Lineare partielle Differentialgleichungen, Teile I+II

Reiner Schätzle, Ruben Jakob
Wintersemester 2014/15 und Sommersemester 2015
Universität Tübingen

Inhaltsverzeichnis

Teil I
Vorbereitungen

1 Typen von partiellen Differentialgleichungen

1.1 Allgemeine partielle Differentialgleichungen

Eine partielle Differentialgleichung ist eine Gleichung für eine unbekannte Funktion mehrerer Veränderlicher und ihren partiellen Ableitungen.

Definition 1.1 *Ein Ausdruck der Form*

$$F(D^k u, D^{k-1}u, \dots u, x) = 0 \quad \textit{für } x \in \Omega \tag{1.1}$$

mit $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ *offen,*

$$F : \mathbb{R}^{n^k} \times \mathbb{R}^{n^{k-1}} \times \ldots \times \mathbb{R} \times \Omega \to \mathbb{R}$$

gegeben und $u : \Omega \to \mathbb{R}$ *unbekannt, heißt eine partielle Differentialgleichung* $k-$*ter Ordnung.*

(1.1) heißt linear, falls es von der Form

$$\sum_{|\gamma| \leq k} a_\gamma(x)\partial^\gamma u = f(x)$$

ist.

(1.1) heißt semi-linear, falls es von der Form

$$\sum_{|\gamma|=k} a_\gamma(x)\partial^\gamma u + a_0(D^{k-1}u, \dots, u, x) = 0$$

ist.

(1.1) heißt quasi-linear, falls es von der Form

$$\sum_{|\gamma|=k} a_\gamma(D^{k-1}u, \dots, u, x)\partial^\gamma u + a_0(D^{k-1}u, \dots, u, x) = 0$$

ist.

(1.1) heißt voll nicht-linear, falls (1.1) nichtlinear von den Ableitungen höchster Ordnung abhängt.

Bildet $u : \Omega \to \mathbb{R}^m$ *und* $F : \mathbb{R}^{n^k \cdot m} \times \mathbb{R}^{n^{k-1} \cdot m} \times \ldots \times \mathbb{R} \times \Omega \to \mathbb{R}^l$ *ab, so heißt (1.1) ein System partieller Differentialgleichungen.*

$\square$

Beispiele:

(i) Lineare Gleichungen

1.Laplace-Gleichung

$$\Delta u := \sum_{i=1}^{n} \partial_{ii} u = 0$$

oder Poisson-Gleichung

$$\Delta u = f$$

oder lineare elliptische Gleichung

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \partial_{ij} u + \sum_{i=1}^{n} b_i \partial_i u + cu = f \quad \text{mit } (a_{ij}) > 0.$$

2.Lineare Transport-Gleichung bzw. lineare hyperbolische Gleichung

$$\partial_t u - \sum_{i=1}^{n} b_i \partial_i u = 0.$$

3.Wärmeleitungsgleichung

$$\partial_t u - \Delta u = 0$$

oder lineare parabolische Gleichung

$$\partial_t u - \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \partial_{ij} u - \sum_{i=1}^{n} b_i \partial_i u - cu = f \quad \text{mit } (a_{ij}) > 0.$$

4.Wellengleichung

$$\partial_{tt} u - \Delta u = 0.$$

(ii) Nichtlineare Gleichungen

1.Nichtlineare Laplace-Gleichung

$$\Delta u = f(u)$$

oder quasi-lineare elliptische Gleichung

$$a_{ij}(., u, \nabla u) \partial_{ij} u + b(., u, \nabla u) = 0 \quad \text{mit } (a_{ij}) > 0.$$

2. $p-$Laplace-Gleichung

$$div(|\nabla u|^{p-2} \nabla u) = 0.$$

3.Minimalflächengleichung

$$div(\frac{\nabla u}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}}) = 0.$$

4.Monge-Ampère-Gleichung

$$\det(D^2 u) = f.$$

5.Pucci-Gleichung

$$\mathcal{M}^+_{\lambda,\Lambda}(D^2u) := \Lambda \sum_{\sigma_i>0} \sigma_i + \lambda \sum_{\sigma_i<0} \sigma_i = f,$$
$$\mathcal{M}^-_{\lambda,\Lambda}(D^2u) := \lambda \sum_{\sigma_i>0} \sigma_i + \Lambda \sum_{\sigma_i<0} \sigma_i = f,$$

wobei $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ die Eigenwerte von D^2u entsprechend ihrer Vielfachheit sind und $0 < \lambda \leq \Lambda < \infty$. $\mathcal{M}^{\pm}_{\lambda,\Lambda}$ heißen Pucci-Operatoren.

6.Hamilton-Jacobi-Gleichung

$$\partial_t u + H(\nabla u, x) = 0.$$

7.Skalare Erhaltungsgleichung bzw. nicht-lineare hyperbolische Gleichung

$$\partial_t u + div\ \mathbf{F}(u) = 0.$$

8.Skalare Reaktions-Diffusions-Gleichung

$$\partial_t u - \Delta u = f(u)$$

oder quasi-lineare parabolische Gleichung

$$\partial_t u - a_{ij}(., u, \nabla u)\partial_{ij}u - b(., u, \nabla u) = 0 \quad \text{mit } (a_{ij}) > 0.$$

9.Poröse Medium-Gleichung

$$\partial_t u - \Delta(u^\gamma) = 0.$$

10.Nicht-lineare Wellengleichung

$$\partial_{tt} u - \Delta u = f(u),$$
$$\partial_{tt} u - div\ a(\nabla u) = 0.$$

(iii) Spezielle Gleichungen und Systeme

1.Schrödinger-Gleichung

$$i\partial_t u + \Delta u = 0.$$

2.Korteweg-deVries-Gleichung

$$\partial_t u + u\partial_x u + \partial_{xxx} u = 0.$$

3.Maxwell'sche Gleichungen im Vakuum ohne Strom

$$\partial_t \vec{\mathbf{E}} = rot\ \vec{\mathbf{B}},$$
$$\partial_t \vec{\mathbf{B}} = -rot\ \vec{\mathbf{E}},$$
$$div\ \vec{\mathbf{B}} = div\ \vec{\mathbf{E}} = 0.$$

4.System von Erhaltungsgleichungen

$$\partial_t \mathbf{u} + div\ \mathbf{F}(\mathbf{u}) = 0.$$

5.System von Reaktions-Diffusions-Gleichungen

$$\partial_t \mathbf{u} - \Delta \mathbf{u} = \mathbf{f}(\mathbf{u}).$$

6.Euler-Gleichung für inkompressible, invicid Flüssigkeiten

$$\partial_t u + u\nabla u = -\nabla p,$$
$$div\ u = 0.$$

7.Navier-Stokes-Gleichung für inkompressible, viskose Flüssigkeiten

$$\partial_t u + u\nabla u - \Delta u = -\nabla p,$$
$$div\ u = 0.$$

Meistens tritt eine partielle Differentialgleichung oder System zusammen mit Randwerten auf. Die zentralen Fragen zu partiellen Differentialgleichung bzw. Randwertproblemen sind

- Existenz von Lösungen,
- Eindeutigkeit der Lösungen,
- Stetige Abhängigkeit der Lösung von den gegebenen Daten.

Nur in sehr wenigen Spezialfällen kann man Lösungen durch explizite Formeln darstellen. Daher sind die Existenzresultate meist von abstrakter Natur.

Darüberhinaus ist es oft schwierig, Existenz von klassischen Lösungen zu zeigen, d.h. von Lösungen mit stetigen partiellen Ableitungen bis zur Ordnung der Differentialgleichung.

Stattdessen wird zuerst Existenz sogenannter schwacher Lösungen gezeigt. Für die Laplace-Gleichung kann man klassische Lösungen $u \in C^2(\Omega)$ suchen, die

$$\Delta u = 0 \quad \text{in } \Omega \tag{1.2}$$

erfüllen, oder schwache Lösungen $u \in L^1_{loc}(\Omega)$, die

$$\int_\Omega u\Delta\varphi = 0 \tag{1.3}$$

für alle zweifach stetig differenzierbaren Funktionen φ mit kompaktem Träger in Ω .

An eine solche schwache Existenztheorie schließt sich eine Regularitätstheorie an, die zeigt, daß schwache Lösungen höhere Regularität besitzen, z.B. daß schwache Lösungen klassisch sind, oder im besten Fall, daß schwache Lösungen analytisch sind.

In obigem Beispiel zur Laplace-Gleichung besagt das Lemma von Weyl, Lemma 2.1, daß $u \in L^1_{loc}(\Omega)$, das (1.3) erfüllt, tatsächlich analytisch ist und (1.2) erfüllt.

1.2 Elliptische Gleichungen zweiter Ordnung

Der Hauptgegenstand unserer Darstellung sind elliptische Differentialgleichungen zweiter Ordnung.

Definition 1.2 *Eine partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung*

$$F(D^2u, \nabla u, u, x) = 0, \tag{1.4}$$

$F : S(n) \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \Omega \to \mathbb{R}, \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ *offen, wobei* $S(n) \subseteq \mathbb{R}^{n\times n}$ *die Menge der symmetrischen Matrizen bezeichnet, heißt elliptisch, wenn*

$$F(X, p, z, x) \geq F(Y, p, z, x) \quad \forall X \geq Y, p \in \mathbb{R}^n, z \in \mathbb{R}, x \in \Omega,$$

dabei meint $X \geq Y$ *, daß die symmetrische Matrix* $X - Y$ *nichtnegativ semi-definit ist.*
(1.4) heißt strikt elliptisch, falls

$$F(X, p, z, x) > F(Y, p, z, x) \quad \forall X \geq Y, X \neq Y, p \in \mathbb{R}^n, z \in \mathbb{R}, x \in \Omega,$$

andernfalls heißt (1.4) degeneriert elliptisch.
(1.4) heißt gleichmäßig elliptisch mit Elliptizitätskonstanten $0 < \lambda \leq \Lambda < \infty$ *, falls*

$$\lambda \parallel Y \parallel \leq F(X + Y, p, z, x) - F(X, p, z, x) \leq \Lambda \parallel Y \parallel$$

für alle $Y \geq 0, X \in S(n), p \in \mathbb{R}^n, z \in \mathbb{R}, x \in \Omega$ *mit* $\parallel Y \parallel := \sup_{|a|\leq 1} |Ya|$ *.*
Wir sagen auch, daß F *elliptisch, strikt elliptisch bzw. gleichmäßig elliptisch.*

□

Beispiele:

1. Die lineare partielle Differentialgleichung

$$a_{ij}(x)\partial_{ij}u + b_i(x)\partial_i u + c(x)u = f(x) \tag{1.5}$$

ist elliptisch genau dann, wenn

$$a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq 0 \quad \text{für alle } x \in \Omega, \xi \in \mathbb{R}^n.$$

(1.5) ist gleichmäßig elliptisch genau dann, wenn

$$\lambda I \leq (a_{ij}(x))_{ij} \leq \Lambda I \quad \text{für alle } x \in \Omega,$$

wobei $0 < \lambda \leq \Lambda < \infty$.

2. Die quasi-lineare partielle Differentialgleichung

$$a_{ij}(x, u, \nabla u)\partial_{ij}u + b(x, u, \nabla u) = 0. \tag{1.6}$$

ist elliptisch genau dann, wenn

$$a_{ij}(x, z, p)\xi_i\xi_j \geq 0 \quad \text{für alle } x \in \Omega, z \in \mathbb{R}, p \in \mathbb{R}^n, \xi \in \mathbb{R}^n.$$

(1.6) ist gleichmäßig elliptisch genau dann, wenn

$$\lambda I \leq (a_{ij}(x,z,p))_{ij} \leq \Lambda I \quad \text{für alle } x \in \Omega, z \in \mathbb{R}, p \in \mathbb{R}^n,$$

wobei $0 < \lambda \leq \Lambda < \infty$.

Z.B. gilt für die Minimalflächengleichung

$$div(\frac{\nabla u}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}}) = \frac{1}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}}\Big(\delta_{ij} - \frac{\partial_i u \partial_j u}{1+|\nabla u|^2}\Big)\partial_{ij} u = \partial_{ij} A(\nabla u)\partial_{ij} u, \qquad (1.7)$$

wobei $A(p) := \sqrt{1+|p|^2}$. Daher ist (1.7) strikt elliptisch und gleichmäßig elliptisch für beschränkte Gradienten. (1.7) ist aber nicht gleichmäßig elliptisch für beliebige Gradienten.

3. Jedes $Y \in S(n)$ können wir eindeutig als $Y = Y^+ - Y^-$ mit $Y^+, Y^- \geq 0, Y^+Y^- = 0$ schreiben. Ist F ist gleichmäßig elliptisch, so gilt $F(X+Y,\ldots) = F(X+Y^+ - Y^-,\ldots) \leq F(X - Y^-,\ldots) + \Lambda \parallel Y^+ \parallel \leq F(X,\ldots) + \Lambda \parallel Y^+ \parallel - \lambda \parallel Y^- \parallel$, also

$$F(X+Y,\ldots) \leq F(X,\ldots) + \Lambda \parallel Y^+ \parallel - \lambda \parallel Y^- \parallel . \qquad (1.8)$$

Umgekehrt folgt aus (1.8) folgt mit $Y \geq 0$, daß $F(X+Y,\ldots) - F(X,\ldots) \leq \Lambda \parallel Y \parallel$ und $F(X,\ldots) - F(X+Y,\ldots) = F(X+Y-Y,\ldots) - F(X+Y,\ldots) \leq -\lambda \parallel Y \parallel$, also $F(X+Y,\ldots) - F(X,\ldots) \geq \lambda \parallel Y \parallel$, und F ist gleichmäßig elliptisch.

4. Für die Pucci-Operatoren gilt

$$\begin{aligned} \mathcal{M}^-_{\lambda,\Lambda}(X) &\leq \mathcal{M}^+_{\lambda,\Lambda}(X), \\ \mathcal{M}^-_{\lambda',\Lambda'}(X) &\leq \mathcal{M}^-_{\lambda,\Lambda}(X) \quad \text{für } \lambda' \leq \lambda \leq \Lambda \leq \Lambda', \\ \mathcal{M}^+_{\lambda,\Lambda}(X) &\leq \mathcal{M}^+_{\lambda',\Lambda'}(X) \quad \text{für } \lambda' \leq \lambda \leq \Lambda \leq \Lambda', \\ \mathcal{M}^-_{\lambda,\Lambda}(X) &= -\mathcal{M}^+_{\lambda,\Lambda}(-X), \\ \mathcal{M}^\pm_{\lambda,\Lambda}(\alpha X) &= \alpha \mathcal{M}^\pm_{\lambda,\Lambda}(X) \quad \text{für } \alpha \geq 0, \end{aligned} \qquad (1.9)$$

$$\begin{aligned} \lambda \parallel Y \parallel &\leq \mathcal{M}^-_{\lambda,\Lambda}(Y) = \lambda tr(Y) \leq n\lambda \parallel Y \parallel \quad \text{für } Y \geq 0, \\ \Lambda \parallel Y \parallel &\leq \mathcal{M}^+_{\lambda,\Lambda}(Y) = \Lambda tr(Y) \leq n\Lambda \parallel Y \parallel \quad \text{für } Y \geq 0. \end{aligned} \qquad (1.10)$$

Beachten wir $tr(AB) \geq 0$ für $A, B \geq 0$, so erhalten wir für $\lambda I \leq A \leq \Lambda I$, daß $\lambda tr(X) \leq tr(AX) \leq \Lambda tr(X)$ für $X \geq 0$, also für beliebige $X \in S(n)$

$$tr(AX) = tr(AX^+) - tr(AX^-) \leq \Lambda tr(X^+) - \lambda tr(X^-) = \mathcal{M}^+_{\lambda,\Lambda}(X).$$

Wählen wir eine orthogonale Matrix O mit $O^TXO = diag(\sigma_1,\ldots,\sigma_n)$ und $A = Odiag(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)O^T$ mit $\lambda_i = \Lambda$ für $\sigma_i \geq 0$ und $\lambda_i = \lambda$ für $\sigma_i < 0$, so sehen wir $\lambda I \leq A \leq \Lambda I$ und

$$tr(AX) = tr\Big(Odiag(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)O^T Odiag(\sigma_1,\ldots,\sigma_n)O^T\Big) =$$

$$= tr\Big(diag(\lambda_1,\ldots,\lambda_n) diag(\sigma_1,\ldots,\sigma_n)\Big) = \mathcal{M}^+_{\lambda,\Lambda}(X).$$

Zusammen erhalten wir

$$\mathcal{M}^+_{\lambda,\Lambda}(X) = \sup_{\lambda I \le A \le \Lambda I} tr(AX), \quad \mathcal{M}^-_{\lambda,\Lambda}(X) = \inf_{\lambda I \le A \le \Lambda I} tr(AX). \tag{1.11}$$

Dies ergibt weiter

$$\begin{aligned} \mathcal{M}^+_{\lambda,\Lambda}(X) + \mathcal{M}^-_{\lambda,\Lambda}(Y) \le \mathcal{M}^+_{\lambda,\Lambda}(X+Y) \le \mathcal{M}^+_{\lambda,\Lambda}(X) + \mathcal{M}^+_{\lambda,\Lambda}(Y), \\ \mathcal{M}^-_{\lambda,\Lambda}(X) + \mathcal{M}^-_{\lambda,\Lambda}(Y) \le \mathcal{M}^-_{\lambda,\Lambda}(X+Y) \le \mathcal{M}^-_{\lambda,\Lambda}(X) + \mathcal{M}^+_{\lambda,\Lambda}(Y), \end{aligned} \tag{1.12}$$

Kombinieren wir (1.10) und (1.12) so sehen wir für $Y \ge 0$

$$\lambda \parallel Y \parallel \le \mathcal{M}^-_{\lambda,\Lambda}(Y) \le \mathcal{M}^\pm_{\lambda,\Lambda}(X+Y) - \mathcal{M}^\pm_{\lambda,\Lambda}(X) \le \mathcal{M}^+_{\lambda,\Lambda}(Y) \le n\Lambda \parallel Y \parallel,$$

und die Pucci-Operatoren sind gleichmäßig elliptisch mit Elliptizitätskonstanten $\lambda, n\Lambda$.

Umgekehrt folgt für gleichmäßig elliptisches F mit Elliptizitätskonstanten $0 < \lambda \le \Lambda < \infty$ aus (1.8) und (1.10)

$$F(X+Y,\ldots) - F(X,\ldots) \le \Lambda \parallel Y^+ \parallel - \lambda \parallel Y^- \parallel \le$$

$$\le \Lambda tr(Y^+) - (\lambda/n) tr(Y^-) = \mathcal{M}^+_{\lambda/n,\Lambda}(Y)$$

und

$$F(X+Y,\ldots) - F(X,\ldots) = -\Big(F(X+Y-Y,\ldots) - F(X+Y,\ldots)\Big) \ge$$

$$\ge -\mathcal{M}^+_{\lambda/n,\Lambda}(-Y) = \mathcal{M}^-_{\lambda/n,\Lambda}(Y),$$

also

$$\mathcal{M}^-_{\lambda/n,\Lambda}(Y) \le F(X+Y,\ldots) - F(X,\ldots) \le \mathcal{M}^+_{\lambda/n,\Lambda}(Y) \quad \forall\ X, Y \in S(n). \tag{1.13}$$

5. Die Monge-Ampère-Gleichung $F(X) := \det(X)$ ist elliptisch für konvexe Funktionen u , denn

$$\det(X+Y) \ge \det(X) \quad \text{für } X, Y \ge 0.$$

Genauer gilt

$$\partial_{p_{ij}} F(X) = Cof(X)_{ij},$$

wobei $Cof(X)$ die Kofaktor-Martix von X bezeichnet. Ist X invertierbar, so gilt

$$\partial_{p_{ij}} F(X) = \det(X) X^{ij},$$

wobei (X^{ij}) die Inverse von X ist. Also ist F für positives X strikt elliptisch. Betrachten wir

$$G(X) := \log\det(X) \quad \text{für } X > 0,$$

so sehen wir

$$\partial_{p_{ij}} G(X) = X^{ij},$$

also

$$\partial_{p_{ij}} G(X) X_{jm} = \delta_{im}.$$

Differentiation nach $\partial_{p_{kl}}$ ergibt

$$\partial_{p_{ij},p_{kl}} G(X) X_{jm} + \partial_{p_{ik}} G(X) \delta_l^m = 0$$

und nach Multiplikation mit X^{mr}

$$\partial_{p_{ij},p_{kl}} G(X) = -X^{ik} X^{jl}.$$

Daher ist G konkav auf den positiv definiten Matrizen.

$\square$

2 Harmonische Funktionen

Der Laplace-Operator

$$\Delta := \sum_{i=1}^{n} \partial_{ii}$$

ist der einfachste elliptische Operator zweiter Ordnung. Die Lösungen der Laplace-Gleichung

$$\Delta u = 0$$

heißen harmonische Funktionen.

Definition 2.1 *Eine Funktion* $u \in C^2(\Omega), \quad \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ *offen heißt harmonisch (super-, subharmonisch), falls*

$$\Delta u := \sum_{i=1}^{n} \partial_{ii} u = (\leq, \geq) 0 \quad \textit{in } \Omega.$$

□

In diesem Paragraphen wollen wir verschiedene besondere Eigenschaften harmonischer Funktionen wie z.B. Mittelwertsatz, Maximumprinzip, Cauchy-Abschätzungen und Harnack-Ungleichung elementar herleiten. In späteren Paragraphen werden wir sehen, daß diese Eigenschaften in modifizierter Form für Lösungen elliptischer Differentialgleichungen zweiter Ordnung gelten.

Wir beginnen mit dem Mittelwertsatz.

Satz 2.1 (Mittelwertsatz) *Es sei* $u \in C^2(\Omega)$ *mit* $\Delta u = 0 (\leq, \geq)\ 0$ *in* $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ *offen. Dann gilt für Bälle* $B = B_R(x_0) \subset\subset \Omega$,

$$u(x_0) = (\geq, \leq) \fint_B u = (\geq, \leq) \fint_{\partial B} u.$$

Beweis:
Für $0 < \varrho < R$ wenden wir den Divergenzsatz auf

$$\Delta u = div\ \nabla u$$

in $B_\varrho(x_0)$ an und erhalten

$$\int_{\partial B_\varrho(x_0)} \partial_\nu u = \int_{B_\varrho(x_0)} \Delta u = (\leq, \geq) 0.$$

Führen wir Polarkoordinaten $x = x_0 + r\omega, |\omega| = 1$ ein, so gilt

$$\partial_\nu u = \frac{d}{dr} u(x_0 + r\omega)|_{r=\varrho} = \frac{d}{d\varrho} u(x_0 + \varrho\omega)$$

und somit

$$\int_{\partial B_\varrho(x_0)} \partial_\nu u = \varrho^{n-1} \int_{\partial B_1(0)} \frac{d}{d\varrho} u(x_0 + \varrho\omega)\ \mathrm{d}\omega =$$

$$= \varrho^{n-1} \frac{d}{d\varrho} \int\limits_{\partial B_1(0)} u(x_0 + \varrho\omega)\ \mathrm{d}\omega = \varrho^{n-1} \frac{d}{d\varrho} \Big(\varrho^{1-n} \int\limits_{\partial B_\varrho(x_0)} u \Big) = (\leq, \geq) 0.$$

Da $u(x_0) = \lim\limits_{\varrho \downarrow 0} \fint\limits_{\partial B_\varrho(x_0)} u$, folgt daraus für $0 < \varrho < R$

$$u(x_0) = (\geq, \leq) \fint\limits_{\partial B_\varrho(x_0)} u = (\geq, \leq) \fint\limits_{\partial B_R(x_0)} u.$$

Multiplikation mit $\dfrac{n\varrho^{n-1}}{R^n}$ und Integration über $]0, R[$ ergibt

$$u(x_0) = \frac{n}{R^n} \int\limits_0^R \varrho^{n-1} u(x_0)\ \mathrm{d}\varrho = (\geq, \leq) \frac{n}{R^n} \int\limits_0^R \Big(\frac{1}{n\omega_n} \int\limits_{\partial B_\varrho(x_0)} u \Big)\ \mathrm{d}\varrho =$$

$$= \frac{1}{\omega_n R^n} \int\limits_{B_R(x_0)} u = \fint\limits_{B_R(x_0)} u = (\geq, \leq) \fint\limits_{\partial B_R(x_0)} u,$$

wobei $\omega_n := \mathcal{L}^n(B_1(0))$.

