\Omega)$ für irgendein $p \in (n/2, n)$ (anstatt $f/\mathcal{D}^* \in L^n(\Omega)$) für klassische und beliebig glatte Lösungen $u \in C^\infty(\overline{\Omega})$ von $Lu = f$ auf Ω verbessert werden kann. Wählen Sie hierfür ein $\lambda \in (2 - \frac{n}{p}, 1)$ und approximieren Sie die Funktion $v^\lambda(x) = 1 - |x|^\lambda$ durch glatte Funktionen $v_m \in C^\infty(\overline{B_1(0)})$ in $W^{2,p}(B_1(0))$, wie in Proposition 5.19 der Vorlesung, und beachten Sie hierbei, dass $W^{2,p}(B_1(0))$ in $C^0(\overline{B_1(0)})$ für $2 - \frac{n}{p} > 0$ stetig einbettet !

(iv) Nach Punkt (ii) ist die Funktion $v^\lambda(x) = 1 - |x|^\lambda$ für $\lambda \in (1,2)$ in $W^{2,n}(B_1(0))$ enthalten und löst auch das Dirichlet-Problem (1). Liefern diese beiden Tatsachen keinen Widerspruch zur Aussage des Alexandroff'schen Maximumprinzips ?

AUFGABE 14:

Ist die Abschätzung

$$\sup_\Omega u \le \frac{diam\ \Omega}{\omega_n^{1/n}} \Big(\int_{\Gamma_u^+ \cap [u>0]} |\det(D^2 u)|\, d\mathcal{L}^n \Big)^{1/n} \tag{2}$$

für Funktionen $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ mit $\sup_{\partial\Omega} u_+ = 0$ aus dem Beweis von Proposition 8.2 optimal ? Testen Sie die Schärfe von Abschätzung (2) mittels der zulässigen Funktion $u(x) := \sqrt{1 - |x|^2}$ auf $\Omega := B_1^n(0)$!

Abgabetermin ist Montag, der 01.06.2015.