Universität Tübingen
Fachbereich Mathematik

PD Dr. Ruben Jakob 17.06.2015

Nichtlineare partielle Differentialgleichungen
SS 2015
8. Übungsblatt

AUFGABE 17:

Wir betrachten (als Zusatz zur Existenz-Aussage aus Aufgabe 16, (iv)) auf der Einheitskreisscheibe die Funktion

$$u(r\,e^{i\varphi}) \equiv \tilde{u}(r,\varphi) = r^2 \log(r)\, \cos(2\varphi) \quad \text{für } r \in (0,1), \varphi \in [0,2\pi).$$

Zeigen Sie durch explizite Rechnungen:

(i) dass dies eine Funktion aus $W^{2,p}(B_1^2(0)) \setminus W^{2,\infty}(B_1^2(0))$ ist

(ii) und dass deren Laplace $\triangle u$ immerhin in $L^\infty(B_1^2(0))$ liegt. Benutzen Sie für diese Rechnung die praktische Formel:

$$(\triangle u)(r\,e^{i\varphi}) = \frac{1}{r}\,\partial_r(r\partial_r\tilde{u})(r,\varphi) + \frac{1}{r^2}\,\partial_{\varphi\varphi}\tilde{u}(r,\varphi).$$

Ist $\triangle u$ sogar auf $\overline{B_1^2(0)}$ stetig, wie der Laplace der Funktion aus Aufgabe 16, (iv) ?

AUFGABE 18:

Zeigen Sie die folgende Variante des Marcinkiewics-Interpolationssatzes:
Es seien $1 \leq q < p < \infty$ und $1 \leq \bar{q} < \bar{p} < \infty$ mit der Bedingung "$q \leq \bar{q}$ und $p \leq \bar{p}$" beliebig vorgegeben, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ $\mathcal{L}^n-$messbar und

$$T : L^q(\Omega) \cap L^p(\Omega) \to L^{\bar{q}}(\Omega) \cap L^{\bar{p}}(\Omega)$$

ein linearer Operator, der

$$\mathcal{L}^n(|Tf| > t) \leq \Big(\frac{T_q \parallel f \parallel_{L^q(\Omega)}}{t}\Big)^{\bar{q}},$$

$$\mathcal{L}^n(|Tf| > t) \leq \Big(\frac{T_p \parallel f \parallel_{L^p(\Omega)}}{t}\Big)^{\bar{p}} \quad \text{für alle } t > 0$$

und für alle $f \in L^q(\Omega) \cap L^p(\Omega)$ erfülle. Zu jedem $\bar{r} \in (\bar{q},\bar{p})$ definieren wir die Zahl $\alpha := \frac{\bar{q}\bar{p}-\bar{q}\bar{r}}{\bar{r}(\bar{p}-\bar{q})} \in (0,1)$, welche gerade

$$\frac{1}{\bar{r}} = \frac{\alpha}{\bar{q}} + \frac{1-\alpha}{\bar{p}}$$

erfüllt.
Zeigen Sie, dass sich T für dasjenige $r \in (q,p)$, welches im gleichen Verhältnis (wie $\bar{r}$) zwischen q und p liegt, d.h. welches

$$\frac{1}{r} = \frac{\alpha}{q} + \frac{1-\alpha}{p}$$

erfüllt, (eindeutig) zu einem stetigen, linearen Operator von $L^r(\Omega)$ nach $L^{\bar{r}}(\Omega)$ fortsetzen lässt, dessen entsprechende Operator-Norm durch

$$\| T \| \leq \frac{c}{\alpha\,(1-\alpha)} \max\{T_q, T_p\}$$

mit einer nur von $q, p, \bar{q}, \bar{p}, r$ und $\bar{r}$ abhängigen Konstanten c beschränkt ist.
Verwenden Sie hierfür

(i) die Hardy-Littlewood-Ungleichungen:

$$\Big[\int_0^\infty \Big(t^{\lambda-1}\int_0^t \psi(s)\,ds\Big)^r \frac{1}{t}\,dt\Big]^{1/r} \leq \frac{1}{1-\lambda}\Big[\int_0^\infty (t^\lambda\,\psi(t))^r\,\frac{1}{t}\,dt\Big]^{1/r},$$
$$\Big[\int_0^\infty \Big(t^{1-\lambda}\int_t^\infty \psi(s)\,\frac{1}{s}\,ds\Big)^r \frac{1}{t}\,dt\Big]^{1/r} \leq \frac{1}{1-\lambda}\Big[\int_0^\infty (t^{1-\lambda}\,\psi(t))^r\,\frac{1}{t}\,dt\Big]^{1/r}$$

für eine beliebige nicht-negative, Lebesgue-messbare Funktion ψ auf $(0,\infty)$ und für beliebig fixierte $\lambda < 1$ und $r \in [1,\infty)$,

(ii) dass ein beliebiger Lorentz-Raum $L^{p,q}$ in einen Lorentz-Raum $L^{p,q'}$ stetig einbettet, falls $q \leq q'$ ist

(iii) und dass gerade $L^{p,p} = L^p$ für jedes $p \geq 1$ gilt.

Abgabetermin ist Montag, der 29.06.2015.