Universität Tübingen
Fachbereich Mathematik

PD Dr. Ruben Jakob 08.06.2015

Nichtlineare partielle Differentialgleichungen
SS 2015
7. Übungsblatt

**AUFGABE 15:**

Für jedes $n \geq 2$ betrachten wir die Funktion

$$u(x) := \log(1 + |\log|x||) \quad \text{für } x \in B_1^n(0) \setminus \{0\} \subset \mathbb{R}^n.$$

Zeigen Sie:

(i)

$$u \in W^{1,n}(B_1^n(0)) \setminus L^\infty(B_1^n(0)),$$

für jedes $n \geq 2$ .

(ii) Berechnen Sie desweiteren $\triangle u$ mittels der Formel aus Aufgabe 5 des letzten Semesters für rotationssymmetrische Funktionen, die sich hier im Spezialfall $n = 2$ zur einfachen Formel

$$\triangle u(x) = -\frac{1}{|x|^2 \, (1 - \log(|x|))^2}, \quad \text{für } x \in B_1^2(0) \setminus \{0\}$$

reduziert. Schliessen Sie hieraus desweiteren: $\triangle u \in L^1(B_1^2(0))$.

(iii) Zeigen Sie mittels der Greenschen Darstellungsformel:

$$(u - N(\triangle u))(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\partial B_1^2(0)} \log(|x - y|) \, d\mathcal{H}^1(y) \quad \text{für } x \in B_1^2(0) \setminus \{0\}$$

und schliessen Sie hieraus und mittels Aufgabe 7 des letzten Semesters, dass $u - N(\triangle u)$ zu einer auf ganz $B_1^2(0)$ harmonischen Funktion eindeutig fortgesetzt werden kann. Kombinieren Sie dies mit der Existenz der Einbettung $W^{2,1}(B_1^2(0)) \hookrightarrow L^\infty(B_1^2(0))$, um $N(\triangle u) \notin W^{2,1}(B_1^2(0))$ (per Widerspruch) zu zeigen.

**AUFGABE 16:**

Zeigen Sie mittels Aufgabe 15 und Proposition 5.9 der Vorlesung:

(i) Es kann keine Konstante $C > 0$ geben, mit welcher

$$\| \, D^2 N(f) \, \|_{L^1(B_1^2(0))} \leq C \, \| \, f \, \|_{L^1(B_1^2(0))}$$

für alle $f \in C_0^\infty(B_1^2(0))$ erfüllt ist.

(ii) Schliessen Sie hieraus mittels eines Tricks aus dem Beweis von Lemma 8.6, dass es ebenfalls keine Konstante $C > 0$ geben kann, mit welcher

$$\| D^2 N(f) \|_{L^\infty(B_1^2(0))} \leq C \ \| f \|_{L^\infty(B_1^2(0))}$$

für alle $f \in C_0^\infty(B_1^2(0))$ erfüllt ist.

(iii) Folgern Sie hieraus und aus dem "Closed-graph-Theorem", dass es eine auf $\overline{B_1^2(0)}$ stetige Funktion $f$ geben muss, für die $N(f) \notin W^{2,\infty}(B_1^2(0))$ gilt.

(iv)* Schliessen Sie hieraus wiederum, dass es zu jedem $p \in [1, \infty)$ eine Funktion $u \in W^{2,p}(B_1^2(0)) \setminus W^{2,\infty}(B_1^2(0))$ gibt, deren Laplace $\triangle u$ eine auf $\overline{B_1^2(0)}$ stetige Funktion ist.

*Abgabetermin ist Montag, der 15.06.2015.*