///

Das starke Maximumprinzip folgt sofort aus dem Mittelwertsatz.

Satz 2.2 (Starkes Maximumprinzip für harmonische Funktionen) *Es sei* $u \in C^2(\Omega)$ *mit* $\Delta u \geq 0$ *in* $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ *offen, zusammenhängend. Falls* u *sein Maximum im Innern annimmt, so ist* u *konstant.*

Beweis:
Es sei $M := \sup\limits_\Omega u$ und $A := [u = M]$. Da u stetig in Ω ist, ist A abgeschlossen in Ω. Andererseits gilt für $y \in A, B_\varrho(y) \subseteq \Omega$ mit dem Mittelwertsatz, Satz 2.1, daß

$$M = u(y) \leq \fint\limits_{B_\varrho(y)} u \leq M.$$

Da $u \leq M$ auf $B_\varrho(y)$, folgt $u \equiv M$ auf $B_\varrho(y)$ und

$$B_\varrho(y) \subseteq A.$$

Damit ist A offen. Falls u sein Maximum im Innern annimmt, ist $A \neq \emptyset$, somit $A = \Omega$ und $u \equiv M$ konstant.

///

Das schwache Maximumprinzip folgt aus dem starken Maximumprinzip.

Satz 2.3 (Schwaches Maximumprinzip für harmonische Funktionen) *Es sei* $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ *mit* $\Delta u \geq 0$ *in* $\Omega \subset\subset \mathbb{R}^n$ *offen. Dann gilt*

$$\sup_{\Omega} u = \sup_{\partial\Omega} u.$$

Beweis:
Falls $\sup_{\Omega} u > \sup_{\partial\Omega} u$, so existiert $x_0 \in \Omega$ mit

$$u(x_0) \geq u \quad \text{auf } \Omega.$$

Mit dem starken Maximumprinzip, Satz 2.2, folgt, daß u auf der Zusammenhangskomponente Ω' von Ω, die x_0 enthielt, konstant ist, also

$$\sup_{\Omega} u = u(x_0) = \sup_{\partial\Omega'} u \leq \sup_{\partial\Omega} u.$$

///

Das schwache Maximumprinzip ergibt folgenden Eindeutigkeitssatz.

Satz 2.4 (Eindeutigkeit für das Dirichletproblem der Poissongleichung) *Es sei* $\Omega \subset\subset \mathbb{R}^n, f \in C^0(\Omega), \varphi \in C^0(\overline{\Omega})$ *. Dann gibt es höchstens eine Lösung* $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ *von*

$$\Delta u = f \quad \text{in } \Omega,$$

$$u = \varphi \quad \text{auf } \partial\Omega.$$

Beweis:
Für die Differenz u zweier Lösungen gilt $u \in C^0(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ und

$$\Delta u = 0 \quad \text{in } \Omega,$$

$$u = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega,$$

Mit dem schwachen Maximumprinzip, Satz 2.3, folgt

$$\sup_{\Omega} |u| = \sup_{\partial\Omega} |u| = 0,$$

also $u = 0$.

///

Der Mittelwertsatz ergibt innere Abschätzungen für Ableitungen harmonischer Funktionen.

Satz 2.5 (Cauchy-Abschätzungen) $u \in C^2(\Omega)$ *sei harmonisch in* $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ *offen. Dann gilt* $u \in C^\infty(\Omega)$ *und für* $\Omega' \subset\subset \Omega$ *und einen beliebigen Multiindex* γ

$$\sup_{\Omega'} |\partial^\gamma u| \leq \left(\frac{n|\gamma|}{d}\right)^{|\gamma|} \sup_{\Omega} |u|$$

wobei $d = d(\Omega', \partial\Omega)$.

Beweis:
Zuerst nehmen wir $u \in C^\infty(\Omega)$ an. Dann gilt

$$\Delta \nabla u = \nabla \Delta u = 0$$

und ∇u ist harmonisch auf Ω . Mit dem Mittelwertsatz, Satz 2.1, und dem Divergenzsatz gilt für $B_R(x) \subset\subset \Omega,$ daß

$$\nabla u(x) = \fint_{B_R(x)} \nabla u = \frac{1}{\omega_n R^n} \int_{\partial B_R(x)} u\nu.$$

Daraus folgt

$$|\nabla u(x)| \leq \frac{n}{R} \sup_{\partial B_R} |u|.$$

Induktiv ergibt sich daraus

$$|\nabla^k u(x)| \leq \tfrac{nk}{R} \sup_{B_{\frac{R}{k}}} |\nabla^{k-1} u| \leq (\tfrac{nk}{R})^k \sup_{B_R} |u|.$$

Die Annahme $u \in C^\infty(\Omega)$ folgt aus dem nächsten Lemma von Weyl.

///

Lemma 2.1 (Lemma von Weyl) *Es sei* $u \in L^1_{loc}(\Omega), \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ *offen, und es gelte*

$$\int_\Omega u \Delta v = 0 \quad \textit{für } v \in C_0^\infty(\Omega).$$

Dann ist $u \in C^\infty(\Omega)$ *, und* u *ist harmonisch, d.h.*

$$\Delta u = 0 \quad \textit{in } \Omega.$$

Beweis:
Wir wählen $\lambda \in C_0^\infty(B_1(0))$ mit $\int \lambda = 1, \lambda(x) = \lambda(-x)$ und setzen

$$\lambda_\varepsilon(x) := \varepsilon^{-n} \lambda(\frac{x}{\varepsilon}).$$

Weiter wählen wir $\Omega_4 \subset\subset \Omega_3 \subset\subset \Omega_2 \subset\subset \Omega_1 \subset\subset \Omega$ und setzen für $v \in L^1_{loc}(\Omega)$

$$v_\varepsilon(x) := \int_{\Omega_1} \lambda(x-y) v(y) \, \mathrm{d}y.$$

Es gilt $v_\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$

$$v_\varepsilon \to v \quad \text{stark in } L^1(\Omega_1).$$

Ist *supp* $v \subseteq \Omega_2$ und $0 < \varepsilon < d(\Omega_2, \partial\Omega_1),$ so ist

$$\textit{supp } v_\varepsilon \subseteq \Omega_1.$$

Insbesondere ist $u_\varepsilon \in C^\infty(R^n)$, und es gilt für $v \in C_0^2(\Omega_2)$

$$\int\limits_{\Omega_2} \Delta u_\varepsilon v = \int\limits_{\Omega_1}\int\limits_{\Omega_1} \Delta\lambda_\varepsilon(x-y)u(y)v(x)\ \mathrm{d}y\ \mathrm{d}x =$$

$$= \int\limits_{\Omega_1} u(y)(\int\limits_{\Omega_1} \Delta\lambda_\varepsilon(y-x)v(x)\ \mathrm{d}x)\ \mathrm{d}y =$$

$$= \int\limits_{\Omega} u \cdot \Delta v_\varepsilon = 0,$$

da $v_\varepsilon \in C_0^\infty(\Omega_1) \subset C_0^\infty(\Omega)$. Daraus folgt

$$\Delta u_\varepsilon = 0 \quad \text{in } \Omega_1,$$

und u_ε ist harmonisch in Ω_2 . Da $u_\varepsilon \in C^\infty(\Omega_2)$ folgt aus den bereits bewiesenen Cauchy-Abschätzungen, Satz 2.5, und dem Mittelwertsatz, Satz 2.1,

$$\sup_{\Omega_4} |D^k(u_\varepsilon - u_\delta)| \leq$$

$$\leq C(\Omega_3, \Omega_4, n, k) \sup_{\Omega_3} |u_\varepsilon - u_\delta| \leq$$

$$\leq C(\Omega_2, \Omega_3, \Omega_4, n, k) \int\limits_{\Omega_2} |u_\varepsilon - u_\delta|$$

Da $u_\varepsilon \to u$ in $L^1(\Omega_1)$ folgt $u \in C^\infty(\Omega_4)$, also $u \in C^\infty(\Omega)$. Schließlich gilt für $v \in C_0^\infty(\Omega)$

$$\int\limits_{\Omega} \Delta u \cdot v = \int\limits_{\Omega} u \Delta v = 0,$$

und somit

$$\Delta u = 0 \quad \text{in } \Omega.$$

///

Auch die Harnack-Ungleichung ist eine einfache Konsequenz aus dem Mittelwertsatz, Satz 2.1.

Satz 2.6 (Harnack-Ungleichung) *$u \in C^2(\Omega)$ sei harmonisch in $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $u \geq 0$. Dann gilt für $\Omega' \subset\subset \Omega, \Omega'$ zusammenhängend,*

$$\sup_{\Omega'} u \leq C(\Omega, \Omega', n) \inf_{\Omega'} u.$$

Beweis:
Für $B_{4\varrho}(x_0) \subseteq \Omega, x, y \in B_\varrho(x_0)$ gilt mit dem Mittelwertsatz, Satz 2.1, da $u \geq 0$,

$$u(x) = \fint\limits_{B_\varrho(x)} u \leq 2^n \fint\limits_{B_{2\varrho}(x_0)} u \leq 3^n \fint\limits_{B_{3\varrho}(y)} u = 3^n u(y).$$

Daraus folgt

$$\sup_{B_\varrho(x_0)} u \le 3^n \inf_{B_\varrho(x_0)} u. \tag{2.1}$$

Nun überdecken wir Ω' mit endlich vielen Bällen $B_i = B_{\varrho_i}(x_i)$ mit

$$\overline{\Omega'} \subseteq \cup_{i=1}^N B_{\varrho_i}(x_i),$$

$$x_i \in \overline{\Omega'} \subset\subset \Omega,$$

$$B_{4\varrho_i}(x_i) \subseteq \Omega.$$

Da Ω' zusammenhängend ist, existieren für beliebige $x, y \in \Omega'$ Indizes $i_j \in \{1, \dots, N\}, j = 1, \dots, M$ mit

$$x \in B_{i_1}, y \in B_{i_M}$$

$$B_{i_{j-1}} \cap B_{i_j} \neq \emptyset \quad \text{für } j = 2, \dots, M.$$

$$M \le N.$$

Dann gilt

$$u(x) \le \sup_{B_{i_1}} u \le 3^n \inf_{B_{i_1}} u \le 3^n \sup_{B_{i_2}} u \le \dots \le 3^{Mn} \inf_{B_{i_M}} u \le 3^{Nn} u(y),$$

also

$$\sup_{\Omega'} u \le 3^{Nn} \inf_{\Omega'} u.$$

///

Satz 2.7 (Satz von Liouville) *Eine nach unten beschränkte harmonische Funktion auf* $\mathbb{R}^n$ *ist konstant.*

Beweis:
Wir können o.B.d.A. $\inf_{\mathbb{R}^n} u = 0$ und $u \ge 0$ annehmen. Mit der Harnack-Ungleichung (2.1) folgt für alle $R > 0$

$$\sup_{B_R(0)} u \le 3^n \inf_{B_R(0)} u$$

und für $R \to \infty$

$$\sup_{\mathbb{R}^n} u \le 3^n \inf_{\mathbb{R}^n} u = 0.$$

Dies ergibt $u \equiv 0$.

///

Im Rest dieses Paragraphen leiten wir Darstellungsformeln für die Poissongleichung her. Wir beginnen mit den beiden Green'schen Formeln. $\Omega \subset\subset \mathbb{R}^n$ sei offen, und es gelte der Divergenzsatz für Ω . Für $u, v \in C^2(\overline{\Omega})$ gilt

$$\int_{\partial\Omega} v \partial_\nu u = \int_\Omega div(v \nabla u) = \int_\Omega (v \Delta u + \nabla v \nabla u). \tag{2.2}$$

Dies ist die erste Green'sche Formel. Vertauscht man u und v und substrahiert, so erhält man die zweite Green'sche Formel

$$\int_\Omega (v\Delta u - u\Delta v) = \int_{\partial\Omega} (v\partial_\nu u - u\partial_\nu v). \tag{2.3}$$

Die Laplacegleichung hat in $\mathbb{R}^n - \{0\}$ die radial symmetrische Lösung r^{2-n} für $n \geq 3$ und $\log r$ für $n = 2$. Durch Normierung erhalten wir folgende Definition für $x \neq 0$:

$$\Gamma(x) := \begin{cases} \dfrac{1}{n(2-n)\omega_n}|x|^{2-n} & \text{für } \ n \geq 3 \ , \\ \dfrac{1}{2\pi} \log|x| & \text{für } \ n = 2 \ . \end{cases} \tag{2.4}$$

Γ heißt die Fundamentallösung für die Laplacegleichung. Dieser Name begründet sich mit folgenden Rechnungen. Zuerst sehen wir für $x \neq 0$

$$\partial_i \Gamma(x) = \frac{1}{n\omega_n} x_i |x|^{-n}, \tag{2.5}$$

$$\partial_{ij}\Gamma(x) = \frac{1}{n\omega_n}(\delta_{ij}|x|^2 - nx_i x_j)|x|^{-n-2}. \tag{2.6}$$

Daraus ergibt sich

$$\Delta\Gamma = 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^n - \{0\}, \tag{2.7}$$

und Γ ist harmonisch in $\mathbb{R}^n - \{0\}$. Leiten wir weiter ab, so erhalten wir die Abschätzungen

$$|D^k\Gamma(x)| \leq C_{n,k}|x|^{2-n-k} \quad \text{für } x \neq 0, k \geq 1. \tag{2.8}$$

Für $x \in \Omega, v(y) := \Gamma(y - x)$ können wir die zweite Green'sche Formel nicht direkt auf Ω anwenden, da v bei x singulär ist. Stattdessen wenden wir (2.3) auf $\Omega - \overline{B_\varrho(x)}$ an und lassen $\varrho \to 0$. Wir erhalten

$$\int_{\Omega - \overline{B_\varrho(x)}} \Gamma(y-x)\Delta u(y) \, \mathrm{d}y = \int_{\partial\Omega} (v\partial_\nu u - u\partial_\nu v) - \int_{\partial B_\varrho(x)} (v\partial_\nu u - u\partial_\nu v). \tag{2.9}$$

Es gilt

$$\Big| \int_{\partial B_\varrho(x)} v\partial_\nu u \Big| = |\Gamma(\varrho) \int_{\partial B_\varrho(x)} \partial_\nu u| \leq n\omega_n \varrho^{n-1}\Gamma(\varrho) \sup_{B_\varrho(x)} |\nabla u| \to 0 \quad \text{für } \varrho \to 0$$

und

$$\int_{\partial B_\varrho(x)} u\partial_\nu v = \Gamma'(\varrho) \int_{\partial B_\varrho(x)} u = \frac{1}{n\omega_n \varrho^{n-1}} \int_{\partial B_\varrho(x)} u \to u(x) \quad \text{für } \varrho \to 0.$$

Damit folgt aus (2.9) die Green'sche Darstellungsformel

$$u(x) = -\int_{\partial\Omega} \Big(u(y)\partial_\nu\Gamma(x-y) + \Gamma(x-y)\partial_\nu u(y) \Big) \, \mathrm{d}\mathcal{H}^{n-1}(y) + \int_\Omega \Gamma(x-y)\Delta u(y) \, \mathrm{d}y \quad \text{für } x \in \Omega. \tag{2.10}$$

Mit der zweiten Green'schen Formel gilt also formal

$$„\int\limits_{\Omega} \Delta\Gamma(x-y)u(y)\ \mathrm{d}y = u(x)“$$

und man schreibt dies

$$\Delta\Gamma = \delta_0 \quad \text{in } \mathbb{R}^n, \tag{2.11}$$

wobei δ_0 die Einpunktmasse in 0 ist. Setzten wir $u \equiv 1$ in (2.10), so erhalten wir

$$\int\limits_{\partial\Omega} \partial_\nu \Gamma(y-x)\ \mathrm{d}y = 1. \tag{2.12}$$

Ist u harmonisch in Ω , so gilt

$$u(x) = -\int\limits_{\partial\Omega} \Big(u(y)\partial_\nu\Gamma(x-y) + \Gamma(x-y)\partial_\nu u(y) \Big)\ \mathrm{d}\mathcal{H}^{n-1}(y) \quad \text{für } x \in \Omega. \tag{2.13}$$

Da der Integrand analytisch in x ist, folgt, daß alle harmonischen Funktionen analytisch, also auch unendlich oft differenzierbar sind. Wenden wir (2.10) auf $u \in C_0^2(\mathbb{R}^n)$ mit $\Omega \supset\supset$ *supp* u an, so erhalten wir

$$u(x) = \int \Gamma(x-y)\Delta u(y)\ \mathrm{d}y. \tag{2.14}$$

Allgemein definieren wir für $f \in L^1(\Omega), \Omega \subset\subset \mathbb{R}^n$ offen, das Newton-Potential

$$Nf(x) := \int\limits_{\Omega} \Gamma(x-y)f(y)\ \mathrm{d}y \quad x \in \Omega. \tag{2.15}$$

Nach dem folgenden Lemma ist $Nf \in L^1(\Omega)$ wohldefiniert.

Lemma 2.2 *Für* $\Omega \subset\subset \mathbb{R}^n$ *offen,* $1 \le p < \infty, 1 \le q \le \infty, \frac{1}{q} > \frac{1}{p} - \frac{2}{n}$ *ist das Newton-Potential eine stetige lineare Abbildung* $N : L^p(\Omega) \to L^q(\Omega)$ *mit*

$$\| N \|_{L(L^p(\Omega), L^q(\Omega))} \le C(d,n,p,q),$$

wobei $diam\ \Omega \le d$ *.*

Weiter gilt für $f \in C_0^1(\Omega)$*, daß* $Nf \in C^2(\Omega)$ *,*

$$\partial_i Nf(x) = \int \partial_i f(x-y)\, \Gamma(y)\ \ \mathrm{d}y = \int \partial_i \Gamma(y)\, f(x-y)\ \mathrm{d}y$$

in jedem $x \in \mathbb{R}^n$ *und ausserdem*

$$\Delta Nf = f \quad \textit{in } \Omega.$$

Beweis:
Wir bemerken für $x \in \Omega, diam\ \Omega \le d$ und für $1 \le r < \frac{n}{n-2}, n \ge 3$

$$\int\limits_{\Omega} \Gamma(x-y)^r\ \mathrm{d}y \le C_{n,r} \int\limits_{B_d(0)} |y|^{r(2-n)}\ \mathrm{d}y \le C(d,n,r) < \infty \tag{2.16}$$

und für $1 \leq r < \infty, n = 2$,

$$\int\limits_{\Omega} \Gamma(x-y)^r \, dy \leq \int\limits_{B_d(0)} (\log|y|)^r \, dy \leq C(d,r) < \infty.$$

Für $p > \frac{n}{2}$ folgt

$$|Nf(x)| \leq \| \Gamma(x-.) \|_{L^{p/(p-1)}(\Omega)} \| f \|_{L^p(\Omega)} \leq C(d,n,p) \| f \|_{L^p(\Omega)}$$

und $N : L^p(\Omega) \to L^\infty(\Omega)$ ist stetig mit

$$\| N \|_{L(L^p(\Omega), L^\infty(\Omega))} \leq C(d,n,p).$$

Nun sei $1 \leq p \leq \frac{n}{2}, p \leq q < \infty$ und

$$\frac{1}{q} > \frac{1}{p} - \frac{2}{n}.$$

Wir setzen

$$\frac{1}{q} =: \frac{1}{p} - (1 - \frac{1}{r}),$$

also

$$0 \leq 1 - \frac{1}{r} < \frac{2}{n}$$

und $1 \leq r < \frac{n}{n-2}$, insbesondere mit (2.16)

$$\| \Gamma(x-.) \|_{L^r(\Omega)} \leq C(d,n,r) = C(d,n,p,q) \quad \text{für } x \in \Omega.$$

Da $\frac{1}{q} + (1 - \frac{1}{p}) + (1 - \frac{1}{r}) = 1$, erhalten wir mit der Hölder-Ungleichung

$$|Nf(x)| \leq \int\limits_{\Omega} \Gamma(x-y)^{r(1-\frac{1}{p})} \Gamma(x-y)^{r/q} |f(y)|^{p/q} |f(y)|^{p(1-\frac{1}{r})} \, dy \leq$$

$$\leq \| \Gamma(x-.) \|_{L^r(\Omega)}^{r(1-\frac{1}{p})} \Big(\int\limits_{\Omega} \Gamma(x-y)^r |f(y)|^p \, dy \Big)^{1/q} \cdot \| f \|_{L^p(\Omega)}^{p(1-\frac{1}{r})}$$

und

$$\| Nf \|_{L^q(\Omega)} \leq \sup_{x \in \Omega} \| \Gamma(x-.) \|_{L^r(\Omega)}^{r(1-\frac{1}{p})+r/q} \| f \|_{L^p(\Omega)}^{p(1-\frac{1}{r})+p/q} \leq C(d,n,p,q) \| f \|_{L^p(\Omega)} .$$

Damit ist $N : L^p(\Omega) \to L^q(\Omega)$ stetig mit

$$\| N \|_{L(L^p(\Omega), L^q(\Omega))} \leq C(d,n,p,q).$$

Nun sei $f \in C_0^1(\Omega) \subseteq C_0^1(\mathbb{R}^n)$. Dann gilt in jedem $x \in \mathbb{R}^n$:

$$Nf(x) = \int \Gamma(x-y) f(y) \, dy = \int f(x-y) \Gamma(y) \, dy$$

und mit dem Satz von Lebesgue und $\Gamma \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ folgt

$$\partial_i Nf(x) = \int \partial_i f(x-y)\,\Gamma(y)\;\mathrm{d}y,$$

insbesondere $Nf \in C^1(\mathbb{R}^n)$. Weiter folgt mit dem Divergenzsatz für $\varrho \to 0$

$$\partial_i Nf(x) \leftarrow \int_{\mathbb{R}^n - B_\varrho(0)} \partial_i f(x-y)\Gamma(y)\;\mathrm{d}y =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n - B_\varrho(0)} f(x-y)\partial_i\Gamma(y)\;\mathrm{d}y + \int\limits_{\partial B_\varrho(0)} f(x-y)\Gamma(y)\nu^i_{B_\varrho(0)}(y)\;\mathrm{d}\mathcal{H}^{n-1}(y).$$

Da mit (2.4)

$$\Big| \int\limits_{\partial B_\varrho(0)} f(x-y)\Gamma(y)\nu_{\partial B_\varrho(0)}(y)\;\mathrm{d}\mathcal{H}^{n-1}(y) \Big| \leq$$

$$\leq C_n \varrho^{n-1} \parallel f \parallel_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \varrho^{2-n} \leq C_n \parallel f \parallel_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \varrho \to 0 \quad \text{für } \varrho \to 0$$

und $\nabla\Gamma \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ mit (2.5), erhalten wir auch

$$\partial_i Nf(x) = \int f(x-y)\partial_i\Gamma(y)\;\mathrm{d}y.$$

Genauso folgt $Nf \in C^2(\mathbb{R}^n)$ und

$$\partial_{ij} Nf(x) = \int \partial_j f(x-y)\partial_i\Gamma(y)\;\mathrm{d}y.$$

Nun wählen wir ein $x \in \Omega$ und $\eta_\varrho \in C_0^\infty(B_{2\varrho}(x))$ mit

$$\begin{gathered} 0 \leq \eta_\varrho \leq 1, \\ \eta_\varrho \equiv 1 \quad \text{in } B_\varrho(x), \\ |\nabla\eta_\varrho| \leq C_n\varrho^{-1}\chi_{B_{2\varrho}(x)-B_\varrho(x)}, \end{gathered} \tag{2.17}$$

und $B_{2\varrho}(x) \subseteq \Omega \subseteq B_R(0)$. Dann folgt

$$\Delta Nf(x) = \int\limits_{B_R(0)} \partial_i\Gamma(x-y)\;\partial_i f(y)\;\mathrm{d}y = \lim_{\varrho\downarrow 0} \int\limits_{B_R(0)} \partial_i\Gamma(x-y)\;\partial_i(f-f(x))|_y\;(1-\eta_\varrho(y))\;\mathrm{d}y =$$

$$= -f(x) \int\limits_{\partial B_R(0)} \partial_\nu\Gamma(x-y)\;\mathrm{d}\mathcal{H}^{n-1}(y) + \lim_{\varrho\downarrow 0} \int\limits_{B_{2\varrho}(x)-B_\varrho(x)} \partial_i\Gamma(x-y)\;(f(y)-f(x))\;\partial_i\eta_\varrho(y)\;\mathrm{d}y,$$

da $\Gamma(x-.)$ harmonisch in $\Omega - \{x\}$ ist. Mit (2.5) und (2.17) ergibt sich

$$\Big| \int\limits_{B_{2\varrho}(x)-B_\varrho(x)} \partial_i\Gamma(x-y)\;(f(y)-f(x))\;\partial_i\eta_\varrho(y)\;\mathrm{d}y \Big| \leq$$

$$\leq C_n\varrho^n \cdot \varrho^{1-n} \parallel \nabla f \parallel_{L^\infty(\Omega)} \varrho \cdot \varrho^{-1} = C_n \parallel \nabla f \parallel_{L^\infty(\Omega)} \varrho \to 0 \quad \text{für } \varrho \to 0.$$

Mit (2.12) erhalten wir

$$\int\limits_{\partial B_R(0)} \partial_\nu \Gamma(x-y) \,\mathrm{d}\mathcal{H}^{n-1}(y) = -1,$$

also

$$\Delta N f(x) = f(x) \quad \text{für } x \in \Omega.$$

///

3 Klassische Maximumprinzipien

Wir betrachten einen linearen, elliptischen Differentialoperator in Nicht-Divergenzform auf $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, d.h.

$$(Lu)(x) = a_{ij}(x)\partial_{ij}u(x) + b_i(x)\partial_i u(x) + c(x)u(x) \tag{3.1}$$

für $u \in C^2(\Omega)$. Dabei sind $a_{ij}, b_i, c : \Omega \to \mathbb{R}$ mit

$$|a_{ij}, b_i, c| \leq \Lambda \quad \text{in } \Omega, \tag{3.2}$$

und

$$a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq \Lambda^{-1}|\xi|^2 \quad \text{für } x \in \Omega, \xi \in \mathbb{R}^n \tag{3.3}$$

für ein $1 \leq \Lambda < \infty$.

