Universität Tübingen
Fachbereich Mathematik

PD Dr. Ruben Jakob 29.06.2015

Nichtlineare partielle Differentialgleichungen
SS 2015
9. Übungsblatt

AUFGABE 19:

Es sei $\Omega \subset\subset \mathbb{R}^n$ offen mit $C^{1,1}-$Rand, L ein linearer, elliptischer Differentialoperator in Nicht-Divergenzform

$$Lu := a_{ij}\partial_{ij}u + b_i\partial_i u + cu$$

mit

$$\| a_{ij}, b_i, c \|_{L^\infty(\Omega)} \leq \Lambda,$$

$(a_{ij})_{ij}$ symmetrisch und stetig auf $\overline{\Omega}$. Desweiteren nehmen wir

$$a_{ij}(x)\xi_i\xi_j > 0 \quad \text{für alle } x \in \bar{\Omega} \text{ und für alle } \xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$$

und $c \leq 0$ auf Ω an. Zeigen Sie, dass es zu jedem $\varphi \in C^0(\partial\Omega)$ und jedem $f \in L^p(\Omega)$ mit $p > n/2$, ein $u \in W^{2,p}_{loc}(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$ gibt, welches das Randwertproblem

$$Lu = f \quad \mathcal{L}^n - \text{fast überall in } \Omega,$$

$$u = \varphi \quad \text{auf } \partial\Omega$$

löst.
Hinweis: Beachten Sie, dass dieses Resultat nicht aus dem Existenzsatz 8.7 der Vorlesung gefolgert werden kann, aber dass man zumindest jede auf $\partial\Omega$ vorgelegte stetige Funktion auf den gesamten $\mathbb{R}^n$ stetig fortsetzen kann und dann diese Fortsetzung auf einem beliebig grossen Ball durch $C^\infty-$Funktionen φ_ϵ gleichmässig approximieren kann. Versuchen Sie anschliessend mittels Sätzen aus der L^p-Theorie, jedoch auf keinen Fall mittels globaler L^p-Abschätzungen, zunächst eine Folge approximativer Lösungen und anschliessend eine vielversprechende Limes-Funktion in $W^{2,p}_{loc}(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$ zu ermitteln.

AUFGABE 20:

Wir definieren wie im Beweis der Harnack-Ungleichung für $\mu > 0$, $1, \mu \leq K < \infty$ die Funktion $\varphi_K : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ durch
(i)

$$\varphi_K(z) := \begin{cases} z^\beta - \mu^\beta & \text{für } 0 \leq z \leq K, \\ \beta K^{\beta-1}z - (\beta-1)K^\beta - \mu^\beta & \text{für } z \geq K, \end{cases}$$

für $\beta > 1$,

(ii) durch

$$\varphi_K(z) := \varphi(z) := z^\beta - \mu^\beta$$

für $0 < \beta \leq 1$ und

(iii) durch

$$\varphi_K(z) := \varphi(z) := z^\beta$$

für $\beta < 0$.

Zeigen Sie:

(i) dass φ_K zumindest für $\beta > 1$ in $C^1([0,\infty))$ liegt, jedoch für $\beta < 1$ nur in $C^1((0,\infty))$

(ii) und dass die Ungleichungen

$$0 \leq sgn(\beta)\varphi_K'(z) \leq |\beta| \max(\mu^{\beta-1}, K^{\beta-1}) < \infty \quad \text{für } z \geq \mu,$$

$$0 \leq \varphi_K(z) \leq (1 + |\beta|^{-1})|\varphi_K'(z)|z \quad \text{für } z \geq \mu$$

für jedes $\beta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ gelten. ($K \geq \mu$ beachten !)

(iii) Für jedes $u \in W^{1,2}(B_2(0))$ erfüllt die abgeschnittene und verschobene Funktion $\bar{u} := u_+ + \mu$:

$$\varphi_K(\bar{u}) = 0 \quad \text{auf } [u \leq 0],$$

falls $\beta > 0$ ist, jedoch nicht, falls $\beta < 0$.

(iv) Schliessen Sie schliesslich aus den Teilen (i) und (ii), dass für jedes $\beta \neq 0$ und jedes $u \in W^{1,2}(B_2(0))$ die Verkettung $\varphi_K(\bar{u})$ wieder in $W^{1,2}(B_2(0))$ liegt, indem Sie den Beweis von Proposition 5.15 analysieren und der vorliegenden Situation anpassen.

Abgabetermin ist Mittwoch, der 08.07.2015.