Definition 3.1 *Für* $f : \Omega \to \mathbb{R}$ *heißt* $u \in C^2(\Omega)$ *eine Ober- bzw. Unterlösung von*

$$Lu = f \quad \textit{in } \Omega,$$

falls

$$Lu \leq f \quad \textit{in } \Omega$$

bzw.

$$Lu \geq f \quad \textit{in } \Omega.$$

u heißt eine Lösung, falls es eine Ober- und Unterlösung ist.

□

Wir beginnen mit folgendem schwachen Maximumprinzip

Satz 3.1 (Schwaches Maximumprinzip) L *erfülle (3.1) - (3.3) in* $\Omega \subset\subset \mathbb{R}^n$ *offen,* $c = 0$ *. Dann gilt für* $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ *mit*

$$Lu \geq 0 \quad \textit{in } \Omega,$$

daß

$$\sup_\Omega u = \sup_{\partial\Omega} u.$$

Beweis:
Falls $\sup\limits_\Omega u > \sup\limits_{\partial\Omega} u$, so existiert $x_0 \in \Omega$ mit

$$u(x_0) \geq u \quad \text{in } \Omega.$$

Daraus folgt

$$\nabla u(x_0) = 0,$$
$$D^2u(x_0) \leq 0.$$

Dies ergibt

$$Lu(x_0) = a_{ij}(x_0)\partial_{ij}u(x_0) \leq 0.$$

Damit gilt das schwache Maximumprinzip, falls

$$Lu > 0 \quad \text{in } \Omega.$$

Zum Beweis der vollen Aussage setzen wir

$$v(x) := e^{\gamma x_1}$$

und rechnen mit (3.2)

$$Lv(x) = e^{\gamma x_1}(\gamma^2 a_{11}(x) + \gamma b_1(x)) \geq e^{\gamma x_1}(\gamma^2 \Lambda^{-1} - |\gamma|\Lambda) > 0$$

für γ groß genug. Dies ergibt für $\varepsilon > 0$

$$L(u + \varepsilon v) > 0 \quad \text{in } \Omega.$$

Nach dem oben Bewiesenen folgt für $\varepsilon > 0$

$$\sup_{\Omega}(u + \varepsilon v) = \sup_{\partial\Omega}(u + \varepsilon v),$$

also für $\varepsilon \to 0$

$$\sup_{\Omega} u = \sup_{\partial\Omega} u.$$

///

Korollar 3.2 (Schwaches Maximumprinzip) *L erfülle (3.1) - (3.3) in $\Omega \subset\subset \mathbb{R}^n$ offen, $c \leq 0$. Dann gilt für $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ mit*

$$Lu \geq 0 \quad \textit{in } \Omega,$$

daß

$$\sup_{\Omega} u \leq \sup_{\partial\Omega} u_+,$$

und, falls

$$Lu = 0 \quad \textit{in } \Omega,$$

so gilt

$$\sup_{\Omega} |u| = \sup_{\partial\Omega} |u|.$$

Beweis:
Falls $\sup u \leq 0$, so ist die erste Aussage korrekt. Andernfalls ist $\Omega' := [u > 0] \neq \emptyset$, und es gilt

$$L_0 u := a_{ij}\partial_{ij} u + b_i u \geq -cu \geq 0 \quad \text{in } \Omega'.$$

Mit dem schwachen Maximumprinzip Satz 3.1 folgt

$$\sup_{\Omega} u = \sup_{\Omega'} u = \sup_{\partial\Omega'} u \leq \sup_{\partial\Omega} u_+.$$

Gilt $Lu = 0$, so folgt für $-u$, daß

$$\inf_{\Omega} u = -\sup_{\Omega} -u \geq -\sup_{\partial\Omega}(-u)_+ = \inf_{\partial\Omega} -(u_-).$$

Dies ergibt

$$\sup_{\Omega} |u| = \sup_{\partial\Omega} |u|.$$

///

Aus dem schwachen Maximumprinzip ergibt sich folgender Eindeutigkeitssatz.

Korollar 3.3 (Eindeutigkeit für das Dirichletproblem) *L erfülle (3.1) - (3.3) in $\Omega \subset\subset \mathbb{R}^n$ offen, $c \leq 0$, und es sei $f : \Omega \to \mathbb{R}, \varphi \in C^0(\partial\Omega)$.*

Dann hat das Dirichletproblem

$$Lu = f \quad \text{in } \Omega,$$

$$u = \varphi \quad \text{auf } \partial\Omega,$$

höchstens eine Lösung

$$u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega}).$$

□

Wir kommen nun zum starken Maximumprinzip, das nicht-triviale Maxima im Innern für Unterlösungen ausschließt. Wir beginnen mit folgendem Randpunktlemma.

Lemma 3.1 *L erfülle (3.1) - (3.3) in $\Omega \subset\subset \mathbb{R}^n$ offen, und es sei $u \in C^2(\Omega)$ mit*

$$Lu \geq 0 \quad \text{in } \Omega.$$

Weiterhin gelte für $x_0 \in \partial\Omega$

$$u \text{ ist stetig in } x_0,$$

$$u(x_0) > u \quad \text{in } \Omega,$$

und Ω erfüllt eine innere Sphärenbedingung in x_0, d.h. es existiert ein offener Ball B mit

$$B \subseteq \Omega, x_0 \in \partial B.$$

Schließlich gelte eine der drei Bedingungen

$$\begin{aligned} (i) &\quad c = 0, \\ (ii) &\quad c \leq 0, u(x_0) \geq 0, \\ (iii) &\quad u(x_0) = 0. \end{aligned}$$

Falls die äußere Normalenableitung von u in x_0 bezüglich $\nu = \nu_{\partial B}(x_0)$ existiert, so gilt

$$\partial_\nu u(x_0) > 0.$$

Beweis:
In jedem der drei Fälle gilt für $\tilde{L} := L - c_+$

$$\tilde{L}(u - u(x_0)) = Lu - cu(x_0) - c_+(u - u(x_0)) \geq 0 \quad \text{in } \Omega.$$

Also können o.B.d.A.

$$c \leq 0, u < 0 = u(x_0) \quad \text{in } \Omega$$

annehmen. Weiter sei o.B.d.A.

$$B_R(0) \subseteq \Omega, \quad \{x_0\} = \partial B_R(0) \cap \partial\Omega.$$

Für $0 < \varrho < R$ und $\alpha > 0$ setzen wir

$$v(x) := e^{-\alpha|x|^2} - e^{-\alpha R^2}$$

und rechnen, da $c \leq 0$,

$$Lv = e^{-\alpha|x|^2}(4\alpha^2 a_{ij}x_i x_j - 2\alpha(a_{ii} + b_i x_i)) + cv \geq$$

$$\geq e^{-\alpha|x|^2}(4\alpha^2\Lambda^{-1}|x|^2 - 2\alpha(\Lambda + \Lambda|x|) - \Lambda).$$

Für α groß genug folgt in $\Omega' := B_R(0) - \overline{B_\varrho(0)}$

$$L(u + \varepsilon v) \geq \varepsilon L v \geq 0.$$

Nun gilt $u < 0$ auf $\partial B_\varrho(0)$ und $v = 0$ auf $\partial B_R(0)$, also

$$u + \varepsilon v \leq 0 \quad \text{auf } \partial\Omega'$$

für $\varepsilon > 0$ klein. Mit dem schwachen Maximumprinzip, Korollar 3.2, folgt

$$u + \varepsilon v \leq 0 \quad \text{in } \Omega'.$$

Da $x_0 \in \partial\Omega'$ und $u(x_0) = 0 = v(x_0)$, folgt

$$\partial_\nu u(x_0) \geq -\varepsilon \partial_\nu v(x_0) = -\varepsilon v'(R) > 0.$$

///

Bemerkung:
Allgemeiner gilt auch ohne Existenz der äußere Normalenableitung von u in x_0 , daß

$$\liminf_{x \to x_0, |\sphericalangle(x - x_0, -\nu)| \leq \frac{\pi}{2} - \delta} \frac{u(x_0) - u(x)}{|x_0 - x|} > 0$$

für alle $\delta > 0$, wobei $\sphericalangle$ den Winkel bezeichnet.

□

Damit können wir das folgende Maximumprinzip nach Hopf beweisen.

Satz 3.4 (Hopf'sches Maximumprinzip) *L erfülle (3.1) - (3.3) in $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, zusammenhängend, und für $u \in C^2(\Omega)$ gelte*

$$Lu \geq 0 \quad \textit{in } \Omega.$$

Falls u sein Maximum im Innern von Ω annimmt und eine der Bedingungen

$$(i) \quad c = 0,$$

$$(ii) \quad c \leq 0, \sup_\Omega u \geq 0,$$

erfüllt ist, so ist u konstant.

Beweis:
Es sei $x_0 \in \Omega$ mit

$$u(x_0) = \sup_\Omega u.$$

Dann gilt unter beiden Bedingungen

$$L(u - u(x_0)) = Lu - cu(x_0) \geq 0$$

und wir können o.B.d.A.

$$c \leq 0, \quad u \leq 0 = u(x_0) \quad \text{in } \Omega$$

annehmen. Falls u nicht konstant ist, also $u \not\equiv 0$, so ist

$$\emptyset \neq \Omega' := [u < 0] \neq \Omega.$$

Da Ω zusammenhängend ist, gilt

$$\partial\Omega' \cap \Omega \neq \emptyset.$$

Wir wählen $x \in \Omega'$ mit

$$\varrho := d(x, \partial\Omega' \cap \Omega) < d(x, \partial\Omega).$$

Daraus folgt

$$B_\varrho(x) \subseteq \Omega' = [u < 0],$$

$$\overline{B_\varrho(x)} \subseteq \Omega,$$

und es existiert $y \in \partial B_\varrho(x)$ mit

$$u(y) = 0.$$

Da $u \in C^2(\Omega)$, folgt mit Lemma 3.1

$$\nabla u(y) \neq 0.$$

Da u in y sein Maximum annimmt, ist dies ein Widerspruch.

///

Als zweite Anwendung des Randpunktlemmas erhalten wir Eindeutigkeit für das Neumannproblem.

Satz 3.5 (Eindeutigkeit für das Neumannproblem) *L erfülle (3.1) - (3.3) in $\Omega \subset\subset \mathbb{R}^n$ offen, zusammenhängend, $c \leq 0$ und Ω erfülle in jedem Randpunkt eine innere Sphärenbedingung. Weiter sei $f : \Omega \to \mathbb{R}, \varphi : \partial\Omega \to \mathbb{R}$. Dann hat das Neumannproblem*

$$Lu = f \quad \textit{in } \Omega,$$

$$\partial_\nu u = \varphi \quad \textit{auf } \partial\Omega,$$

bis auf eine Konstante höchstens eine Lösung $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$, deren äußere Normalenableitung überall auf $\partial\Omega$ existiert.

Beweis:
Wir müssen zeigen, daß $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ mit

$$Lu = 0 \quad \text{in } \Omega$$

und verschwindender Normalenableitung

$$\partial_\nu u = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega$$

eine Konstante ist. Angenommen, u ist nicht konstant, dann gilt $\sup\limits_\Omega \pm u > 0$ und o.B.d.A.

$$M := \sup_\Omega u > 0.$$

Gilt für ein $x_0 \in \Omega$, daß

$$u(x_0) = M,$$

so folgt mit dem Hopf'schen Maximumprinzip, Satz 3.4, daß u konstant ist. Also gilt für ein $x_0 \in \partial\Omega$

$$u < M = u(x_0) \quad \text{in } \Omega.$$

Dann folgt mit Lemma 3.1, daß

$$\partial_\nu u(x_0) > 0$$

im Widerspruch zur Annahme.

///

Schließlich schätzen wir Lösungen von inhomogenen Gleichungen punktweise ab.

Satz 3.6 *L erfülle (3.1) - (3.3) in* $\Omega \subset\subset \mathbb{R}^n$ *offen,* $c \leq 0, u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega}), f : \Omega \to \mathbb{R}$ *mit*

$$Lu \geq f.$$

Dann gilt

$$\sup_\Omega u \leq \sup_{\partial\Omega} u_+ + C(\Omega, \Lambda) \sup_\Omega f_-,$$

wobei $C(\Omega, \Lambda) = e^{C(\Lambda)d} - 1$ *mit*

$$d = d(\Omega) := \inf \{osc_{x \in \Omega} x \cdot e \mid e \in \partial B_1(0)\} \leq diam(\Omega).$$

Beweis:
Wir können annehmen, daß

$$\Omega \subseteq [0 < x_1 < d].$$

Für $L_0 = a_{ij}\partial_{ij} + b_i\partial_i$ und $\alpha > 0$ rechnen wir

$$L_0 e^{\alpha x_1} = e^{\alpha x_1}(\alpha^2 a_{11} + \alpha b_1) \geq e^{\alpha x_1}\alpha(\alpha\Lambda^{-1} - \Lambda) \geq 1,$$

falls $\alpha \geq C(\Lambda)$. Wir setzen

$$v(x) := \sup_{\partial\Omega} u_+ + (e^{\alpha d} - e^{\alpha x_1}) \sup_\Omega f_-$$

und sehen

$$L(u-v) = Lu - L_0 v - cv \geq f + \sup_\Omega |f_-| \geq 0 \quad \text{in } \Omega.$$

Weiter gilt

$$u - v \leq u - \sup_{\partial\Omega} u_+ \leq 0 \quad \text{auf } \partial\Omega.$$

Mit dem schwachen Maximumprinzip, Korollar 3.2, folgt $u - v \leq 0$ in Ω, also

$$\sup_\Omega u \leq \sup_\Omega v \leq \sup_{\partial\Omega} u_+ + (e^{\alpha d} - 1) \sup_\Omega f_-$$

///

Korollar 3.7 *L erfülle (3.1) - (3.3) in $\Omega \subset\subset \mathbb{R}^n$ offen, $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega}), f : \Omega \to \mathbb{R}$ und $Lu = f$. Falls für $C(\Omega, \Lambda)$ aus Satz 3.6*

$$c_0 := 1 - C(\Omega, \Lambda) \sup_\Omega c_+ > 0$$

gilt, so folgt

$$\sup_\Omega |u| \leq c_0^{-1} (\sup_{\partial\Omega} |u| + C(\Omega, \Lambda) \sup_\Omega |f|).$$

Beweis:
Für $L_0 = L - c_+$ gilt

$$L_0 u = Lu - c_+ u = f - c_+ u,$$

und aus Satz 3.6 angewandt auf $\pm u$ und L_0 folgt

$$\sup_\Omega |u| \leq \sup_{\partial\Omega} |u| + C(\Omega, \Lambda) \sup_\Omega |f| + C(\Omega, \Lambda) \sup_\Omega c_+ \; \sup_\Omega |u|.$$

Daraus folgt die Behauptung.

///

4 Banachräume

Folgende Definition ist in der linearen Funktionalanalysis grundlegend.

Definition 4.1 *X sei ein reeller Vektorraum. Eine Abbildung*

$$\| \,.\, \| : X \to [0, \infty[$$

heißt Norm auf X, falls

(i) $\| x \| = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

(ii) $\| \lambda x \| = |\lambda| \, \| x \|$ *für* $x \in X, \lambda \in \mathbb{R}$.

(iii) $\| x + y \| \leq \| x \| + \| y \|$ *für* $x, y \in X$.

Wir nennen $(X, \| \, \|)$ oder kurz X einen normierten Vektorraum.

Eine Norm erzeugt eine Metrik durch

$$d(x, y) := \| x - y \| .$$

Ist X mit dieser Metrik vollständig, d.h. jede Cauchyfolge ist konvergent, so heißt $(X, \| \, \|)$ ein Banachraum.

Ein inneres Produkt auf X

$$\langle ., . \rangle : X \times X \to \mathbb{R},$$

d.h. $\langle ., . \rangle$ ist eine symmetrische, positiv definite Bilinearform auf X, erzeugt durch

$$\| x \| := \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

eine Norm auf X.

Ist die von $\| \, \|$ erzeugte Metrik vollständig, so heißt $(X, \langle ., . \rangle)$ ein Hilbertraum.

□

Der Raum aller stetigen, linearen Abbildungen $L(X, Y)$ zwischen zwei Banachräumen X, Y ist mit der Norm

$$\| T \| := \sup_{\|x\| \leq 1} \| Tx \|$$

wieder ein Banachraum. Der Dualraum $X^* := L(X, \mathbb{R})$ ist der Raum der stetigen linearen Funktionale auf X.

Wir beginnen mit dem folgenden Kriterium von Lax-Milgram, das aus Positivität Isomorphie schließt.

Satz 4.1 (Satz von Lax-Milgram) *$T : X \to X$ sei ein stetiger linearer Operator auf dem Hilbertraum X mit*

$$\langle Tx, x \rangle \geq c_0 \| x \|^2 \quad \textit{für } x \in X \tag{4.1}$$

und ein c_0. Dann ist T ein Isomorphismus.

Beweis:
Mit (4.1) folgt für $x \in X$

$$c_0 \parallel x \parallel^2 \leq \langle Tx, x \rangle \leq \parallel Tx \parallel \parallel x \parallel,$$

also

$$c_0 \parallel x \parallel \leq \parallel Tx \parallel . \tag{4.2}$$

Daraus folgt, daß T injektiv ist. Weiter folgt, daß $im\ T \subseteq X$ abgeschlossen ist, denn für $Tx_m \to y$ ist Tx_m eine Cauchyfolge, und mit (4.2) ist auch x_m eine Cauchyfolge. Damit konvergiert $x_m \to x \in X$ und $y = Tx \in im\ T$.

Nun sei $z \in im(T)^{\perp}$. Dann gilt mit (4.1)

$$0 = \langle Tz, z \rangle \geq c_0 \parallel z \parallel^2,$$

also $z = 0$, und $im\ T = \overline{im\ T} = X$. Damit ist T bijektiv, und mit (4.2) ist die Inverse stetig.

///

Eine stetige lineare Abbildung $T : X \to Y$ ist kompakt, wenn für jede beschränkte Teilfolge $x_m \in X$ eine Teilfolge m_l existiert, für die Tx_{m_l} konvergiert. Die Verkettung einer stetigen und einer kompakten Abbildung ist wieder kompakt

Eine Kleinheitsabschätzung für kompakte Abbildungen beinhaltet das folgende Ehrling-Lemma.

Lemma 4.1 (Ehrling-Lemma) *Es seien X, Y, Z Banachräume und zwei stetige, lineare Abbildungen*

$$X \to Y \hookrightarrow Z,$$

wobei $T : X \to Y$ kompakt ist und $I : Y \hookrightarrow Z$ injektiv ist. Dann existiert zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $C_\varepsilon < \infty$, so daß

$$\parallel Tx \parallel_Y \leq \varepsilon \parallel x \parallel_X + C_\varepsilon \parallel ITx \parallel_Z .$$

Beweis:
Angenommen die Aussage gilt nicht, dann existiert $\varepsilon > 0$ und eine Folge $x_m \in X$ mit

$$\varepsilon \parallel x_m \parallel_X + m \parallel ITx_m \parallel_Z < \parallel Tx_m \parallel_Y = 1.$$

Dann ist x_m in X beschränkt, und, da T kompakt ist, konvergiert für eine Teilfolge

$$Tx_m \to y \in Y.$$

Dies ergibt

$$\parallel y \parallel_Y \leftarrow \parallel Tx_m \parallel_Y = 1,$$

insbesondere $y \neq 0$. Andererseits gilt

$$\parallel Iy \parallel_Z \leftarrow \parallel ITx_m \parallel_Z \to 0,$$

also $y = 0$, da I injektiv ist.

Dies ist ein Widerspruch, und das Lemma ist bewiesen.

$///$

Das folgende Lemma besagt, daß kompakte Störungen von Isomorphismen, die injektiv sind, wieder Isomorphismen sind.

Lemma 4.2 *$T, K : X \to Y$ seien stetige lineare Abbildungen zwischen zwei Banachräumen X, Y . T sei ein Isomorphismus, und K sei kompakt. Ist $T-K$ injektiv oder surjektiv, so ist $T-K$ ein Isomorphismus.*

Beweis:
Mit Isomorphie können wir $X = Y$ und $T = I = id_X$ annehmen.

Zuerst betrachten wir $I - K$ injektiv. Wir zeigen, daß

$$\| (I-K)x \| \geq c_0 \| x \| \quad \text{für } x \in X \tag{4.3}$$

für ein $c_0 > 0$.

Angenommen (4.3) ist falsch, dann existieren $x_m \in X$ mit

$$\| (I-K)x_m \| < \frac{1}{m} \| x_m \|$$

und o.B.d.A. $\| x_m \| = 1$. Dann konvergiert für eine Teilfolge $Kx_m \to y$ und, da $\| (I-K)x_m \| \to 0$, konvergiert $x_m \to -y$. Es gilt $(I-K)y = 0$, also $y = 0$, da $I-K$ injektiv ist. Andererseits gilt $\| y \| \leftarrow \| x_m \| = 1$, also $y \neq 0$. Dies ist ein Widerspruch, und (4.3) ist bewiesen.

Aus (4.3) folgt, daß

$$im(I-K) \text{ ist abgeschlossen,} \tag{4.4}$$

denn für $(I-K)x_m \to y$ ist $(I-K)x_m$ eine Cauchyfolge, und mit (4.3) ist auch x_m eine Cauchyfolge. Damit konvergiert $x_m \to x \in X$ und $y = (I-K)x \in im(I-K)$.

Weiter folgt aus (4.3), falls $I-K$ surjektiv ist, so ist die Inverse von $I-K$ wieder stetig, und $I-K$ ist ein Isomorphismus. Für den Fall, daß $I-K$ injektiv ist, verbleibt also zu zeigen, daß

$$im(I-K) = X. \tag{4.5}$$

Angenommen (4.5) ist falsch, dann existiert $x \in X - im(I-K)$. Damit gilt

$$(I-K)^n x \in im(I-K)^n - im(I-K)^{n+1},$$

denn falls $(I-K)^n x = (I-K)^{n+1} y$ für ein $y \in X$, so folgt $(I-K)^n \Big(x - (I-K)y \Big) = 0$, und, da $(I-K)^n$ mit $I-K$ injektiv ist, folgt $x = (I-K)y \in im(I-K)$ im Widerspruch zur Annahme.

Nun bemerken wir

$$(I-K)^n = \sum_{l=0}^{n} \binom{n}{l} (-1)^l K^l =: I - \tilde{K}$$

für einen kompakten linearen Operator $\tilde{K}$. Wie schon bemerkt ist $I - \tilde{K}$ injektiv, und es folgt aus (4.4), daß $im(I-K)^n$ abgeschlossen ist. Daher ist $d((I-K)^n x, im(I-K)^{n+1}) > 0$, und es existiert $y_n \in im(I-K)^{n+1}$ mit

$$\| (I-K)^n x - y_n \| \leq 2d((I-K)^n x, im(I-K)^{n+1}).$$

Wir setzen
$$\tilde{y}_n := \frac{(I-K)^n x - y_n}{\| (I-K)^n x - y_n \|} \in im(I-K)^n$$
und sehen $d(\tilde{y}_n, im(I-K)^{n+1}) \geq 1/2$. Daraus folgt für $m > n$
$$\| K\tilde{y}_n - K\tilde{y}_m \| = \| \tilde{y}_n - \tilde{y}_m - (I-K)\tilde{y}_n + (I-K)\tilde{y}_m \| \geq 1/2, \tag{4.6}$$
da $\tilde{y}_m + (I-K)\tilde{y}_n - (I-K)\tilde{y}_m \in im(I-K)^{n+1}$.

Da $\| \tilde{y}_n \| = 1$ und K kompakt ist, konvergiert andererseits eine Teilfolge von $K\tilde{y}_n$ in X , ist also eine Cauchyfolge. Dies widerspricht (4.6), und (4.5) und damit das Lemma für den Fall, daß $I-K$ injektiv ist, sind bewiesen.

//

Nun sei $I-K$ surjektiv. Wir zeigen, daß $I-K$ injektiv, und die Behauptung folgt dann aus dem ersten Teil.

Auch der Beweis folgt dem ersten Teil. Angenommen $I-K$ ist nicht injektiv, dann existiert $x =: x_1 \in ker(I-K) - \{0\}$. Da $I-K$ surjektiv ist, existiert induktiv
$$(I-K)x_n = x_{n-1} \quad \text{für } n \geq 2.$$
Daraus folgt
$$(I-K)^{n-1}x_n = x_1 \neq 0,$$
$$(I-K)^n x_n = (I-K)x_1 = 0,$$
also
$$x_n \in ker(I-T)^n - ker(I-K)^{n-1} \quad \text{für } n \geq 1.$$
Da $ker(I-K)^{n-1}$ abgeschlossen ist, gilt $d(x_n, ker(I-K)^{n-1}) > 0$, und es existiert $k_n \in ker(I-K)^{n-1}$ mit
$$\| x_n - k_n \| \leq 2d(x_n, ker(I-K)^{n-1}).$$
Wir setzen
$$\tilde{x}_n := \frac{x_n - k_n}{\| x_n - k_n \|}$$
und sehen $d(\tilde{x}_n, ker(I-K)^{n-1}) \geq 1/2$. Daraus folgt für $n > m$
$$\| K\tilde{x}_n - K\tilde{x}_m \| = \| \tilde{x}_n - \tilde{x}_m - (I-K)\tilde{x}_n + (I-K)\tilde{x}_m \| \geq 1/2, \tag{4.7}$$
da $\tilde{x}_m + (I-K)\tilde{x}_n - (I-K)\tilde{x}_m \in im(I-K)^{n-1}$.

Da $\| \tilde{x}_n \| = 1$ und K kompakt ist, konvergiert andererseits eine Teilfolge von $K\tilde{x}_n$ in X , ist also eine Cauchyfolge. Dies widerspricht (4.7), und $I-K$ ist injektiv.

///

Bemerkung:
Allgemein kann man zeigen, daß eine kompakte Störung eines Isomorphismus ein Fredholmoperator vom Index 0 ist, siehe [A] Satz 8.15. Dabei heißt eine Abbildung $T : X \to Y$ ein Fredholmoperator, falls

- $im\ T \subseteq Y$ ist abgeschlossen.
- $dim\ ker\ T < \infty$.
- $dim\ coker\ T = dim(Y/im\ T) < \infty$,

und

$$ind\ T := dim\ ker\ T - dim\ coker\ T$$

heißt der Index von T .

$\square$

5 Funktionenräume

5.1 Hölder-Räume

Definition 5.1 (Hölder-Räume) *Es sei* $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ *offen und nichtleer,* $k \in \mathbb{N}_0$ *. Der Raum der k-fach stetig differenzierbaren Funktionen auf* Ω *ist*

$$C^k(\Omega) := \{u : \Omega \to \mathbb{R} \mid \partial^\gamma u \textit{ existiert und ist stetig auf } \Omega \textit{ für } |\gamma| \leq k \}$$

bzw. auf $\overline{\Omega}$ *ist*

$$C^k(\overline{\Omega}) := \{u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R} \mid \partial^\gamma u \textit{ existiert und läßt sich stetig auf } \overline{\Omega} \textit{ fortsetzen für } |\gamma| \leq k \}$$

und mit kompaktem Träger in Ω *ist*

$$C_0^k(\Omega) := \{u \in C^k(\Omega) \mid supp(u) \subset\subset \Omega \}.$$

Für beschränktes Ω *ist* $C^k(\overline{\Omega})$ *mit der Norm*

$$\| u \|_{C^k(\Omega)} := \sum_{|\gamma| \leq k} \| \partial^\gamma u \|_{L^\infty(\Omega)} .$$

ein Banachraum.

Für $0 < \alpha \leq 1$, $u : \Omega \to \mathbb{R}$ *definieren wir die Hölder-Konstante*

$$hö l_{\Omega,\alpha} u := \sup_{x \neq y \in \Omega} \frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|^\alpha}$$

und die Lipschitz-Konstante $lip_\Omega u := hö l_{\Omega,1}$ *. Eine Funktion mit endlicher Hölder- bzw. Lipschitz-Konstante heißt hölder- bzw. lipschitzstetig. Der Raum der Funktionen mit beschränkten und hölderstetigen Ableitungen bis zur* $k-$*ten Ordnung ist*

$$C^{k,\alpha}(\Omega) := \{u \in C^k(\Omega) \mid \ \| \partial^\gamma u \|_{L^\infty(\Omega)}, hö l_{\Omega,\alpha}(\partial^\gamma u) < \infty \textit{ für } |\gamma| \leq k \}.$$

Wir definieren die Norm

$$\| u \|_{C^{k,\alpha}(\Omega)} := \sum_{|\gamma| \leq k} (\| \partial^\gamma u \|_{L^\infty(\Omega)} + hö l_{\Omega,\alpha} \partial^\gamma u).$$

Für $\Omega \subseteq A \subseteq \overline{\Omega}$ *setzen wir*

$$C_{loc}^{k,\alpha}(A) := \{u \in C^k(\Omega) \mid \forall x \in A : \exists \varrho > 0 : u \in C^{k,\alpha}(\Omega \cap B_\varrho(x)) \}$$

und

$$C_0^{k,\alpha}(A) := \{u \in C^{k,\alpha}(\Omega) \mid supp(u) \subset\subset A \},$$

$$\textit{bzw.} \quad C_0^k(A) := \{u \in C^k(\Omega) \mid supp(u) \subset\subset A \}.$$

Schließlich setzen wir

$$C^\infty(\Omega) := \cap_{k \in \mathbb{N}} C^k(\Omega)$$

und für $\Omega \subseteq A \subseteq \overline{\Omega}$

$$C_0^\infty(A) := \cap_{k \in \mathbb{N}} C_0^k(A).$$

Wir nennen $C^{k,\alpha}(\Omega)$ *die Hölder-Räume.*

$\square$

Proposition 5.1 $C^{k,\alpha}(\Omega)$ *ist ein Banachraum.*

Beweis:
Es sei $u_j \in C^{k,\alpha}(\Omega)$ eine Cauchyfolge. Dann konvergiert

$$D^\gamma u_j \to D^\gamma u$$

gleichmäßig gegen die Ableitungen einer Funktion $u \in C^k(\Omega)$. Es gilt

$$h\ddot{o}l_\alpha D^\gamma u \leq \liminf_{j\to\infty} h\ddot{o}l_\alpha D^\gamma u_j,$$

also $u \in C^{k,\alpha}(\Omega)$.

Genau so gilt

$$\limsup_{j\to\infty} h\ddot{o}l_\alpha D^\gamma (u - u_j) \leq \limsup_{j\to\infty} \liminf_{i\to\infty} h\ddot{o}l_\alpha D^\gamma (u_i - u_j) = 0$$

und somit

$$u_j \to u \quad \text{in } C^{k,\alpha}(\Omega).$$

///

Das Produkt zweier hölderstetiger Funktionen ist wieder hölderstetig.

Proposition 5.2 *Es sei* $k \in \mathbb{N}_0, 0 < \alpha \leq 1$ *. Dann gilt für* $u, v \in C^{0,\alpha}(\Omega)$

$$h\ddot{o}l_{\Omega,\alpha}(uv) \leq h\ddot{o}l_{\Omega,\alpha} u \parallel v \parallel_{L^\infty(\Omega)} + \parallel u \parallel_{L^\infty(\Omega)} h\ddot{o}l_{\Omega,\alpha} v$$

und für $u, v \in C^{k,\alpha}(\Omega)$

$$\parallel uv \parallel_{C^{k,\alpha}(\Omega)} \leq C_{n,k} \parallel u \parallel_{C^{k,\alpha}(\Omega)} \parallel v \parallel_{C^{k,\alpha}(\Omega)}$$

Beweis:
Für $x, y \in \Omega$ gilt

$$\begin{aligned} |uv(x) - uv(y)| &\leq |u(x) - u(y)|\ |v(x)| + |u(y)|\ |v(x) - v(y)| \leq \\ &\leq \left(h\ddot{o}l_{\Omega,\alpha} u \parallel v \parallel_{L^\infty(\Omega)} + \parallel u \parallel_{L^\infty(\Omega)} h\ddot{o}l_{\Omega,\alpha} v \right) |x - y|^\alpha, \end{aligned}$$

und die erste Abschätzung folgt.

Die zweite folgt aus dieser unter Beachtung der Produktregel

$$\partial^\gamma (uv) = \sum_{0 \leq \beta \leq \gamma} \binom{\gamma}{\beta} \partial^\beta u\ D^{\gamma-\beta} v$$

für $|\gamma| \leq k$.

///

Proposition 5.3 *Für* $\Omega \subset\subset \mathbb{R}^n, 0 < \beta < \alpha$ *sind die Einbettungen*

$$C^{0,\alpha}(\Omega) \hookrightarrow C^{0,\beta}(\Omega) \hookrightarrow C^0(\overline{\Omega})$$

kompakt.

Beweis:
Eine Funktion $u \in C^{0,\alpha}(\Omega)$ ist gleichmäßig stetig und läßt sich daher stetig auf $\overline{\Omega}$ fortsetzen. Klarerweise ist die Einbettung $C^{0,\alpha}(\Omega) \hookrightarrow C^0(\overline{\Omega})$ stetig. Eine in $C^{0,\alpha}(\Omega)$ beschränkte Folge von Funktionen u_m ist auf $\overline{\Omega}$ gleichgradig stetig und beschränkt. Da $\overline{\Omega}$ kompakt ist, gibt es nach dem Satz von Arzela-Ascoli eine gleichmäßig konvergente Teilfolge, und die Einbettung der Hölder-Räume in den Raum der bis zum Rand stetigen Funktionen ist kompakt.

Für $0 < \beta < \alpha, x_1 \neq x_2 \in \Omega, \delta > 0$, gilt

$$\frac{|u(x_1) - u(x_2)|}{|x_1 - x_2|^\beta} \leq h\ddot{o}l_{\Omega,\alpha} u \ \delta^{\alpha-\beta} \quad \text{wenn } |x_1 - x_2| \leq \delta, \tag{5.1}$$

und

$$\frac{|u(x_1) - u(x_2)|}{|x_1 - x_2|^\beta} \leq 2 \parallel u \parallel_{L^\infty(\Omega)} \delta^{-\beta} \quad \text{wenn } |x_1 - x_2| \geq \delta. \tag{5.2}$$

Für $\delta > diam(\Omega)$ folgt daraus zuerst

$$h\ddot{o}l_{\Omega,\beta} u \leq h\ddot{o}l_{\Omega,\alpha} u \ diam(\Omega)^{\alpha-\beta}$$

und

$$C^{0,\alpha}(\Omega) \hookrightarrow C^{0,\beta}(\Omega)$$

ist stetig.

Ist nun u_m eine in $C^{0,\alpha}(\Omega)$ beschränkte Folge, so konvergiert eine Teilfolge nach dem eben Bewiesenen gleichmäßig auf $\overline{\Omega}$ gegen eine Funktion $u \in C^0(\overline{\Omega})$. Mit (5.1) und (5.2) folgt für alle $\delta > 0$, daß

$$\begin{aligned} &\limsup_{i,j\to\infty} h\ddot{o}l_{\Omega,\beta}(u_i - u_j) \leq \\ \leq &\limsup_{i,j\to\infty} \delta^{\alpha-\beta}(h\ddot{o}l_{\Omega,\alpha} u_i + h\ddot{o}l_{\Omega,\alpha} u_j) + \limsup_{i,j\to\infty} 2\delta^{-\beta} \parallel u_i - u_j \parallel_{L^\infty(\Omega)} \leq \\ &\leq C\delta^{\alpha-\beta}, \end{aligned}$$

und u_m ist eine Cauchy-Folge, also konvergent in $C^{0,\beta}(\Omega)$.

///

Für Einbettungen mit höheren Ableitungen muß der Rand von Ω eine gewisse Regularität aufweisen.

Definition 5.2 *Es sei* $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n, k \in \mathbb{N}_0, 0 < \alpha \leq 1$. *Wir sagen* $\partial\Omega$ *ist* C^k *bzw.* $C^{k,\alpha}-$*regulär, geschrieben*

$$\partial\Omega \in C^k \ bzw. \ C^{k,\alpha},$$

wenn für alle $x_0 \in \partial\Omega$ *ein* $\varrho > 0, M < \infty$ *und* $\varphi \in C^k(B_\varrho^{n-1}(0))$ *bzw.* $C^{k,\alpha}(B_\varrho^{n-1}(0))$ *mit* $\varphi(0) = 0, |\varphi| \leq M/2$ *existiert, so daß nach einer geeigneten Rotation*

$$\Omega \cap \left(x_0 + (B_\varrho^{n-1}(0) \times]-M, M[)\right) =$$
$$= x_0 + \{(y,t) \in (B_\varrho^{n-1}(0) \times]-M, M[) \mid t > \varphi(y)\ \}.$$

□

Damit erhalten wir den Kompaktheitssatz für Hölder-Räume mit höheren Ableitungen.

Proposition 5.4 *Für* $\Omega \subset\subset \mathbb{R}^n$ *offen* $\partial\Omega \in C^{0,1}, k \geq l \in \mathbb{N}_0, 0 < \beta, \alpha \leq 1$ *mit*

$$k + \alpha > l + \beta$$

sind die Einbettungen

$$C^{k,\alpha}(\Omega) \hookrightarrow C^{l,\beta}(\Omega)$$

kompakt.

Beweis:
Für $k = l$ folgt die Aussage sofort aus Proposition 5.3. Auch der allgemeine Fall folgt aus Proposition 5.3, wenn wir zeigen, daß die Einbettung

$$C^1(\overline{\Omega}) \hookrightarrow C^{0,1}(\Omega) \tag{5.3}$$

wohldefiniert und stetig ist.

Da $\partial\Omega \in C^{0,1}$, hat Ω nur endlich viele Zusammenhangskomponenten, und diese haben alle positiven Abstand zueinander. Für $x, y \in \Omega$, die nicht in derselben Zusammenhangskomponente liegen, gilt somit

$$|u(x) - u(y)| \leq 2 \parallel u \parallel_{L^\infty(\Omega)} \leq C(\Omega) \parallel u \parallel_{L^\infty(\Omega)} |x - y|.$$

Für $x, y \in \Omega$ in derselben Zusammenhangskomponente gibt es nach dem folgenden Lemma einen stetig differenzierbaren Weg $\gamma : [0,1] \to \Omega$, mit $\gamma(0) = x, \gamma(1) = y$ und

$$L(\gamma) := \int_0^1 |\gamma'(t)|\ \mathrm{d}t \leq C(\Omega)|x - y|.$$

Daraus folgt für $u \in C^1(\overline{\Omega})$

$$|u(x) - u(y)| \leq \int_0^1 |\nabla u(\gamma(t))\gamma'(t)|\ \mathrm{d}t \leq \parallel \nabla u \parallel_{L^\infty(\Omega)} C(\Omega)|x - y|.$$

Dies ergibt

$$lip_\Omega u = höl_{\Omega,1} u \leq C(\Omega) \parallel u \parallel_{C^1(\Omega)},$$

und die Einbettung in (5.3) ist wohldefiniert und stetig.

///

Lemma 5.5 *Es sei* $\Omega \subset\subset \mathbb{R}^n$ *offen und zusammenhängend,* $\partial\Omega \in C^{0,1}$ *. Dann gibt es* $C(\Omega) < \infty$ *, so daß für zwei beliebige Punkte* $x, y \in \Omega$ *ein stetig differenzierbarer Weg* $\gamma : [0,1] \to \Omega,$ *mit* $\gamma(0) = x, \gamma(1) = y$ *und*

$$L(\gamma) := \int_0^1 |\gamma'(t)| \, \mathrm{d}t \leq C(\Omega)|x - y| \tag{5.4}$$

existiert.

Beweis:
Für $x_0 \in \partial\Omega$ setzen wir nach Rotation

$$U(x_0) := x_0 + \Big(B_\varrho^{n-1}(0) \times] - M, M[\Big),$$

wobei $\varrho = \varrho_{x_0} > 0, M = M_{x_0}, \varphi_{x_0} \in C^{0,1}(B_\varrho^{n-1}(0))$ wie in Definition 5.2 sind. Dann ist (5.4) für $U(x_0) \cap \Omega$ mit $C = C(\varrho, M, lip\ \varphi) < \infty$ erfüllt. Für $x_0 \in \Omega$ wählen wir $U(x_0) := B_{\varrho_{x_0}}(x_0) \subset\subset \Omega$, und sehen daß (5.4) für $U(x_0)$ mit $C = 1$ erfüllt.

Da $\overline{\Omega}$ kompakt ist, existieren endlich viele $x_i \in \overline{\Omega}$ mit

$$\overline{\Omega} \subseteq U(x_1) \cup \ldots \cup U(x_N).$$

Für jedes $i = 1, \ldots, N$ ist (5.4) für $U(x_i) \cap \Omega$ mit einem $C_i < \infty$ erfüllt. Wir setzen $C_< := \sup_{i=1}^n C_i$. Weiter gibt es $\delta > 0$, so daß für beliebige $x, y \in \Omega$ mit $|x - y| < \delta$ ein $i = 1, \ldots, N$ mit

$$x, y \in U(x_i) \cap \Omega$$

existiert. Also ist (5.4) für $x, y \in \Omega$ mit $|x - y| < \delta$ mit $C = C_<$ erfüllt.

Da Ω zusammenhängend ist, existiert für $x, y \in \Omega$ mit $|x - y| \geq \delta$ ein stetig differenzierbarer Weg γ mit

$$L(\gamma) \leq \left(\sum_{i=1}^N C_i \ diam(U(x_i) \cap \Omega) \right) \delta^{-1}|x - y| =: C_>|x - y|,$$

der x und y verbindet. Damit erfüllt Ω (5.4) mit $C(\Omega) := \max(C_<, C_>) < \infty$, und das Lemma ist bewiesen.

///

5.2 L^p- und Sobolev-Räume

Wir beginnen mit der Definition der L^p-Räume und stellen einige bekannte Aussagen zusammen.

Definition 5.3 (L^p-Räume) *Es sei* $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ *ein Maßraum, d.h.* $\mathcal{A}$ *ist eine* $\sigma-$*Algebra auf* Ω *und* μ *ein* $\sigma-$*additives Maß auf* $\mathcal{A}$ *. Für* $1 \leq p \leq \infty$ *und meßbares* $u : \Omega \to \mathbb{R}$ *setzen wir*

$$\| u \|_{L^p(\mu)} := \begin{cases} \left(\int\limits_\Omega |u|^p \, \mathrm{d}\mu \right)^{1/p} & \text{\textit{für}} \ 1 \leq p < \infty \ , \\ esssup_\Omega |u| & \text{\textit{für}} \ p = \infty \ , \end{cases}$$

und definieren den Raum der $p-$integrablen bzw. der beschränkten meßbaren Funktionen durch

$$L^p(\mu) = L^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu) := \Big\{ u : \Omega \to \mathbb{R} \textit{ meßbar} \;\Big|\; \int_\Omega |u|^p \; \mathrm{d}\mu < \infty \Big\},$$

wobei wir wie üblich Funktionen identifizieren, die $\mu-$fast überall übereinstimmen. $L^p(\mu)$ ist mit der Norm $\| \cdot \|_{L^p(\mu)}$ ein Banachraum und für $p = 2$ mit dem Skalarprodukt

$$\langle u, v \rangle := \int_\Omega u \; v \; \mathrm{d}\mu$$

ein Hilbertraum.

Für $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ nichtleer schreiben wir abkürzend

$$L^p(\Omega) := L^p(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{L}^n),$$

wobei $\mathcal{L}^n$ das $n-$dimensionale Lebesgue-Maß ist und $\mathcal{A}$ die $\sigma-$Algebra der lebesgue-meßbaren Teilmengen von Ω bezeichnet.

Weiter setzen wir

$$L^p_{loc}(\Omega) := \{ u : \Omega \to \mathbb{R} \mid u \in L^p(\Omega') \textit{ für alle } \Omega' \subset\subset \Omega \}$$

und definieren die Konvergenz $u_m \to u$ in $L^p_{loc}(\Omega)$ durch

$$u_m \to u \quad L^p(\Omega') \textit{ für alle } \Omega' \subset\subset \Omega.$$

$\square$

Für $1 \leq p \leq \infty$ heißt $1 \leq q \leq \infty$ mit

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

der zu p konjugierte Exponent, und es gilt mit der Hölder-Ungleichung

$$\left| \int_\Omega u \; v \; \mathrm{d}\mu \right| \leq \| u \|_{L^p(\mu)} \| v \|_{L^q(\mu)}$$

für $u \in L^p(\mu), v \in L^q(\mu)$. Daraus folgt

$$\mu(\Omega)^{-1/p} \| u \|_{L^p(\mu)} \leq \mu(\Omega)^{-1/q} \| u \|_{L^q(\mu)} \tag{5.5}$$

für $u \in L^q(\mu)$ und $1 \leq p \leq q < \infty$ falls μ endlich ist, und

$$\| u \|_{L^q(\mu)} \leq \| u \|^{\lambda}_{L^p(\mu)} \| u \|^{1-\lambda}_{L^r(\mu)} \tag{5.6}$$

für $u \in L^r(\Omega) \cap L^p(\Omega)$ und $1 \leq p \leq q \leq r < \infty$ mit

$$\frac{1}{q} = \frac{\lambda}{p} + \frac{1-\lambda}{r}.$$

Mit Induktion erhalten wir die verallgemeinerte Hölder-Ungleichung

$$\left| \int\limits_\Omega u_1 \cdots u_m \,\mathrm{d}\mu \right| \leq \| u_1 \|_{L^{p_1}(\mu)} \cdots \| u_m \|_{L^{p_m}(\mu)}$$

für

$$\frac{1}{p_1} + \cdots + \frac{1}{p_m} = 1.$$

Für $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen bemerken wir schließlich, daß die Menge der stetigen Funktionen mit kompaktem Träger in Ω, d.h. $C_0^0(\Omega)$, für $1 \leq p < \infty$ in $L^p(\Omega)$ dicht liegen, und somit $L^p(\Omega)$ separabel ist.

Diese Aussage wollen wir verschärfen, indem wir zeigen, daß die unendlich oft differenzierbaren Funktionen mit kompaktem Träger in Ω, d.h. $C_0^\infty(\Omega)$, für $1 \leq p < \infty$ in $L^p(\Omega)$ dicht liegen. Dazu wählen wir zuerst einen Faltungskern $\lambda \in C_0^\infty(B_1(0)), \lambda \geq 0$ mit

$$\int \lambda = 1.$$

Z.B. können wir

$$\lambda(x) := \begin{cases} c \exp(\frac{1}{|x|^2 - \frac{1}{4}}) & \text{für } |x| \leq 1/2, \\ 0 & \text{für } |x| \geq 1/2, \end{cases}$$

mit einer geeigneten Konstanten $c > 0$ wählen. Wir setzen

$$\lambda_\varepsilon(x) := \varepsilon^{-n} \lambda(\frac{x}{\varepsilon})$$

für $\varepsilon > 0$ und sehen $\lambda_\varepsilon \in C_0^\infty(B_\varepsilon(0))$ und $\int \lambda_\varepsilon = 1$.

Für $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen , $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ definieren wir die Faltung

$$u_\varepsilon(x) := (\lambda_\varepsilon * u)(x) := \int \lambda_\varepsilon(x-y) u(y) \,\mathrm{d}y \quad \text{für } x \in \Omega \text{ mit } \varepsilon < d(x, \partial\Omega). \tag{5.7}$$

Wir sehen

$$u_\varepsilon \in C^\infty(\Omega') \quad \text{für } \Omega' \subset\subset \Omega \text{ mit } d(\Omega', \partial\Omega) > \varepsilon.$$

Für $u \in L^1(\Omega)$ können wir u_ε auf ganz $\mathbb{R}^n$ definieren mit $u_\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Falls $supp(u) \subset\subset \Omega$, so gilt

$$u_\varepsilon \in C_0^\infty(\Omega) \quad \text{für } \varepsilon < d(supp(u), \partial\Omega).$$

Wählen wir $u = \chi_{\Omega''}$ mit $\Omega' \subset\subset \Omega'' \subset\subset \Omega$ und $\varepsilon < d(\Omega', \partial\Omega''), d(\Omega'', \partial\Omega)$, so gilt

$$u_\varepsilon \in C_0^\infty(\Omega), 0 \leq u_\varepsilon \leq 1, u_\varepsilon \equiv 1 \text{ auf } \Omega'.$$

u_ε approximiert u in lokalen Räumen, wie die folgende Proposition zeigt.

Proposition 5.6 *(i) Für $u \in L^p_{loc}(\Omega), 1 \leq p < \infty$ gilt*

$$u_\varepsilon \to u \quad \textit{in } L^p_{loc}(\Omega).$$

Ist $\Omega = \mathbb{R}^n$ und $u \in L^p(\mathbb{R}^n), 1 \leq p < \infty$, so gilt

$$u_\varepsilon \to u \quad \textit{in } L^p(\mathbb{R}^n).$$

(ii) Für $u \in C^0(\Omega)$ *gilt für alle* $\Omega' \subset\subset \Omega$

$$u_\varepsilon \to u \quad \textit{in } C^0(\overline{\Omega'}).$$

(iii) Für $u \in C^{k,\alpha}_{loc}(\Omega), 0 < \alpha \leq 1, k \in \mathbb{N}_0$ *, gilt für* $0 < \beta < \alpha$

$$u_\varepsilon \to u \quad \textit{in } C^{k,\beta}_{loc}(\Omega)$$

und für alle $\Omega' \subset\subset \Omega'' \subset\subset \Omega$ *gilt*

$$\| u_\varepsilon \|_{C^{k,\alpha}(\Omega')} \leq \| u \|_{C^{k,\alpha}(\Omega'')},$$

falls $\varepsilon < d(\Omega', \partial\Omega'')$ *. Ist* $\Omega = \mathbb{R}^n$ *und* $u \in C^{k,\alpha}(\mathbb{R}^n)$*, so gilt für* $0 < \beta < \alpha < 1$*:*

$$u_\varepsilon \to u \quad \textit{in } C^{k,\beta}(\mathbb{R}^n)$$

und für jedes $\varepsilon > 0$*:*

$$\| u_\varepsilon \|_{C^{k,\alpha}(\mathbb{R}^n)} \leq \| u \|_{C^{k,\alpha}(\mathbb{R}^n)} .$$

Beweis:
Für $u \in L^1_{loc}(\Omega), \Omega' \subset\subset \Omega'' \subset\subset \Omega$ und $\varepsilon < d(\Omega', \partial\Omega'')$ gilt, da $\int \lambda_\varepsilon = 1$,

$$\begin{aligned} u_\varepsilon(x) - u(x) &= \\ &= \int_{\Omega''} \lambda_\varepsilon(x-y)(u(y)-u(x)) \, \mathrm{d}y = \\ &= \int_{B_\varepsilon(0)} \lambda_\varepsilon(y)(u(x-y)-u(x)) \, \mathrm{d}y \quad \text{für } x \in \Omega'. \end{aligned} \tag{5.8}$$

(i):
Für $u \in L^p_{loc}(\Omega), 1 \leq p < \infty$ folgt mit der Jensen-Ungleichung

$$\begin{aligned} \| u_\varepsilon - u \|^p_{L^p(\Omega')} &\leq \int_{\Omega'} \int_{B_\varepsilon(0)} \lambda_\varepsilon(y) |u(x-y) - u(x)|^p \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x = \\ = \int_{B_\varepsilon(0)} \lambda_\varepsilon(y) \| u(.-y) - u \|^p_{L^p(\Omega')} \, \mathrm{d}y &\leq \sup_{|y|<\varepsilon} \| u(.-y) - u \|^p_{L^p(\Omega')} \to 0 \end{aligned}$$

für $\varepsilon \to 0$.
Für $u \in L^p(\mathbb{R}^n), 1 \leq p < \infty$ folgt genauso

$$\begin{aligned} \| u_\varepsilon - u \|^p_{L^p(\mathbb{R}^n)} &\leq \int_{\mathbb{R}^n} \int_{B_\varepsilon(0)} \lambda_\varepsilon(y) |u(x-y) - u(x)|^p \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x = \\ = \int_{B_\varepsilon(0)} \lambda_\varepsilon(y) \| u(.-y) - u \|^p_{L^p(\mathbb{R}^n)} \, \mathrm{d}y &\leq \sup_{|y|<\varepsilon} \| u(.-y) - u \|^p_{L^p(\mathbb{R}^n)} \to 0 \end{aligned} \tag{5.9}$$

für $\varepsilon \to 0$.

//

(ii):
Für $u \in C^0(\Omega)$ folgt aus (5.8)

$$\| u_\varepsilon - u \|_{L^\infty(\Omega')} \leq \sup_{x \in \Omega', |x-y|<\varepsilon} |u(x) - u(y)| \to 0,$$

da u gleichmäßig stetig auf $\Omega'' \subset\subset \Omega$ ist.

//

(iii):
Für $x \in \Omega'$ gilt $B_\varepsilon(x) \subset\subset \Omega'', \lambda_\varepsilon(x - .) \in C_0^\infty(\Omega'')$ und

$$\partial^\gamma u_\varepsilon(x) = \int_{\Omega''} \lambda_\varepsilon(x-y) \partial^\gamma u(y) \, \mathrm{d}y$$

für $|\gamma| \leq k$. Daher genügt es $k = 0$ zu betrachten. Aus (ii) wissen wir bereits

$$\| u_\varepsilon - u \|_{L^\infty(\Omega')} \to 0.$$

Nun seien $x_1, x_2 \in \Omega'$. Mit (5.8) folgt

$$\begin{aligned} &|(u_\varepsilon - u)(x_1) - (u_\varepsilon - u)(x_2)| \leq \\ &\leq \int_{B_\varepsilon(0)} \lambda_\varepsilon(y) |(u(x_1 - y) - u(x_1)) - (u(x_2 - y) - u(x_2))| \, \mathrm{d}y \leq \\ &\leq 2 h\ddot{o}l_{\Omega'',\alpha}(u) \min(|x_1 - x_2|^\alpha, \varepsilon^\alpha) \leq 2\varepsilon^{\alpha-\beta} h\ddot{o}l_{\Omega'',\alpha}(u) |x_1 - x_2|^\beta. \end{aligned}$$

Dies ergibt

$$h\ddot{o}l_{\Omega',\beta}(u_\varepsilon - u) \leq 2\varepsilon^{\alpha-\beta} h\ddot{o}l_{\Omega'',\alpha} u \to 0$$

für $\varepsilon \to 0$. Weiter gilt

$$|u_\varepsilon(x)| \leq \int_{B_\varepsilon(0)} \lambda_\varepsilon(y) |u(x-y)| \, \mathrm{d}y \leq \| u \|_{L^\infty(\Omega'')}$$

für $x \in \Omega'$ und

$$|u_\varepsilon(x_1) - u_\varepsilon(x_2)| \leq \int_{B_\varepsilon(0)} \lambda_\varepsilon(y) |u(x_1 - y) - u(x_2 - y)| \, \mathrm{d}y \leq h\ddot{o}l_{\Omega'',\alpha}(u) |x_1 - x_2|^\alpha,$$

für $x_1, x_2 \in \Omega'$. Dies ergibt

$$\| u_\varepsilon \|_{C^{k,\alpha}(\Omega')} \leq \| u \|_{C^{k,\alpha}(\Omega'')} .$$

Die entsprechenden Aussagen im Falle $\Omega = \mathbb{R}^n$ und $u \in C^{k,\alpha}(\mathbb{R}^n)$ werden analog bewiesen.

///

Daraus folgt sofort

Proposition 5.7 $C_0^\infty(\Omega)$ *liegt dicht in* $L^p(\Omega)$ *für* $1 \leq p < \infty$ *.*

Beweis:
Wir wissen bereits, daß $C_0^0(\Omega)$ dicht in $L^p(\Omega)$ liegt. Für $u \in C_0^0(\Omega), supp(u) \subset\subset \Omega' \subset\subset \Omega, 0 < \varepsilon < d(supp(u), \partial\Omega')$ gilt

$$u_\varepsilon \in C_0^\infty(\Omega') \subseteq C_0^\infty(\Omega)$$

und mit Proposition 5.6 (ii) folgt

$$\| u_\varepsilon - u \|_{L^p(\Omega)} \leq \mathcal{L}^n(\Omega')^{1/p} \| u_\varepsilon - u \|_{L^\infty(\Omega')} \to 0$$

für $\varepsilon \to 0$.

///

Wir kommen zu den Sobolev-Räumen.

Definition 5.4 (Sobolev-Räume) *Es sei* $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ *offen und nichtleer* $1 \leq p \leq \infty$. *Dann ist der Raum der Sobolevfunktionen mit* k *-fachen* L^p*-integrierbaren schwachen Ableitungen definiert durch*

$$W^{k,p}(\Omega) := \{u \in L^p(\Omega) \mid \quad \text{Für } |\gamma| \leq k \text{ existiert } u^\gamma \in L^p(\Omega) \text{ mit } \int u^\gamma \varphi = (-1)^{|\gamma|} \int u \partial^\gamma \varphi \text{ für } \varphi \in C_0^\infty(\Omega) \ \}.$$

Wir nennen

$$D^\gamma u := u^\gamma$$

die schwache Ableitung von u *und definieren die Norm auf* $W^{k,p}(\Omega)$ *durch*

$$\| u \|_{W^{k,p}(\Omega)} := \sum_{0 \leq |\gamma| \leq k} \| D^\gamma u \|_{L^p(\Omega)} .$$

Den Abschluß der unendlich oft differenzierbaren Funktionen mit kompaktem Träger $C_0^\infty(\Omega)$ *in* $W^{k,p}(\Omega)$ *definieren wir für* $1 \leq p < \infty$ *als*

$$W_0^{k,p}(\Omega) := \overline{C_0^\infty(\Omega)}.$$

Für $\Omega \subseteq A \subseteq \overline{\Omega}$ *setzen wir*

$$W_{loc}^{k,p}(A) := \{u \in L_{loc}^p(\Omega) \mid \forall x \in A : \exists \varrho > 0 : u \in W^{k,p}(\Omega \cap B_\varrho(x)) \ \}.$$

Zur Vereinfachung der Schreibweise setzen wir abkürzend $W^{0,p}(\Omega) := L^p(\Omega)$.

Wir nennen $W_0^{k,p}(\Omega)$ *und* $W^{k,p}(\Omega)$ *Sobolev-Räume und ihre Elemente Sobolevfunktionen.*

□

Proposition 5.8 $W^{k,p}(\Omega)$ *und* $W_0^{k,p}(\Omega)$ *sind Banachräume, und für* $p = 2$ *sind* $W^{k,2}(\Omega)$ *und* $W_0^{k,2}(\Omega)$ *mit dem Skalarprodukt*

$$\langle u, v \rangle := \sum_{|\gamma| \leq k} \int_\Omega \partial^\gamma u \ \partial^\gamma v$$

Hilberträume.

Beweis:
Wir sehen, daß $W^{k,p}(\Omega)$ isometrisch

$$W^{k,p}(\Omega) \cong \{(u_\gamma)_{0\le|\gamma|\le k} \in L^p(\Omega)\times\ldots\times L^p(\Omega) \mid$$
$$\Lambda^\gamma_\varphi(u_\gamma) := \textstyle\int u\cdot D^\gamma\varphi - (-1)^{|\gamma|}\int u_\gamma\varphi = 0 \quad \forall\varphi\in C_0^\infty(\Omega)\}.$$

zu einem abgeschlossenen Unterraum von $L^p(\Omega)\times\ldots\times L^p(\Omega)$ ist und somit ein Banachraum. Damit ist auch $W_0^{k,p}(\Omega)$ als abgeschlossener Unterraum von $W^{k,p}(\Omega)$ ein Banachraum.

Klarerweise sind obige Definitionen Skalarprodukte, deren Norm äquivalent zu den Normen auf $W^{k,2}(\Omega)$ und $W_0^{k,2}(\Omega)$ sind. Also sind diese Räume Hilberträume.

///

Folgende Proposition gibt eine Charakterisierung der L^p- und Sobolev-Räume für $1\le p\le\infty$.

Proposition 5.9 *1.) Für* $1<p\le\infty, k\in\mathbb{N}_0$ *, gilt* $u\in W^{k,p}(\Omega)$ *genau dann, wenn* $u\in L^1_{loc}(\Omega)$ *ist und die linearen Funktionale* $(\Lambda_\gamma u): C_0^\infty(\Omega)\to\mathbb{R}$

$$(\Lambda_\gamma u)(\varphi) := \int_\Omega u\cdot D^\gamma\varphi$$

$$|(\Lambda_\gamma u)(\varphi)| \le M \parallel \varphi \parallel_{L^q(\Omega)}$$

für $|\gamma|\le k, \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ *und ein* $M<\infty$ *erfüllen, und in diesem Fall gilt:*

$$\parallel u \parallel_{W^{k,p}(\Omega)} \le C_{n,k}\, M.$$

2.) Speziell für $k=0$ *und* $p=1$ *gelten folgende Aussagen: Ist entweder* $u:\Omega\to[0,\infty]$ $\mathcal{L}^n-$*messbar oder ist* $u\in L^1_{loc}(\Omega)$*, und gilt in beiden Fällen ausserdem*

$$|\int_\Omega u\,\varphi| \le M \parallel \varphi \parallel_{L^\infty(\Omega)}$$

für jedes $\varphi\in C_0^\infty(\Omega)$*, so folgt bereits* $u\in L^1(\Omega)$ *mit* $\parallel u \parallel_{L^1(\Omega)} \le M$*.*

Beweis:
1.) Es sei zunächst $1<p\le\infty$ und somit $q<\infty$. Wir fixieren einen Multi-Index γ mit $|\gamma|\le k$ und definieren auf dem dichten Teilraum $C_0^\infty(\Omega)$ von $L^q(\Omega)$ das lineare Funktional

$$F_\gamma(\varphi) := \int_\Omega u\, D^\gamma\varphi.$$

Anhand der vorausgesetzten Abschätzung ist dieses stetig bezüglich der $L^q(\Omega)-$Norm auf $C_0^\infty(\Omega)$ und besitzt daher eine eindeutige stetige Fortsetzung $\tilde{F}_\gamma$ auf ganz $L^q(\Omega)$, also $\tilde{F}_\gamma\in L^q(\Omega)^*$, dessen Norm $\le M$ ist. Wegen $q<\infty$ erhalten wir aus dem isometrischen Isomorphismus zwischen $L^q(\Omega)^*$ und $L^p(\Omega)$ ein eindeutiges $f^\gamma\in L^p(\Omega)$, welches

$$\tilde{F}_\gamma(\varphi) = (-1)^{|\gamma|}\int_\Omega f^\gamma\,\varphi$$

für jedes $\varphi \in L^q(\Omega)$ und ausserdem $\| f^\gamma \|_{L^p(\Omega)} = \| \tilde{F}_\gamma \| \leq M$ erfüllt. Da dies insbesondere

$$\int_\Omega u\, D^\gamma \varphi = (-1)^{|\gamma|} \int_\Omega f^\gamma \varphi \qquad \text{für alle } \varphi \in C_0^\infty(\Omega)$$

impliziert, erhalten wir sofort $u = f^0 \in L^p(\Omega)$ und ausserdem $u \in W^{k,p}(\Omega)$, falls $k > 0$, mit den schwachen Ableitungen f^γ, woraus auch die Behauptung $\| u \|_{W^{k,p}(\Omega)} \leq C_{n,k}\, M$ folgt. Die andere Beweisrichtung folgt sofort aus der Hölderschen Ungleichung und mit $M := \| u \|_{W^{k,p}(\Omega)}$.
2.) Im Spezialfall $k = 0$ und $p = 1$ betrachten wir in beiden Fällen aus der Behauptung die durch 1 beschränkte Funktion

$$g(x) := \begin{cases} \frac{u(x)}{|u(x)|} & \text{falls } u(x) \neq 0\ , \\ 0 & \text{falls } u(x) = 0. \end{cases}$$

Sei nun u nicht-negativ und $\mathcal{L}^n-$messbar. Hier ist also $g = \chi_{supp(u)} \geq 0$. Für beliebige, offene $D \subset\subset \Omega' \subset\subset \Omega$ definieren wir die Testfunktionen $\varphi_\epsilon := \lambda_\epsilon * (\chi_D g)$, die für $\epsilon < \operatorname{dist}(D, \partial\Omega')$ in $C_0^\infty(\Omega')$ liegen, und erhalten zunächst:

$$\left| \int_\Omega u \cdot \varphi_\epsilon \right| \leq M \, \| \varphi_\epsilon \|_{L^\infty(\Omega)} \leq M.$$

Wegen $g \geq 0$ sind auch die Glättungen φ_ϵ nicht-negativ und somit auch die Produkte $u\,\varphi_\epsilon$. Da diese ausserdem $\mathcal{L}^n-$messbar sind und eine Teilfolge $\{\varphi_{\epsilon_j}\}$ der Familie $\{\varphi_\epsilon\}$ punktweise gegen $\chi_D g$ f.ü. auf Ω konvergiert, erhalten wir aus dem Lemma von Fatou:

$$\int_D u = \int_D u\, g \leq \liminf_{j\to\infty} \int_\Omega u\, \varphi_{\epsilon_j} \leq M$$

und somit auch $u \in L^1(\Omega)$, mit $\| u \|_{L^1(\Omega)} \leq M$. Im Fall $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ führen wir ebenfalls die obigen Glättungen $\varphi_\epsilon := \lambda_\epsilon * (\chi_D g)$ aus $C_0^\infty(\Omega')$ für $\epsilon < \operatorname{dist}(D, \partial\Omega')$ ein, nutzen hier jedoch aus, dass $|u \cdot \varphi_\epsilon| \leq |u| \in L^1(\Omega')$ gilt, und erhalten aus dem Konvergenzsatz von Lebesgue:

$$\int_D |u| = \int_D u\, g = \lim_{j\to\infty} \int_\Omega u\, \varphi_{\epsilon_j} \leq M$$

und somit wieder $u \in L^1(\Omega)$, mit $\| u \|_{L^1(\Omega)} \leq M$.

///

Proposition 5.10 *Es sei* $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ *offen, zusammenhängend, und* $u \in W^{1,1}_{loc}(\Omega)$ *mit* $\nabla u = 0$. *Dann ist*

$$u \equiv const \quad \textit{fast überall auf}\, \Omega.$$

Beweis:
Wir betrachten beliebiges $x_0 \in \Omega$ und $B_{2\varrho}(x_0) \subseteq \Omega$. Für $\varepsilon < \varrho$ ist die Faltung $u_\varepsilon \in C^\infty(B_\varrho(x_0))$ und für $x \in B_\varrho(x_0)$ ist $\lambda_\varepsilon(x - .) \in C_0^\infty(B_{2\varrho}(x_0)) \subseteq C_0^\infty(\Omega)$. Dies ergibt

$$\nabla u_\varepsilon(x) = \int \nabla\lambda_\varepsilon(x-y) u(y)\, \mathrm{d}y = \int \lambda_\varepsilon(x-y) \nabla u(y)\, \mathrm{d}y = 0.$$

Daher ist $u_\varepsilon \equiv const$ auf $B_\varrho(x_0)$, und, da $u_\varepsilon \to u$ in $L^1(B_\varrho(x_0))$, ist $u \equiv const$ fast überall auf $B_\varrho(x_0)$. Da Ω zusammenhängend ist, ist $u \equiv const$ fast überall auf Ω .

///

Sobolevfunktionen werden durch glatte Faltungen lokal approximiert werden.

Proposition 5.11 *Für* $u \in W^{k,p}(\Omega), k \in \mathbb{N}, 1 \leq p < \infty$ *gilt*

$$u_\varepsilon \to u \quad in\ W^{k,p}_{loc}(\Omega).$$

Ist $supp(u) \subset\subset \Omega$ *oder* $\Omega = \mathbb{R}^n$ *, so existieren* $u_m \in C_0^\infty(\Omega)$ *mit*

$$u_m \to u \quad in\ W^{k,p}(\Omega),$$

also

$$u \in W_0^{k,p}(\Omega), \quad wenn\ supp(u) \subset\subset \Omega, \tag{5.10}$$

und

$$W^{k,p}(\mathbb{R}^n) = W_0^{k,p}(\mathbb{R}^n).$$

Ist schließlich $\Omega = \mathbb{R}^n_+ := \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+ :=]0, \infty[$ *, so existieren* $u_m \in C_0^\infty(\overline{\mathbb{R}^n_+})$ *mit*

$$u_m \to u \quad in\ W^{k,p}(\mathbb{R}^n_+),$$

d.h.

$$W^{k,p}(\mathbb{R}^n_+) = \overline{C_0^\infty(\overline{\mathbb{R}^n_+})}.$$

Beweis:
Wir betrachten die in (5.7) definierte Faltung $u_\varepsilon := \lambda_\varepsilon * u \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Für $x \in \Omega, \varepsilon < d(x, \partial\Omega)$ ist $\lambda_\varepsilon(x - .) \in C_0^\infty(\Omega)$, und wir sehen für $|\gamma| \leq k$

$$\partial^\gamma u_\varepsilon(x) = \int_\Omega \partial^\gamma \lambda_\varepsilon(x-y)\ u(y)\ \mathrm{d}y =$$
$$= (-1)^{|\gamma|} \int_\Omega \partial_y^\gamma \lambda_\varepsilon(x-y)\ u(y)\ \mathrm{d}y = \int_\Omega \lambda_\varepsilon(x-y) \partial^\gamma u(y)\ \mathrm{d}y = (\partial^\gamma u)_\varepsilon(x).$$

Da $\partial^\gamma u \in L^p_{loc}(\Omega)$ folgt mit Proposition 5.6

$$\partial^\gamma(u_\varepsilon) = (\partial^\gamma u)_\varepsilon \to \partial^\gamma u \quad \text{in } L^p_{loc}(\Omega),$$

also $u_\varepsilon \to u$ in $W^{k,p}_{loc}(\Omega)$.

Ist $supp(u) \subset\subset \Omega$ oder $\Omega = \mathbb{R}^n$, so gilt mit obiger Rechnung und Proposition 5.6

$$u_\varepsilon \to u \quad \text{in } W^{k,p}(\Omega).$$

Im Fall $supp(u) \subset\subset \Omega$ wissen wir weiter, daß $u_\varepsilon \in C_0^\infty(\Omega)$, wenn $\varepsilon < d(supp(u), \partial\Omega)$.

Im Fall $\Omega = \mathbb{R}^n$ können wir mit obigem Argument $u \in W^{k,p}(\mathbb{R}^n) \cap C^\infty(\mathbb{R}^n)$ annehmen. Wir wählen $\eta_R \in C_0^\infty(B_{2R}(0)), \eta_R \equiv 1$ auf $B_R(0), R \geq 1$ mit

$$|D^l \eta_R| \leq C_l R^{-l} \chi_{B_{2R}(0) - B_R(0)} \quad \text{für } l \in \mathbb{N}$$

und setzen

$$u_R := \eta_R u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n).$$

Dann gilt für $|\gamma| \leq k$

$$\partial^\gamma u_R = \sum_{0 \leq \beta \leq \gamma} \binom{\gamma}{\beta} \partial^\beta \eta_R \, D^{\gamma-\beta} u,$$

also

$$\| \partial^\gamma u_R - \eta_R \partial^\gamma u \|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq C_{n,k} R^{-1} \| u \|_{W^{k,p}(\mathbb{R}^n)} \to 0 \quad \text{für } R \to \infty.$$

Da $\eta_R \partial^\gamma u \to \partial^\gamma u$ in $L^p(\mathbb{R}^n)$ folgt

$$\partial^\gamma u_R \to \partial^\gamma u \quad \text{in } L^p(\mathbb{R}^n),$$

und damit

$$u_R \to u \quad \text{in } W^{k,p}(\mathbb{R}^n).$$

Der Fall $\Omega = \mathbb{R}^n_+$ folgt genauso wie $\Omega = \mathbb{R}^n$, wenn man den Faltungskern $\lambda \in C_0^\infty(B_1(0) \cap \mathbb{R}^n_-), \mathbb{R}^n_- := \mathbb{R}^{n-1} \times]-\infty, 0[$ wählt.

///

Schwache Ableitungen können durch endliche Differenzen approximiert werden. Für $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $h \neq 0, l = 1, \ldots, n,$ und $u : \Omega \to \mathbb{R}$ setzen wir

$$\partial_l^h u(x) := \frac{u(x + he_l) - u(x)}{h} \quad \text{für } x \in \Omega \cap (\Omega - he_l). \tag{5.11}$$

Proposition 5.12 *Es sei* $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ *offen* $k \in \mathbb{N}, 1 \leq p < \infty, h \neq 0, l = 1, \ldots, n$ *. Für* $u \in W^{k,p}(\Omega), \Omega' \subset\subset \Omega, |h| < d(\Omega', \partial\Omega)$ *gilt*

$$\| \partial_l^h u \|_{W^{k-1,p}(\Omega')} \leq \| \partial_l u \|_{W^{k-1,p}(\Omega)} \tag{5.12}$$

und

$$\partial_l^h u \to \partial_l u \quad \text{in } W^{k-1,p}_{loc}(\Omega) \text{ für } h \to 0. \tag{5.13}$$

Gilt umgekehrt für $1 < p \leq \infty, u \in W^{k-1,p}(\Omega)$

$$\| \partial_l^h u \|_{W^{k-1,p}(\Omega')} \leq C(\Omega') \quad \text{für alle } \Omega' \subset\subset \Omega, \tag{5.14}$$

$|h| < d(\Omega', \partial\Omega), l = 1, \ldots, n$ *, so ist* $u \in W^{k,p}_{loc}(\Omega)$ *und*

$$\| \partial_l u \|_{W^{k-1,p}(\Omega')} \leq C_{n,k}(\Omega'). \tag{5.15}$$

Beweis:

Zuerst betrachten wir $u \in W^{k,p}(\Omega) \cap C^\infty(\Omega)$ und erhalten für $|\gamma| \leq k - 1$ für $x \in \Omega', |h| < d(\Omega', \partial\Omega)$

$$\partial^\gamma \partial_l^h u(x) = \frac{\partial^\gamma u(x + he_l) - \partial^\gamma u(x)}{h} = \int_0^1 \partial^\gamma \partial_l u(x + the_l) \, \mathrm{d}t$$

und

$$\| \partial^\gamma \partial_l^h u \|^p_{L^p(\Omega')} \leq \int_{\Omega'} \int_0^1 |\partial^\gamma \partial_l u(x + the_l)|^p \, \mathrm{d}t \, \mathrm{d}x \leq$$

$$\leq \int_0^1 \int_\Omega |\partial^\gamma \partial_l u(y)|^p \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}t \leq \| \partial^\gamma \partial_l u \|^p_{L^p(\Omega)},$$

und (5.12) folgt für glattes u . Weiter ist für glattes u die Konvergenz in (5.13) trivial.

Für allgemeines u existiert nach Proposition 5.11 $u_m \in C^\infty(\Omega)$ mit $u_m \to u$ in $W^{k,p}_{loc}(\Omega)$. Wir setzen für $|h| < \delta < d(\Omega', \partial\Omega)$

$$\Omega'' := \{x \in \mathbb{R}^n \mid d(x, \Omega') < \delta \} \subset\subset \Omega$$

und erhalten

$$\| \partial_l^h u \|_{W^{k-1,p}(\Omega')} \leftarrow \| \partial_l^h u_m \|_{W^{k-1,p}(\Omega')} \le \| \partial_l u_m \|_{W^{k-1,p}(\Omega'')} \to \| \partial_l u \|_{W^{k-1,p}(\Omega'')},$$

also (5.12). Weiter gilt für alle m

$$\begin{aligned}\limsup_{h\to 0} \| \partial_l^h u - \partial_l u \|_{W^{k-1,p}(\Omega')} \le \limsup_{h\to 0} \| \partial_l^h u_m - \partial_l u_m \|_{W^{k-1,p}(\Omega')} \\ + \| \partial_l^h (u - u_m) \|_{W^{k-1,p}(\Omega')} + \| \partial_l u_m - \partial_l u \|_{W^{k-1,p}(\Omega')} \le \\ \le 2 \| \partial_l u_m - \partial_l u \|_{W^{k-1,p}(\Omega'')},\end{aligned}$$

und (5.13) folgt für $m \to \infty$.

Gilt umgekehrt (5.14), so folgt für $p^{-1} + q^{-1} = 1, \varphi \in C_0^\infty(\Omega'), |\gamma| \le k-1, 0 < h < d(supp\varphi, \partial\Omega')$,

$$\left| \int u \partial_l \partial^\gamma \varphi \, \mathrm{d}\mathcal{L}^n \right| = \left| \int (\partial^\gamma u) \partial_l \varphi \, \mathrm{d}\mathcal{L}^n \right| \leftarrow \left| \int (\partial^\gamma u) \partial_l^{-h} \varphi \, \mathrm{d}\mathcal{L}^n \right| = \left| \int (\partial^\gamma \partial_l^h u) \varphi \, \mathrm{d}\mathcal{L}^n \right| \le$$

$$\le \| \partial_l^h u \|_{W^{k-1,p}(\Omega')} \| \varphi \|_{L^q(\Omega)} \le C(\Omega') \| \varphi \|_{L^q(\Omega)} .$$

Da klarerweise

$$\left| \int u \partial^\gamma \varphi \, \mathrm{d}\mathcal{L}^n \right| \le \| u \|_{W^{k-1,p}(\Omega')} \| \varphi \|_{L^q(\Omega)}$$

und $1 < p \le \infty$, folgt zusammen $u \in W^{k,p}_{loc}(\Omega)$ und (5.15) mit Proposition 5.9.

///

Bemerkung:
Für $u \in W^{2,p}(\Omega), 1 \le p < \infty$ sehen wir durch zweimalige Anwendung von (5.12) für $\Omega' \subset\subset \Omega'' \subset\subset \Omega, 0 < h < d(\Omega', \partial\Omega''), d(\Omega'', \partial\Omega)$,

$$\| \partial_l^{-h} \partial_l^h u \|_{L^1(\Omega')} \le \| \partial_l \partial_l^h u \|_{L^1(\Omega'')} \le \| \partial_{ll} u \|_{L^1(\Omega)} \tag{5.16}$$

und durch Approximation mit Proposition 5.11

$$\partial_l^{-h} \partial_l^h u \to \partial_{ll} u \quad \text{in } L^p_{loc}(\Omega). \tag{5.17}$$

□

Für $p = \infty$ können wir $W^{1,\infty}$ mit Hölder-Räumen identifizieren.

Proposition 5.13 *Für* $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ *offen,* $k \in \mathbb{N}$ *gilt*

$$C^{k-1,1}(\Omega) \subseteq W^{k,\infty}(\Omega)$$

und

$$\| \nabla u \|_{L^\infty(\Omega)} \leq C(n)\ lip_\Omega u \quad \text{für } u \in C^{0,1}(\Omega).$$

Ist $\Omega \subset\subset \mathbb{R}^n$ *mit* $\partial\Omega \in C^{0,1}$ *oder* Ω *konvex, so gilt*

$$W^{k,\infty}(\Omega) \subseteq C^{k-1,1}(\Omega),$$

und, falls Ω *zusammenhängend ist,*

$$lip_\Omega u \leq C(\Omega, n) \| \nabla u \|_{L^\infty(\Omega)} \quad \text{für } u \in W^{1,\infty}(\Omega).$$

Beweis:
Es genügt den Fall $k = 1$ zu beweisen.

Für $u \in C^{0,1}(\Omega), \varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ und $0 < h < d(supp(\varphi), \partial\Omega), l = 1, \ldots, n$ gilt mit diskreter partieller Integration

$$\left| \int u\ \partial_l \varphi \right| \leftarrow \left| \int u\ \partial_l^h \varphi \right| = \left| \int \partial_l^{-h} u\ \varphi \right| \leq lip_\Omega u\ \| \varphi \|_{L^1(\Omega)}.$$

Dann folgt mit Proposition 5.9, daß $u \in W^{1,\infty}(\Omega)$ und

$$\| \nabla u \|_{L^\infty(\Omega)} \leq C_n\ lip_\Omega u. \tag{5.18}$$

Nun sei $u \in W^{1,\infty}(\Omega)$. Zuerst betrachten wir $\Omega = B_1(0)$. Dann ist die Faltung $u_\varepsilon := \lambda_\varepsilon * u \in C^\infty(B_{1-\varepsilon}(0))$. Da $\lambda_\varepsilon(x - .) \in C_0^\infty(B_1(0))$ für $x \in B_{1-\varepsilon}(0)$, folgt

$$\nabla u_\varepsilon(x) = \int \nabla \lambda_\varepsilon(x-y) u(y)\ \mathrm{d}y = \int \lambda_\varepsilon(x-y) \nabla u(y)\ \mathrm{d}y$$

und

$$lip_{B_{1-\varepsilon}(0)} u_\varepsilon \leq \| \nabla u \|_{L^\infty(B_1(0))}.$$

Gemäß Proposition 5.6 konvergiert $u_\varepsilon \to u$ in $L^1_{loc}(B_1(0))$ für $\varepsilon \downarrow 0$. Dies ergibt $u \in C^{0,1}(B_1(0))$ für einen geeigneten Repräsentanten und

$$lip_{B_1(0)} u \leq \| \nabla u \|_{L^\infty(B_1(0))}. \tag{5.19}$$

Für allgemeines $\Omega \subset\subset \mathbb{R}^n$ mit $\partial\Omega \in C^{0,1}$ oder für beliebiges, konvexes Ω zeigen wir nun:

$$W^{1,\infty}(\Omega) = C^{0,1}(\Omega).$$

Für $\Omega \subset\subset \mathbb{R}^n$ zusammenhängend mit $\partial\Omega \in C^{0,1}$ existiert nach Proposition 5.5 für beliebige $x, y \in \Omega$ ein stetig differenzierbaren Weg $\gamma : [0,1] \to \Omega,$ mit $\gamma(0) = x, \gamma(1) = y$ und

$$L(\gamma) := \int_0^1 |\gamma'(t)|\ \mathrm{d}t \leq C(\Omega)|x - y|.$$

Gleiches gilt für konvexes Ω mit $C(\Omega) = 1$. Wir unterteilen $[0,1]$ in $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_N = 1$ mit

$$|\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})| < d(\gamma([0,1]), \partial\Omega) =: \delta \quad \text{für } i = 1, \ldots, N.$$

Dann folgt aus (5.19), dass $u \in W^{1,\infty}(B_\delta(\gamma(t_i))) \subseteq C^{0,1}(B_\delta(\gamma(t_i)))$ für $i = 1, \ldots, N$ ist und dass

$$|u(\gamma(t_i)) - u(\gamma(t_{i-1}))| \leq lip_{B_\delta(\gamma(t_i))} u \, |\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})| \leq$$
$$\leq \| \nabla u \|_{L^\infty(B_\delta(\gamma(t_i)))} \int_{t_{i-1}}^{t_i} |\gamma'|$$

gilt, also mit Summation über i:

$$|u(x) - u(y)| \leq \| \nabla u \|_{L^\infty(\Omega)} \int_0^1 |\gamma'| \leq C(\Omega) \| \nabla u \|_{L^\infty(\Omega)} |x - y|.$$

Dies ergibt $u \in C^{0,1}(\Omega)$ und

$$lip_\Omega u \leq C(\Omega) \| \nabla u \|_{L^\infty(\Omega)} .$$

Ist Ω nicht zusammenhängend, so ist $u \in C^{0,1}(\Omega')$ für alle Zusammenhangskomponenten Ω' von Ω . Da $\partial\Omega \in C^{0,1}$, gibt es nur endlich viele Zusammenhangskomponenten und diese haben positiven Abstand zueinander. Dies ergibt $u \in C^{0,1}(\Omega)$.

///

Wir stellen einige einfache Rechenregeln für Sobolevfunktionen zusammen.

Proposition 5.14 (Produktregel) *Es sei* $u \in W^{1,p}(\Omega), v \in W^{1,q}(\Omega), 1 \leq p, q, r \leq \infty$ *mit*

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}.$$

Dann ist $uv \in W^{1,r}(\Omega)$ *und*

$$\nabla(uv) = (\nabla u)v + u\nabla v. \tag{5.20}$$

Beweis:
Zuerst betrachten wir $p, q < \infty$. Gemäß Proposition 5.11 existieren $u_m, v_m \in C^\infty(\Omega)$ mit

$$u_m \to u \text{ in } W^{1,p}_{loc}(\Omega), \quad v_m \to v \text{ in } W^{1,q}_{loc}(\Omega).$$

Dann gilt $u_m v_m \in C^\infty(\Omega)$, und mit der Hölder-Ungleichung

$$u_m v_m \to uv,$$
$$\nabla(u_m v_m) = (\nabla u_m) v_m + u_m \nabla v_m \to (\nabla u)v + u\nabla v$$

jeweils in $L^r_{loc}(\Omega)$. Damit folgt $uv \in W^{1,r}_{loc}(\Omega)$ und

$$\nabla(uv) = (\nabla u)v + u\nabla v \in L^r(\Omega).$$

Da $uv \in L^r(\Omega)$, folgt $uv \in W^{1,r}(\Omega)$.

Ohne die Endlichkeitsannahme an p, q erhalten wir für $r > 1$ zuerst $uv \in W^{1,1}_{loc}(\Omega)$ und anschließend $uv \in W^{1,r}(\Omega)$, da $uv, \nabla(uv) \in L^r(\Omega)$.

Ist $r = 1$ und o.B.d.A. $p = \infty, q = 1$, so approximieren wir mit $u_m, v_m \in C^\infty(\Omega), u_m, v_m \to u, v \text{ in } W^{1,1}_{loc}(\Omega)$ und sehen für festes $l \in \mathbb{N}$, daß $u_m v_l \to uv_l \text{ in } W^{1,1}_{loc}(\Omega)$ für $m \to \infty$, und uv_l erfüllt (5.20). Dann folgt $uv_l \to uv \text{ in } W^{1,1}_{loc}(\Omega)$ für $l \to \infty$ und (5.20), da $u \in W^{1,\infty}(\Omega)$.

///

Proposition 5.15 (Kettenregel) *Es sei* $u \in W^{1,p}(\Omega), 1 \leq p \leq \infty$ *und* $f \in C^1(\mathbb{R}), f(0) = 0, f' \in L^\infty(\mathbb{R})$ *. Dann ist* $f(u) \in W^{1,p}(\Omega)$ *und*

$$\nabla(f(u)) = f'(u)\nabla u.$$

Beweis:
Gemäß Proposition 5.11 existieren $u_m \in C^\infty(\Omega)$ mit

$$u_m \to u \quad \text{in } W^{1,1}_{loc}(\Omega)$$

und $u_m, \nabla u_m \to u, \nabla u$ punktweise fast überall. Es gilt $f(u_m) \in C^1(\Omega) \subseteq W^{1,1}_{loc}(\Omega)$ und

$$|f(u_m) - f(u)| \leq \| f' \|_{L^\infty(\mathbb{R})} |u_m - u|,$$
$$f'(u_m)\nabla u_m \to f'(u)\nabla u \quad \text{punktweise fast überall in } \Omega.$$

Dann folgt die Konvergenz in $L^1_{loc}(\Omega)$ und somit $f(u) \in W^{1,1}_{loc}(\Omega)$ und

$$\nabla(f(u)) = f'(u)\nabla u \in L^p(\Omega).$$

Da weiter

$$|f(u)| \leq \| f' \|_{L^\infty(\mathbb{R})} |u|,$$

da $f(0) = 0$, folgt $f(u) \in L^p(\Omega)$ und schließlich $f(u) \in W^{1,p}(\Omega)$.

///

Proposition 5.16 *Für* $u \in W^{1,1}(\Omega)$ *ist* $|u| \in W^{1,1}(\Omega)$ *und*

$$\nabla|u| = \nabla u \cdot \begin{cases} 1 & \textit{für } u > 0 \ , \\ 0 & \textit{für } u = 0 \ , \\ -1 & \textit{für } u < 0 \ . \end{cases}$$

Weiter gilt

$$\nabla u = 0 \quad \textit{fast überall auf } [u = 0] \cap \Omega.$$

Beweis:
Mit Proposition 5.15 ist

$$u_\varepsilon := ((u + \theta\varepsilon)^2 + \varepsilon^2)^{1/2} - \varepsilon\sqrt{\theta^2 + 1} \in W^{1,1}(\Omega)$$

für alle $\theta \in \mathbb{R}$ und

$$\nabla u_\varepsilon = \frac{u + \theta\varepsilon}{((u + \theta\varepsilon)^2 + \varepsilon^2)^{1/2}}\nabla u.$$

Wir sehen $u_\varepsilon \to |u|$ in $L^1(\Omega)$ und

$$\nabla u_\varepsilon \to \nabla u \cdot \begin{cases} 1 & \text{für } u > 0 \ , \\ \dfrac{\theta}{\sqrt{\theta^2 + 1}} & \text{für } u = 0 \ , \\ -1 & \text{für } u < 0 \ , \end{cases} \quad \text{punktweise fast überall in } \Omega \text{ und in } L^1(\Omega).$$

Daraus folgt $|u| \in W^{1,1}(\Omega)$ und

$$\nabla|u| = \nabla u \cdot \begin{cases} 1 & \text{für } u > 0\ , \\ \dfrac{\theta}{\sqrt{\theta^2+1}} & \text{für } u = 0\ , \\ -1 & \text{für } u < 0\ . \end{cases}$$

Da die schwache Ableitung wohldefiniert ist, ist obiger Ausdruck unabhängig von $\theta \in \mathbb{R}$, und somit ist $\nabla u = 0$ fast überall auf $[u = 0]$. Dies ergibt die Behauptung.

///

Für Transformationen im Definitionsbereich haben wir folgende Proposition.

Proposition 5.17 *Es seien* $\Omega_1, \Omega_2 \subseteq \mathbb{R}^n$ *und*

$$\Psi : \Omega_1 \cong \Omega_2$$

eine bi-lipschitzstetige Abbildung mit

$$lip_{\Omega_1}\Psi,\ lip_{\Omega_2}\Psi^{-1} \leq \Lambda.$$

Dann gilt für $u \in W^{1,p}(\Omega_2), 1 \leq p \leq \infty$ *, daß* $u \circ \Psi \in W^{1,p}(\Omega_1)$ *und*

$$\nabla(u \circ \Psi) = \Big((\nabla u) \circ \Psi\Big) \cdot D\Psi, \tag{5.21}$$

wobei $D\Psi$ *die schwache Ableitung von* $\Psi \in C^{0,1}(\Omega_1) \subseteq W^{1,\infty}(\Omega_1)$ *, die gemäß Proposition 5.13 existiert. Weiter gilt*

$$\| u \circ \Psi \|_{W^{1,p}(\Omega_1)} \leq C(\Lambda, n) \| u \|_{W^{1,p}(\Omega_2)}\ . \tag{5.22}$$

Beweis:
Zuerst betrachten wir $u \in C^\infty(\Omega_2)$. Für $\Omega_1' \subset\subset \Omega_1$ konvergiert die Faltung Ψ_ε mit Proposition 5.6 z.B. für eine Teilfolge

$$\begin{gathered} \Psi_\varepsilon \to \Psi \quad \text{gleichmäßig auf } \Omega_1', \\ D\Psi_\varepsilon \to D\Psi \quad \text{punktweise fast überall in } \Omega, \\ \| D\Psi_\varepsilon \|_{L^\infty(\Omega_1')} \leq \| D\Psi \|_{L^\infty(\Omega)} \leq \Lambda. \end{gathered}$$

Wählen wir $\Psi(\overline{\Omega_1'}) \subset\subset \Omega_2' \subset\subset \Omega_2$, so gilt für ε klein

$$\Psi_\varepsilon(\Omega_1') \subseteq \Omega_2'.$$

Dies ergibt $u \circ \Psi_\varepsilon \in C^\infty(\Omega_1')$ und

$$\begin{gathered} u \circ \Psi_\varepsilon \to u \circ \Psi \quad \text{gleichmäßig auf } \Omega_1', \\ \nabla(u \circ \Psi_\varepsilon) = \Big((\nabla u) \circ \Psi_\varepsilon\Big) \cdot D\Psi_\varepsilon \to \Big((\nabla u) \circ \Psi\Big) \cdot D\Psi \quad \text{in } L^1(\Omega_1'), \end{gathered}$$

da die Konvergenz punktweise fast überall in Ω_1' und ∇u auf Ω_2' und $D\Psi_\varepsilon$ auf Ω_1' beschränkt sind. Daraus folgt $u \circ \Psi \in W^{1,1}(\Omega_1')$ und

$$\nabla(u \circ \Psi) = \Big((\nabla u) \circ \Psi\Big) \cdot D\Psi. \tag{5.23}$$

Nun gilt für lebesgue-meßbares $A \subseteq \Omega_2$

$$\mathcal{L}^n(\Psi^{-1}(A)) \leq (lip_{\Omega_2}\Psi^{-1})^n \mathcal{L}^n(A),$$

also für $v \in C^0(\Omega_2), v \geq 0$

$$\int\limits_{\Omega_1} v \circ \Psi \leq \Lambda^n \int\limits_{\Omega_2} v.$$

Daraus folgt $u \circ \Psi \in W^{1,p}(\Omega_1)$ und

$$\| u \circ \Psi \|_{W^{1,p}(\Omega_1)} \leq C(\Lambda, n) \| u \|_{W^{1,p}(\Omega_2)} . \tag{5.24}$$

Ist schließlich $u \in W^{1,p}(\Omega_2)$ so existieren mit Proposition 5.11 $u_m \in C^\infty(\Omega_2)$ mit

$$u_m \to u \quad \text{in } W^{1,1}_{loc}(\Omega_2)$$

und punktweise fast überall. Aus (5.24) folgt, daß $u_m \circ \Psi$ in $W^{1,1}_{loc}(\Omega_1)$ konvergiert. Andererseits konvergiert $u_m, \nabla u_m \to u, \nabla u$ fast überall auf Ω_2 , z.B. auf $\Omega_2 - N, \mathcal{L}^n(N) = 0$. Da $\mathcal{L}^n(\Psi^{-1}(N)) = 0,$ da Ψ^{-1} lipschitzstetig ist, konvergiert

$$u_m \circ \Psi, (\nabla u_m) \circ \Psi \to u \circ \Psi, (\nabla u) \circ \Psi \quad \text{fast überall auf } \Omega_1.$$

Daraus folgt $u \circ \Psi \in W^{1,1}_{loc}(\Omega_1)$, und (5.21) folgt aus (5.23) für u_m . Schließlich ergibt (5.24) für u_m , daß $u \circ \Phi \in W^{1,p}(\Omega_1)$ und (5.22).

///

Als nächstes kommen wir zum Fortsetzungssatz über einen genügend glatten Rand hinweg.

Proposition 5.18 (Fortsetzungssatz) *Es sei* $\Omega \subset\subset \mathbb{R}^n$ *offen mit* $\partial\Omega \in C^{k-1,1}, k \in \mathbb{N}, 1 \leq p \leq \infty$ *. Dann existiert für jedes* $\Omega' \supset\supset \Omega$ *ein Fortsetzungsoperator*

$$E : W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{k,p}_0(\Omega')$$

mit

$$Eu|_\Omega = u$$

und

$$\| Eu \|_{W^{l,q}(\Omega')} \leq C(\Omega, \Omega', n, k) \| u \|_{W^{l,q}(\Omega)} .$$

simultan für alle $0 \leq l \leq k, 1 \leq q \leq p$ *.*

Beweis:
Zuerst definieren wir einen Fortsetzungsoperator für $\mathbb{R}^n_+ := \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+ :=]0, \infty[$

$$E_0 : W^{k,p}(\mathbb{R}^n_+) \hookrightarrow W^{k,p}(\mathbb{R}^n)$$

durch

$$E_0u(y,t) := \sum_{i=1}^{k+1} \sigma_i u(y,-it) \quad \text{für } t<0,$$

wobei die σ_i so gewählt sind, daß

$$\sum_{i=1}^{k+1} \sigma_i (-i)^m = 1 \quad \text{für } m = 0,\dots,k.$$

Damit folgt für $u \in C_0^\infty(\overline{\mathbb{R}^n_+})$ bzw. $u \in C^{k-1,1}(\mathbb{R}^n_+)$

$$E_0u \in C_0^k(\mathbb{R}^n) \subseteq W^{k,p}(\mathbb{R}^n) \text{ bzw. } E_0u \in C^{k-1,1}(\mathbb{R}^n) \subseteq W^{k,\infty}(\mathbb{R}^n)$$

mit Proposition 5.13 und

$$\| E_0u \|_{W^{k,p}(\mathbb{R}^n)} \leq C(n,k) \| u \|_{W^{k,p}(\mathbb{R}^n_+)} .$$

Da $C_0^\infty(\overline{\mathbb{R}^n_+})$ gemäß Proposition 5.11 in $W^{k,p}(\mathbb{R}^n_+)$ dicht liegt bzw. $C^{k-1,1}(\mathbb{R}^n_+) = W^{k,\infty}(\mathbb{R}^n_+)$ mit Proposition 5.13, kann E_0 als stetiger linearer Operator auf ganz $W^{k,p}(\mathbb{R}^n_+) \hookrightarrow W^{k,p}(\mathbb{R}^n)$ fortgesetzt werden.

Da $\partial\Omega \in C^{k-1,1}$ und kompakt ist, können wir endlich viele $x_j \in \partial\Omega, j = 1,\dots,N$ wählen mit Umgebungen $x_j \in U_j \subset\subset \Omega'$ und bi-$C^{k-1,1}-$Abbildungen Ψ_j , die nach einer Rotation durch

$$\Psi_j(y,t) := \lambda_j^{-1}((y,t-\varphi_j(y)) - x_j), \quad \Psi_j^{-1}(y,t) := x_j + \lambda_j(y,t+\varphi_j(y)),$$

mit $\lambda_j > 0, \varphi_j \in C^{k-1,1}(\mathbb{R}^{n-1})$ gegeben sind und die

$$\Psi_j : U_j \cong B_1(0),$$
$$\Psi_j(x_j) = 0,$$
$$\Psi_j(U_j \cap \Omega) = B_1(0)^+ = B_1(0) \cap \mathbb{R}^n_+,$$

und

$$\partial\Omega \subseteq U_1 \cup \ldots \cup U_N \subset\subset \Omega'$$

erfüllen. Weiter wählen wir $U_0 \subset\subset \Omega$ offen mit

$$\overline{\Omega} \subseteq U_0 \cup U_1 \cup \ldots \cup U_N \subset\subset \Omega'$$

und $\eta_j \in C_0^\infty(U_j), 0 \leq \eta_j \leq 1$ mit

$$\sum_{j=0}^{N} \eta_j \equiv 1 \text{ in } \Omega. \tag{5.25}$$

Wir setzen für $u \in W^{k,p}(\Omega)$

$$E_ju := E_0\Big((\eta_j u) \circ \Psi_j^{-1}\Big) \circ \Psi_j$$

Mit den Propositionen 5.13 und 5.17 folgt $\Psi_j \in C^{k-1,1}(U_j) \subseteq W^{k,\infty}(U_j)$ und $E_j u \in W^{k,p}(\Omega')$ mit der Abschätzung

$$\| E_j u \|_{W^{k,p}(\Omega')} \leq C(\Psi_j, U_j, n, k) \| u \|_{W^{k,p}(\Omega)} . \tag{5.26}$$

Da $supp(\eta_j) \subset\subset U_j$ folgt mit der Definition von E_0 , daß $supp(E_j u) \subset\subset U_j \subset\subset \Omega'$, also $E_j u \in W_0^{k,p}(\Omega')$ mit Proposition 5.11. Weiter gilt

$$E_j u|_\Omega = \eta_j u. \tag{5.27}$$

Schließlich setzen wir

$$Eu := \eta_0 u + \sum_{j=1}^{N} E_j u \in W_0^{k,p}(\Omega').$$

Aus (5.26) folgt

$$\| Eu \|_{W^{k,p}(\Omega')} \leq C(\Omega, \Omega', k) \| u \|_{W^{k,p}(\Omega)}$$

und aus (5.25) und (5.27)

$$E|_\Omega = \eta_0 u + \sum_{j=1}^{N} E_j u|_\Omega = \eta_0 u + \sum_{j=1}^{N} \eta_j u = u.$$

///

Damit können wir die Approximation aus Proposition 5.11 verschärfen.

Proposition 5.19 (Approximationssatz) *Es sei* $\Omega \subset\subset \mathbb{R}^n$ *offen mit* $\partial\Omega \in C^{k-1,1}, k \in \mathbb{N}, 1 \leq p < \infty, u \in W^{k,p}(\Omega)$ *. Dann existieren* $u_m \in C^\infty(\overline{\Omega})$ *mit*

$$u_m \to u \quad \textit{in } W^{k,p}(\Omega).$$

Beweis:
Für ein $\Omega' \supset\supset \Omega$ betrachten wir den Fortsetzungsoperator

$$E : W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow W_0^{k,p}(\Omega')$$

aus Proposition 5.18. Da $Eu \in W_0^{k,p}(\Omega')$ existieren $v_m \in C_0^\infty(\Omega')$ mit

$$v_m \to Eu \quad \text{in } W^{k,p}(\Omega').$$

Definieren wir $u_m := v_m|_\Omega \in C^\infty(\overline{\Omega})$ so folgt

$$u_m = v_m|_\Omega \to Eu|_\Omega = u \quad \text{in } W^{k,p}(\Omega).$$

///

Folgende Proposition stellt den Zusammenhang zwischen Randwerten und $W_0^{1,p}$ her.

Proposition 5.20 *Es sei* $\Omega \subset\subset \mathbb{R}^n$ *offen,* $1 \leq p < \infty$ *und* $u \in C^0(\overline{\Omega}) \cap W^{1,p}(\Omega)$ *. Dann gilt*

$$u = 0 \quad \textit{auf } \partial\Omega \Longrightarrow u \in W_0^{1,p}(\Omega)$$

und umgekehrt

$$u \in W_0^{1,p}(\Omega) \Longrightarrow u(x) = 0 \quad \textit{auf } \Gamma \subseteq \partial\Omega$$

wobei $\Gamma := \{x \in \partial\Omega \mid \forall \varrho > 0 : \mathcal{L}^n(B_\varrho(x) - \Omega) > 0 \}$.

Beweis:
Zuerst sei $u \in C^0(\overline{\Omega}) \cap W^{1,p}(\Omega)$ mit $u = 0$ auf $\partial\Omega$. Für $u_\varepsilon := \max(u, \varepsilon) - \varepsilon, \varepsilon > 0$ gilt

$$
\begin{aligned}
supp(u_\varepsilon) &\subset\subset \Omega, \\
u_\varepsilon \to u_+ &\quad \text{in } L^p(\Omega),
\end{aligned}
$$

und mit Proposition 5.16 gilt weiter $u_\varepsilon \in W^{1,p}(\Omega)$,

$$
\begin{aligned}
\nabla u_\varepsilon = \chi_{[u>\varepsilon]} \nabla u \to \chi_{[u>0]} \nabla u &\quad \text{punktweise fast überall,} \\
|\nabla u_\varepsilon| \leq \chi_{[u>0]} |\nabla u|,&
\end{aligned}
$$

also

$$u_\varepsilon \to u_+ \quad \text{in } W^{1,p}(\Omega).$$

Mit Proposition 5.11 (5.10) ergibt sich $u_\varepsilon \in W_0^{1,p}(\Omega)$, also $u_+ \in W_0^{1,p}(\Omega)$. Genauso folgt $(-u)_+ \in W_0^{1,p}(\Omega)$ und schließlich $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

Umgekehrt sei $u \in C^0(\overline{\Omega}) \cap W_0^{1,p}(\Omega)$. Dann existieren $u_m \in C_0^\infty(\Omega)$ mit $u_m \to u \in W^{1,p}(\Omega)$. Klarerweise gilt $u_m \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ und u_m konvergiert in $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ mit Limes $v := u$ in $\Omega, v := 0$ in $\mathbb{R}^n - \Omega$, insbesondere $v \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n), \nabla v = 0$ fast überall in $\mathbb{R}^n - \Omega$. Gilt $u(x_0) > 0$ für ein $x_0 \in \Gamma \subseteq \partial\Omega$, so folgt wegen der Stetigkeit von u , daß $u \geq \varepsilon$ in $B_\varrho(x_0) \cap \overline{\Omega}$ für geeignetes $\varepsilon, \varrho > 0$. Dies ergibt für $w := \min(v, \varepsilon) \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ mit Proposition 5.15 und

$$
\begin{aligned}
w = \varepsilon &\quad \text{in } B_\varrho(x_0) \cap \Omega, \\
w = 0 &\quad \text{in } B_\varrho(x_0) - \Omega.
\end{aligned}
$$

Mit Proposition 5.16 folgt $\nabla w = 0$ fast überall in $B_\varrho(x_0)$, und mit Proposition 5.10 ist w fast überall in $B_\varrho(x_0)$ konstant. Weiter ist $B_\varrho(x_0) \cap \Omega$ offen und nichtleer, da $x_0 \in \partial\Omega$, und $\mathcal{L}^n(B_\varrho(x_0) - \Omega) > 0$, da $x_0 \in \Gamma$. Zusammen ist dies ein Widerspruch, also $u \leq 0,$ dann $u = 0$ auf Γ , und die Proposition ist bewiesen.

///

Dies legt folgende Definition nahe.

Definition 5.5 *Es sei* $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ *offen und* $\Gamma \subseteq \partial\Omega$ *offen* $1 \leq p < \infty$ *. Wir sagen* $u \in W^{1,p}(\Omega)$ *hat Nullrandwerte auf* Γ *in* $W^{1,p}(\Omega)$ *, geschrieben*

$$u = 0 \quad \textit{auf}\, \Gamma,$$

wenn

$$u\eta \in W_0^{1,p}(\Omega) \quad \textit{für alle } \eta \in C_0^1(\Omega \cup \Gamma).$$

Wir sagen $v \in W^{1,p}(\Omega)$ *habe die gleichen Randwerte wie* u *, falls* $u - v = 0$ *auf* Γ *.*

□

Die Randwerte bleiben unter schwacher Konvergenz erhalten.

Proposition 5.21 *Es sei* $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ *offen und* $\Gamma \subseteq \partial\Omega$ *offen* $1 \le p < \infty$ *.*
Dann ist

$$V := \{u \in W^{1,p}(\Omega) \mid u = 0 \text{ auf } \Gamma\ \} \subseteq W^{1,p}(\Omega)$$

ein schwach abgeschlossener Unterraum.

Beweis:
Klarerweise ist V ein Unterraum. Nun sei $u_m \in V, u_m \to u$ schwach in $W^{1,p}(\Omega)$. Für $\eta \in C_0^1(\Omega \cup \Gamma)$ gilt

$$\eta u_m \to \eta u \quad \text{schwach in } W^{1,p}(\Omega).$$

Da $\eta u_m \in W_0^{1,p}(\Omega)$ und $W_0^{1,p}(\Omega)$ ein schwach abgeschlossener Unterraum von $W^{1,p}(\Omega)$ ist, folgt $\eta u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ und somit $u = 0$ auf Γ , also $u \in V$.

///

Approximationen können mit Erhaltung von Nullrandwerten durchgeführt werden.

Proposition 5.22 *Es sei* $u \in W^{1,p}(B_1(0)^+), 1 \le p < \infty$ *mit*

$$u = 0 \quad \text{auf } \{x_n = 0\} \cap B_1(0).$$

Dann existieren $u_m \in C^\infty(\overline{B_1(0)^+})$ *mit*

$$u_m = 0 \quad \text{auf } \{x_n = 0\} \cap B_1(0)$$

und

$$u_m \to u \quad \text{in } W^{1,p}(B_1(0)^+).$$

Beweis:
Wir setzen

$$u(y,t) = 0 \quad \text{für } t < 0$$

und $\Omega := B_1(0) \cup \mathbb{R}^n_-$. Für $\eta \in C_0^1(\Omega)$ gilt $u\eta \in W_0^{1,p}(B_1(0)^+)$ nach Definition 5.5. Mit Approximation durch Funktionen in $C_0^\infty(B_1(0)^+)$ folgt

$$0 = \int\limits_{B_1(0)^+} \nabla(u\eta) = \int\limits_{\Omega} u\ \nabla\eta + \int\limits_{B_1(0)^+} \nabla u\ \eta,$$

also $u \in W^{1,p}(\Omega)$.

Wir setzen für $h > 0$

$$u_h(y,t) := u(y, t-h) \quad \text{für } (y,t) \in \Omega_h := \Omega + he_n$$

und wählen h für gegebenes $\delta > 0$ so , daß

$$\| u_h - u \|_{W^{1,p}(B_1(0)^+)} < \delta.$$

Da $B_1(0)^+ \subset\subset \Omega_h$, konvergiert die Faltung $u_{h,\varepsilon} \in C^\infty(\overline{B_1(0)^+})$ nach Proposition 5.11 $u_{h,\varepsilon} \to u_h$ in $W^{1,p}(B_1(0)^+)$, also für ε klein

$$\| u_{h,\varepsilon} - u_h \|_{W^{1,p}(B_1(0)^+)} < \delta.$$

Für $\varepsilon < h$ gilt weiter $u_{h,\varepsilon} = 0$ auf $\{x_n = 0\} \cap B_1(0)$. Wählen wir $\delta_m \downarrow 0$, so erhalten wir die gewünschte Folge.

$///$

Wir setzen eine Funktion $u : B_1(0)^+ \to \mathbb{R}$ durch

$$E_{\pm,0}u(y,t) := \begin{cases} u(y,t) & \text{falls } t > 0 \ , \\ \{\pm, 0\}u(y,-t) & \text{falls } t < 0 \ , \end{cases} \tag{5.28}$$

auf $B_1(0)$ fort.

Proposition 5.23 *Für* $u \in W^{1,p}(B_1(0)^+), 1 \leq p < \infty$ *gilt*

$$E_+u \in W^{1,p}(B_1(0))$$

und, falls

$$u = 0 \quad \textit{auf } \{x_n = 0\} \cap B_1(0),$$

gilt weiter

$$E_0u, E_-u \in W^{1,p}(B_1(0)).$$

Beweis:
Mit Proposition 5.19 und 5.22 existieren $u_m \in C^\infty(\overline{B_1(0)^+})$ mit $u_m \to u$ in $W^{1,p}(B_1(0)^+)$, und, falls $u = 0$ auf $\{x_n = 0\} \cap B_1(0)$, so gilt weiter

$$u_m = 0 \quad \text{auf } \{x_n = 0\} \cap B_1(0).$$

Dies ergibt $E_{\pm,0}u_m \in C^{0,1}(B_1(0)) \subseteq W^{1,p}(B_1(0))$,

$$\| \nabla E_{\pm,0}u_m \|_{L^p(B_1(0))} \leq 2^{1/p} \| \nabla u_m \|_{L^p(B_1(0)^+)} \leq C$$

und weiter gilt

$$E_{\pm,0}u_m \to E_{\pm,0}u \quad \text{in } L^p(B_1(0)).$$

Daraus folgt $E_{\pm,0}u \in W^{1,p}(B_1(0))$.

$///$

Für Funktionen mit zwei schwachen Ableitungen übertragen sich Nullrandwerte auf die entsprechenden Ableitungen.

Proposition 5.24 *Für* $u \in W^{2,p}(B_1(0)^+), 1 \leq p < \infty$ *mit*

$$u = 0 \quad \textit{auf } \{x_n = 0\} \cap B_1(0)$$

gilt

$$\partial_l u = 0 \quad \textit{auf } \{x_n = 0\} \cap B_1(0) \textit{ für } l = 1, \ldots, n-1.$$

Beweis:
Für $0 < \delta < 1/2$ wählen wir $B_{1-\delta}(0)^+ \subseteq \Omega_0 \subseteq B_1(0)^+$ mit $\partial\Omega \in C^\infty$ und betrachten einen Fortsetzungsoperator

$$E : W^{2,p}(\Omega_0) \to W^{2,p}_0(\mathbb{R}^n)$$

aus Proposition 5.18. Mit Proposition 5.12 folgt

$$\partial_l^h Eu \to \partial_l Eu \quad \text{in } W^{1,p}_{loc}(\mathbb{R}^n) \subseteq W^{1,p}(B_{1-\delta}(0)^+).$$

Da $\partial_l^h Eu = \partial_l^h u$ in $B_{1-2\delta}(0)^+$ für $0 < |h| < \delta$, folgt

$$\partial_l^h u \to \partial_l u \quad \text{in } W^{1,p}(B_{1-2\delta}(0)^+).$$

Nun gilt

$$\partial_l^h u = 0 \quad \text{auf } \{x_n = 0\} \cap B_{1-2\delta}(0),$$

und die Behauptung folgt aus Proposition 5.21.

///

Schließlich setzen wir Funktionen mit zwei schwachen Ableitungen ungerade durch E_- fort.

Proposition 5.25 *Für* $u \in W^{2,p}(B_1(0)^+), 1 \leq p < \infty$ *mit*

$$u = 0 \quad \textit{auf } \{x_n = 0\} \cap B_1(0)$$

gilt

$$E_- u \in W^{2,p}(B_1(0)).$$

Beweis:
Mit den Propositionen 5.23, 5.24 gilt

$$E_- u, \partial_l(E_- u) = E_-(\partial_l u) \in W^{1,p}(B_1(0)) \quad \text{für } l = 1, \ldots, n-1$$

und

$$\partial_n(E_- u) = E_+(\partial_n u) \in W^{1,p}(B_1(0)),$$

also $E_- u \in W^{2,p}(B_1(0))$.

///

5.3 Einbettungssätze für Sobolev-Funktionen

Wir beginnen mit dem Satz von Rellich.

Satz 5.1 (Satz von Rellich) *Es sei* $\Omega \subset\subset \mathbb{R}^n$ *offen mit* $\partial\Omega \in C^{0,1}, 1 \leq p \leq \infty$ *und* $u_m \in W^{1,p}(\Omega)$ *beschränkt. Dann konvergiert* u_m *für eine Teilfolge in* $L^p(\Omega)$.

In anderen Worten heißt dies, daß die Einbettung

$$W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$$

kompakt ist.

Beweis:
Für $p = \infty$ wissen wir mit den Propositionen 5.3 und 5.13, daß die Einbettung

$$W^{1,\infty}(\Omega) \cong C^{0,1}(\Omega) \hookrightarrow C^0(\overline{\Omega}) \hookrightarrow L^\infty(\Omega)$$

kompakt ist, und die Behauptung folgt.

Für $1 \leq p < \infty$ sehen wir mit dem Fortsetzungsoperator E aus Proposition 5.11 für $B_R(0) \supset\supset \Omega$, daß $Eu_m \in W_0^{1,p}(B_R(0))$, und wir können nach Approximation o.B.d.A. annehmen, daß $u_m \in C_0^\infty(B_R(0))$ und beschränkt in $W^{1,p}(B_R(0))$.

Für die Faltung eines $u \in C_0^\infty(B_R(0))$ gilt

$$\begin{aligned} |\nabla u_\varepsilon(x)| = |\textstyle\int \nabla \lambda_\varepsilon(x-y) u(y) \, \mathrm{d}y| \leq \\ \leq \varepsilon^{-n-1} \parallel \nabla \lambda \parallel_{L^\infty(B_1(0))} \parallel u \parallel_{L^1(B_R(0))} \leq C_\varepsilon(R,n,p) \parallel u \parallel_{L^p(B_R(0))} . \end{aligned} \tag{5.29}$$

Weiter gilt mit (5.9)

$$\parallel u - u_\varepsilon \parallel_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq \sup_{|h|<\varepsilon} \parallel u(.+h) - u \parallel_{L^p(\mathbb{R}^n)}$$

und

$$\begin{aligned} \parallel u(.+h) - u \parallel^p_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq \textstyle\int |u(x+h) - x(x)|^p \, \mathrm{d}x \leq \int \int_0^1 |\nabla u(x+th)h|^p \, \mathrm{d}t \, \mathrm{d}x \leq \\ \leq |h|^p \textstyle\int_0^1 \int |\nabla u(x+th)|^p \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}t \leq |h|^p \parallel \nabla u \parallel^p_{L^p(\mathbb{R}^n)} . \end{aligned}$$

Zusammen ergibt dies

$$\parallel u - u_\varepsilon \parallel_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq \varepsilon \parallel \nabla u \parallel_{L^p(\mathbb{R}^n)} . \tag{5.30}$$

Aus (5.29) folgt für $u_m, \varepsilon_j \downarrow 0$, daß nach Auswahl einer Teilfolge u_{m,ε_j} für jedes $j \in \mathbb{N}$ gleichmäßig auf $B_R(0)$, also auch in $L^p(B_R(0))$ konvergiert und somit

$$\lim_{m,l \to \infty} \parallel u_{m,\varepsilon_j} - u_{l,\varepsilon_j} \parallel_{L^p(B_R(0))} = 0.$$

Mit (5.30) folgt

$$\limsup_{m,l\to\infty} \parallel u_m - u_l \parallel_{L^p(B_R(0))} \leq C\varepsilon_j.$$

Lassen wir $j \to \infty$, so sehen wir, daß u_m eine Cauchyfolge in $L^p(B_R(0))$ ist, also konvergent.

///

Mit dem Satz von Rellich erhalten wir die Poincaré-Ungleichung.

Satz 5.2 (Poincaré-Ungleichung) *Es sei $\Omega \subset\subset \mathbb{R}^n$ offen, zusammenhängend mit $\partial\Omega \in C^{0,1}, 1 \leq p \leq \infty$, und $M \subseteq W^{1,p}(\Omega)$ ein abgeschlossener Kegel, d.h. mit $u \in M$ folgt $\lambda u \in M$ für $\lambda > 0$, der außer $0 \in M$ keine Konstanten enthält.*

Dann existiert $C < \infty$, so daß

$$\parallel u \parallel_{L^p(\Omega)} \leq C \parallel \nabla u \parallel_{L^p(\Omega)} \quad \text{für alle } u \in M.$$

Beweis:
Angenommen die Ungleichung ist falsch, dann existieren $u_m \in M$ mit

$$\| \nabla u_m \|_{L^p(\Omega)} < \frac{1}{m} \| u_m \|_{L^p(\Omega)} .$$

Betrachten wir $u_m / \| u_m \|_{L^p(\Omega)} \in M$, so können wir weiter $\| u_m \|_{L^p(\Omega)} = 1$ annehmen, und ist u_m beschränkt in $W^{1,p}(\Omega)$. Nach dem Satz von Rellich konvergiert für eine Teilfolge $u_m \to u$ in $L^p(\Omega)$ mit $\| u \|_{L^p(\Omega)} = 1$.

Andererseits konvergiert $\nabla u_m \to 0$ in $L^p(\Omega)$ mit obiger Ungleichung und daher $u_m \to u$ in $W^{1,p}(\Omega)$. Also ist $u \in M$ mit $\nabla u = 0$, und nach Proposition 5.10 ist $u \equiv const$, also nach Voraussetzung $u = 0$. Dies widerspricht $\| u \|_{L^p(\Omega)} = 1$, und die Ungleichung ist bewiesen.

///

Kombinieren wir den Satz von Rellich mit dem Ehrling-Lemma 4.1, so erhalten wir folgendes Interpolationslemma.

Lemma 5.26 (Interpolation für Sobolev-Räume) *Für* $u \in W^{2,p}(\mathbb{R}^n), 1 \leq p \leq \infty$ *gilt*

$$\| \nabla u \|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq C(n,p) \| u \|^{1/2}_{L^p(\mathbb{R}^n)} \| D^2 u \|^{1/2}_{L^p(\mathbb{R}^n)},$$

und für $\Omega \subset\subset \mathbb{R}^n$ *offen mit* $\partial\Omega \in C^{1,1}$ *und* $u \in W^{2,p}(\Omega), 1 \leq p \leq \infty$ *gilt für* $0 < \varepsilon < 1$

$$\| \nabla u \|_{L^p(\Omega)} \leq \varepsilon \| D^2 u \|_{L^p(\Omega)} + C(\Omega,n,p)\varepsilon^{-1} \| u \|_{L^p(\Omega)}$$

Beweis:
Im folgenden bezeichne Q_ϱ einen offenen Würfel mit Seitenlänge ϱ . Mit dem Satz von Rellich 5.1 sind die Einbettungen

$$W^{2,p}(Q_1) \hookrightarrow W^{1,p}(Q_1) \hookrightarrow L^p(Q_1)$$

kompakt, und es folgt mit dem Ehrling-Lemma 4.1 für $u \in W^{2,p}(Q_1)$

$$\| \nabla u \|_{L^p(Q_1)} \leq \tfrac{1}{2} \| u \|_{W^{2,p}(Q_1)} + C(n,p) \| u \|_{L^p(Q_1)} \leq$$
$$\leq \tfrac{1}{2} \| \nabla u \|_{L^p(Q_1)} + \tfrac{1}{2} \| D^2 u \|_{L^p(Q_1)} + C(n,p) \| u \|_{L^p(Q_1)},$$

also

$$\| \nabla u \|_{L^p(Q_1)} \leq \| D^2 u \|_{L^p(Q_1)} + C(n,p) \| u \|_{L^p(Q_1)} .$$

Für $u \in W^{2,p}(Q_\varrho), \varrho > 0$, reskalieren wir durch

$$v(x) := u(\varrho x)$$

und erhalten

$$\| \nabla u \|_{L^p(Q_\varrho)} = \varrho^{-1+n/p} \| \nabla v \|_{L^p(Q_1)} \leq$$
$$\leq \varrho^{-1+n/p} \| D^2 v \|_{L^p(Q_1)} + C(n,p)\varrho^{-1+n/p} \| v \|_{L^p(Q_1)} =$$
$$= \varrho \| D^2 u \|_{L^p(Q_\varrho)} + C(n,p)\varrho^{-1} \| u \|_{L^p(Q_\varrho)} .$$

Nun überdecken wir $\mathbb{R}^n$ bis auf eine Lebesgue-Nullmenge N durch abzählbar viele disjunkte Würfel der Seitenlänge ϱ

$$\mathbb{R}^n - N = \sum_{i=1}^{\infty} Q_\varrho^i.$$

Dann folgt für $u \in W^{2,p}(\mathbb{R}^n), 1 \leq p < \infty$

$$\begin{gathered} \| \nabla u \|_{L^p(\mathbb{R}^n)}^p = \sum_{i=1}^{\infty} \| \nabla u \|_{L^p(Q_\varrho^i)}^p \leq \\ \leq 2^{p-1} \sum_{i=1}^{\infty} \left(\varrho^p \| D^2 u \|_{L^p(Q_\varrho^i)}^p + C(n,p) \varrho^{-p} \| u \|_{L^p(Q_\varrho^i)}^p \right) = \\ = 2^{p-1} \varrho^p \| D^2 u \|_{L^p(\mathbb{R}^n)}^p + C(n,p) \varrho^{-p} \| u \|_{L^p(\mathbb{R}^n)}^p, \end{gathered}$$

also

$$\| \nabla u \|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq \varrho \| D^2 u \|_{L^p(\mathbb{R}^n)} + C(n,p) \varrho^{-1} \| u \|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \quad \forall \varrho > 0. \tag{5.31}$$

Für $p = \infty$ erhalten wir

$$\begin{gathered} \| \nabla u \|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} = \sup_{i \in \mathbb{N}} \| \nabla u \|_{L^\infty(Q_\varrho^i)} \leq \\ \leq \sup_{i \in \mathbb{N}} \left(\varrho \| D^2 u \|_{L^\infty(Q_\varrho^i)} + C(n) \varrho^{-1} \| u \|_{L^\infty(Q_\varrho^i)} \right) = \\ = \varrho \| D^2 u \|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} + C(n) \varrho^{-1} \| u \|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}, \end{gathered}$$

also wieder (5.31).

Für $\varepsilon > 0$ setzen wir

$$\varrho := \sqrt{\frac{\| u \|_{L^p(\mathbb{R}^n)} + \varepsilon}{\| D^2 u \|_{L^p(\mathbb{R}^n)} + \varepsilon}} > 0$$

und erhalten mit (5.31)

$$\| \nabla u \|_{L^p(\mathbb{R}^n)}^2 \leq C(n,p) (\| D^2 u \|_{L^p(\mathbb{R}^n)} + \varepsilon)(\| u \|_{L^p(\mathbb{R}^n)} + \varepsilon)$$

und die Behauptung folgt, wenn $\varepsilon \to 0$.

Für $\Omega \subset\subset \mathbb{R}^n$ offen mit $\partial\Omega \in C^{1,1}, 1 \leq p \leq \infty$ betrachten wir den Fortsetzungsoperator

$$E : W^{2,p}(\Omega) \hookrightarrow W_0^{2,p}(\mathbb{R}^n)$$

aus Proposition 5.18 und erhalten für $u \in W^{2,p}(\Omega)$

$$\| \nabla u \|_{L^p(\Omega)} \leq \| \nabla E u \|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq$$

$$\leq C(n,p) \| Eu \|_{L^p(\mathbb{R}^n)}^{1/2} \| D^2 E u \|_{L^p(\mathbb{R}^n)}^{1/2} \leq$$

$$\leq C(\Omega,n,p) \| u \|_{L^p(\Omega)}^{1/2} \| u \|_{W^{2,p}(\Omega)}^{1/2} \leq \varepsilon \| u \|_{W^{2,p}(\Omega)} + C(\Omega,n,p) \varepsilon^{-1} \| u \|_{L^p(\Omega)} \leq$$

$$\leq \varepsilon \| D^2 u \|_{L^p(\Omega)} + \varepsilon \| \nabla u \|_{L^p(\Omega)} + C(\Omega,n,p) \varepsilon^{-1} \| u \|_{L^p(\Omega)},$$

also nach Absorption die Behauptung.

///

Wir kommen zu der Sobolev-Ungleichung, die zeigt, daß Sobolevfunktionen höhere Integrabilität besitzen.

Lemma 5.27 (Sobolev-Ungleichung) *Es sei* $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n), 1 \le p < n$ *. Dann gilt für*

$$p^* := \frac{np}{n-p},$$

das heißt

$$1 - \frac{n}{p} = -\frac{n}{p^*},$$

daß

$$\| u \|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^n)} \le C(n,p) \| \nabla u \|_{L^p(\mathbb{R}^n)} .$$

Beweis:
Zuerst sei $p = 1, p^* = \frac{n}{n-1}$ und $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Dann gilt

$$u(x_1, \dots, x_i, \dots x_n) = \int_{-\infty}^{x_i} \partial_i u(x_1, \dots, t_i, \dots, x_n)\, dt_i,$$

also

$$|u(x)| \le \int_{\mathbb{R}} |\nabla u(x_1, \dots, t_i, \dots, x_n)| \, \mathrm{d}t_i$$

und

$$|u(x)|^{\frac{n}{n-1}} \le \prod_{i=1}^n \left(\int_{\mathbb{R}} |\nabla u(x_1, \dots, t_i, \dots, x_n)| \, \mathrm{d}t_i \right)^{\frac{1}{n-1}} .$$

Nun integrieren wir bezüglich x_1 . Dies ergibt

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}} |u(x_1, \dots, x_n)|^{\frac{n}{n-1}} \mathrm{d}x_1 \le \\ &\le \left(\int_{\mathbb{R}} |\nabla u(t_1, x_2, \dots, x_n)| \mathrm{d}t_1 \right)^{\frac{1}{n-1}} \int_{\mathbb{R}} \prod_{i=2}^n \left(\int_{\mathbb{R}} |\nabla u(x_1, \dots, t_i, \dots, x_n)| \mathrm{d}t_i \right)^{\frac{1}{n-1}} \mathrm{d}x_1 \le \\ &\le \left(\int_{\mathbb{R}} |\nabla u(t_1, x_2, \dots, x_n)| \mathrm{d}t_1 \right)^{\frac{1}{n-1}} \prod_{i=2}^n \left(\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} |\nabla u(x_1, \dots, t_i, \dots, x_n)| \mathrm{d}t_i \mathrm{d}x_1 \right)^{\frac{1}{n-1}} . \end{aligned}$$

Sukzessive Integration über $x_2, \dots, x_n$ ergibt

$$\int_{\mathbb{R}^n} |u|^{\frac{n}{n-1}} \le \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u| \right)^{\frac{n}{n-1}},$$

also

$$\| u \|_{L^{\frac{n}{n-1}}(\mathbb{R}^n)} \le \| \nabla u \|_{L^1(\mathbb{R}^n)} . \tag{5.32}$$

Für $u \in W^{1,1}(\mathbb{R}^n)$ gibt es nach Proposition 5.11 $u_j \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \cap W^{1,1}(\mathbb{R}^n)$

$$u_j \to u \quad \text{in } W^{1,1}(\mathbb{R}^n).$$

Daraus folgt mit (5.32), daß

$$\| u \|_{L^{\frac{n}{n-1}}(\mathbb{R}^n)} \leq \liminf_{j\to\infty} \| u_j \|_{L^{\frac{n}{n-1}}(\mathbb{R}^n)} \leq \liminf_{j\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u_j| = \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|. \tag{5.33}$$

Im Fall $1 < p < n$ setzen wir $v = |u|^\gamma$ für $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, wobei $\gamma > 1$ unten gewählt wird.

Mit (5.33) gilt

$$\begin{aligned} \| u \|^\gamma_{L^{\frac{n\gamma}{n-1}}(\mathbb{R}^n)} &= \| v \|_{L^{\frac{n}{n-1}}(\mathbb{R}^n)} \leq \| Dv \|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \leq \\ \leq \int_{\mathbb{R}^n} \gamma |u|^{\gamma-1} |\nabla u| &\leq \gamma \| u \|^{\gamma-1}_{L^{\frac{p(\gamma-1)}{p-1}}(\mathbb{R}^n)} \| \nabla u \|_{L^p(\mathbb{R}^n)} . \end{aligned}$$

Wir wählen γ so, daß

$$\frac{n\gamma}{n-1} = \frac{p(\gamma-1)}{p-1}$$

bzw.

$$\frac{p-1}{p}\gamma = \frac{n}{n-1}(\gamma - 1),$$

also

$$\left(\frac{p-1}{p} - \frac{n-1}{n}\right)\gamma = -\frac{n-1}{n}$$

und

$$\frac{n\gamma}{n-1} = \frac{1}{\frac{1}{p} - \frac{1}{n}} = \frac{np}{n-p} = p^*,$$

$$\gamma = \frac{n-1}{n-p} p > 1.$$

Dies ergibt

$$\| u \|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^n)} \leq \gamma \| \nabla u \|_{L^p(\mathbb{R}^n)} .$$

Für allgemeine $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ folgt dies mit Proposition 5.11 wie oben.

///

Satz 5.3 (Sobolev-Einbettungssatz) *Es sei* $\Omega \subset\subset \mathbb{R}^n$ *offen mit* $\partial\Omega \in C^{0,1}, k \geq l \in \mathbb{N}_0, 1 \leq p, q < \infty$ *mit*

$$k - \frac{n}{p} \geq l - \frac{n}{q}. \tag{5.34}$$

Dann existieren stetige Einbettungen

$$W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{l,q}(\Omega), \tag{5.35}$$

und diese sind bei strikter Ungleichung in (5.34) und $k > l$ *kompakt.*

Beweis:
Zuerst betrachten wir den Spezialfall $k = 1, l = 0, 1 \leq p < n, 1 - \frac{n}{p} \geq -\frac{n}{q}$. Für $u \in W^{1,p}(\Omega)$ gilt mit dem Fortsetzungsoperator E aus Proposition 5.18

$$Eu \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$$

und mit der Sobolev-Ungleichung, Proposition 5.27,

$$\| u \|_{L^{p^*}(\Omega)} \leq \| Eu \|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^n)} \leq C(n,p) \| \nabla Eu \|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq C(\Omega,n,p) \| u \|_{W^{1,p}(\Omega)} .$$

Mit (5.34) gilt

$$-\frac{n}{p^*} = 1 - \frac{n}{p} \geq -\frac{n}{q},$$

also $1 \leq q \leq p^*$, und die Einbettung $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ ist stetig. Gilt die strikte Ungleichung in (5.34), insbesondere $1 \leq q < p^*$, und ist u_m beschränkt in $W^{1,p}(\Omega)$, so ist u_m nach dem eben Gezeigten beschränkt in $L^{p^*}(\Omega)$, und nach dem Satz von Rellich 5.1 konvergiert u_m für eine Teilfolge in $L^p(\Omega)$, also punktweise fast überall in Ω . Mit dem Konvergenzsatz von Vitali folgt nun die Konvergenz von u_m in $L^q(\Omega)$, da $q < p^*$, und der Spezialfall ist bewiesen.

Die allgemeine Aussage beweisen wir mit Induktion über $k - l \in \mathbb{N}_0$. Für $k = l$ gilt $1 \leq q \leq p$ und der Satz folgt, da für beschränktes Ω

$$L^p(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega).$$

Nun sei $k = l + 1$. Dann gilt

$$1 - \frac{n}{p} \geq -\frac{n}{q}.$$

Da $q < \infty$, gilt $-\frac{n}{q} < 0$, und wir können o.B.d.A $1 \leq p < n$ annehmen. Es sei $u \in W^{k,p}(\Omega)$. Für $|\gamma| \leq l$ ist $\partial^\gamma u \in W^{1,p}(\Omega)$, und nach dem eben Bewiesenen gilt

$$\| \partial^\gamma u \|_{L^q(\Omega)} \leq C(\Omega,n,p) \| \partial^\gamma u \|_{W^{1,p}(\Omega)} \leq C(\Omega,n,p) \| u \|_{W^{k,p}(\Omega)},$$

und die Einbettung $W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{l,q}(\Omega)$ ist stetig. Gilt in (5.34) die strikte Ungleichung und ist u_m beschränkt in $W^{k,p}(\Omega)$, so ist $\partial^\gamma u_m$ beschränkt in $W^{1,p}(\Omega)$ für $|\gamma| \leq l$ und nach dem Spezialfall konvergiert nach Auswahl einer Teilfolge $\partial^\gamma u_m$ in $L^q(\Omega)$, also u_m in $W^{l,q}(\Omega)$.

Schließlich sei $k \geq l + 2$. Ist $p \geq n$, so gilt

$$k - \frac{n}{p} > (k-1) - \frac{n}{n} \geq l > l - \frac{n}{q}$$

und per Induktion ist die Einbettung

$$W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{k-1,n}(\Omega) \hookrightarrow W^{l,q}(\Omega)$$

kompakt.

Ist $1 \leq p < n$, so gilt

$$k - \frac{n}{p} = (k-1) - \frac{n}{p^*} \geq l - \frac{n}{q}, \tag{5.36}$$

und per Induktion ist die Einbettung

$$W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{k-1,p^*}(\Omega) \hookrightarrow W^{l,q}(\Omega) \tag{5.37}$$

stetig. Ist die Ungleichung in (5.34) strikt, so ist die Ungleichung in (5.36) strikt, und per Induktion ist die zweite Einbettung in (5.37) kompakt, also auch die Gesamteinbettung.

///

Bemerkung 5.28
Im kritischen Fall

$$1 - \frac{n}{p} = -\frac{n}{\infty} := 0,$$

also $p = n$, gilt für $n \geq 2$

$$W^{1,n}(\Omega) \not\subseteq L^\infty(\Omega).$$

Dazu betrachten wir

$$u(x) := \log(1 + |\log|x||) \quad \text{für } x \in B_1(0).$$

Klarerweise gilt $u \notin L^\infty(B_1(0))$. Weiter gilt

$$|\nabla u(x)| = \frac{1}{|x|(1 + |\log|x||)}$$

und somit $u \in W^{1,n}(B_1(0))$ für $n \geq 2$.

□

Nun betrachten wir Einbettungen von Soblev-Räumen in Hölder-Räume. Zuerst leiten wir eine punktweise Abschätzung her.

Lemma 5.29 *Es sei* $\Omega \subset\subset \mathbb{R}^n$ *konvex,* $S \subseteq \Omega$ *meßbar mit* $\mathcal{L}^n(S) > 0$ *. Dann gilt für* $u \in W^{1,1}(\Omega)$ *und* $\mathcal{L}^n$*−fast alle* $x \in \Omega$ *, daß*

$$|u(x) - u_S| \leq \frac{d^n}{n \cdot \mathcal{L}^n(S)} \int_\Omega |x-y|^{1-n} |\nabla u(y)| \; dy$$

wobei

$$u_S = \frac{1}{\mathcal{L}^n(S)} \int_S u$$

und $d = diam(\Omega)$ *.*

Beweis:
Mit Approximation von u durch glatte Funktionen wie in Proposition 5.11 erhalten wir für $\mathcal{L}^n$−fast alle $x \neq y \in \Omega, \omega = \frac{y-x}{|y-x|}$, daß

$$u(x) - u(y) = -\int_0^{|x-y|} \nabla u(x + r\omega)\omega \; dr.$$

Integration von y über S ergibt

$$\mathcal{L}^n(S)|u(x)-u_S| \leq \int\limits_S \int\limits_0^{|x-y|} |\nabla u(x+r\omega)| \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}y \leq$$

$$\leq \int\limits_{B_d(x)} \int\limits_0^d |\nabla u(x+r\omega)| \chi_\Omega(x+r\omega) \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}y =$$

$$= \int\limits_0^d \int\limits_{\partial B_1(0)} \int\limits_0^d |\nabla u(x+r\omega)| \chi_\Omega(x+r\omega) s^{n-1} \, \mathrm{d}s \, \mathrm{d}\omega \, \mathrm{d}r =$$

$$= \frac{d^n}{n} \int\limits_{B_d(x)} |x-y|^{1-n} |\nabla u(y)| \chi_\Omega(y) \, \mathrm{d}y = \frac{d^n}{n} \int\limits_\Omega |x-y|^{1-n} |\nabla u(y)| \, \mathrm{d}y.$$

///

Nun kommen wir zum Einbettungssatz in Hölder-Räume.

Satz 5.4 (Morrey) *Es sei* $\Omega \subset\subset \mathbb{R}^n$ *offen mit* $\partial\Omega \in C^{0,1}, k > l \in \mathbb{N}_0, 1 \leq p < \infty, 0 < \alpha < 1$ *mit*

$$k - \frac{n}{p} \geq l + \alpha. \tag{5.38}$$

Dann existieren stetige Einbettungen

$$W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{l,\alpha}(\Omega), \tag{5.39}$$

und diese sind bei strikter Ungleichung in (5.38) kompakt.

Beweis:
Die Kompaktheit der Einbettungen ergibt sich sofort aus der Stetigkeit der Einbettungen und Proposition 5.3, denn gilt in (5.38) die strikte Ungleichung, so wählen wir $0 < \beta < 1$ mit

$$k - \frac{n}{p} > l + \beta > l + \alpha,$$

und wir erhalten die stetige Einbettungen

$$W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{l,\beta}(\Omega) \hookrightarrow C^{l,\alpha}(\Omega).$$

Nach Proposition 5.3 ist die zweite Einbettung kompakt, also auch die Gesamteinbettung.

Daher genügt es die Stetigkeit der Einbettungen zu beweisen.

Zuerst betrachten wir den Spezialfall $k = 1, l = 0, 1 - \frac{n}{p} = \alpha \in]0,1[$. Mit dem Fortsetzungsoperator E aus Proposition 5.18 gilt für $B_R(0) \supset\supset \Omega$ und $u \in W^{1,p}(\Omega)$

$$Eu \in W_0^{1,p}(B_R(0)),$$

$$\| Eu \|_{W^{1,p}(B_R(0))} \leq C(\Omega, n, p) \| u \|_{W^{1,p}(\Omega)},$$

und zum Beweis der Stetigkeit der Einbettung im Spezialfall genügt es zu zeigen, daß

$$\| u \|_{C^{0,\alpha}(\mathbb{R}^n)} \leq C(n,p) \| u \|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \quad \text{für alle } u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n). \tag{5.40}$$

Wir betrachten q mit $1/p + 1/q = 1$. Da $n < p < \infty$, gilt $1 < q < n/(n-1)$, und es folgt für alle $x \in B_1(0)$

$$\| |x - .|^{(1-n)} \|_{L^q(B_1(0))} \leq \Big(\int\limits_{B_2(0)} |y|^{q(1-n)} \, \mathrm{d}y \Big)^{1/q} \leq C(n,p).$$

Mit Lemma 5.29 und der Hölder-Ungleichung folgt für $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$

$$osc_{B_1(0)} u \leq 2 \| u - u_{B_1(0)} \|_{L^\infty(B_1(0))} \leq C(n,p) \| \nabla u \|_{L^p(B_1(0))} . \tag{5.41}$$

Durch Reskalieren erhalten wir für alle $B_\varrho \subseteq \mathbb{R}^n$

$$osc_{B_\varrho} u \leq C(n,p) \varrho^\alpha \| \nabla u \|_{L^p(B_\varrho)},$$

da $1 - \frac{n}{p} = \alpha$.

Daraus folgt für $x \neq y \in \mathbb{R}^n, \varrho := \frac{|x-y|}{2}, z := \frac{x+y}{2}$,

$$x, y \in \overline{B_\varrho(z)},$$

daß

$$|u(x) - u(y)| \leq osc_{B_\varrho(z)} u \leq C(n,p) \varrho^\alpha \| \nabla u \|_{L^p(B_\varrho(z))},$$

also

$$höl_{\mathbb{R}^n,\alpha} u \leq C(n,p) \| \nabla u \|_{L^p(\mathbb{R}^n)} .$$

Schließlich folgt aus (5.41) für beliebiges $B_1 \subseteq \mathbb{R}^n$

$$\| u \|_{L^\infty(B_1)} \leq \| u - u_{B_1} \|_{L^\infty(B_1)} + |u_{B_1}| \leq$$
$$\leq C(n,p) \| \nabla u \|_{L^p(B_1)} + C_n \| u \|_{L^1(B_1)} \leq C(n,p) \| u \|_{W^{1,p}(B_1)},$$

damit (5.40), und der Spezialfall ist bewiesen.

Wenn $1 - \frac{n}{p} \geq \alpha$, ist für $\bar{\alpha} := 1 - \frac{n}{p} \in]0,1[$ die Einbettung

$$W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{0,\bar{\alpha}}(\Omega) \hookrightarrow C^{0,\alpha}(\Omega)$$

mit dem eben Gezeigten und Proposition 5.3 stetig.

Die allgemeine Aussage beweisen wir mit Induktion über $k - l \in \mathbb{N}$. Es sei $k = l + 1$. Dann gilt

$$1 - \frac{n}{p} \geq \alpha.$$

Für $u \in W^{k,p}(\Omega), |\gamma| \leq l$ ist $\partial^\gamma u \in W^{1,p}(\Omega)$, und nach dem eben Bewiesenen gilt

$$\| \partial^\gamma u \|_{C^{0,\alpha}(\Omega)} \leq C(\Omega,n,p) \| \partial^\gamma u \|_{W^{1,p}(\Omega)} \leq C(\Omega,n,p) \| u \|_{W^{k,p}(\Omega)},$$

und die Einbettung $W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{l,\alpha}(\Omega)$ ist stetig.

Schließlich sei $k \geq l+2$. Ist $p \geq n$, so gilt

$$k - \frac{n}{p} \geq (k-1) > l + \alpha$$

und für $\bar{p} < \infty$ groß genug ist die Einbettung

$$W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{k-1,\bar{p}}(\Omega) \hookrightarrow C^{l,\alpha}(\Omega)$$

mit Satz 5.3 und per Induktion kompakt.

Ist $1 \leq p < n$, so gilt

$$k - \frac{n}{p} = (k-1) - \frac{n}{p^*} \geq l + \alpha,$$

und die Einbettung

$$W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{k-1,p^*}(\Omega) \hookrightarrow C^{l,\alpha}(\Omega)$$

ist per Induktion und mit Satz 5.3 stetig.

///

Wie wir schon gesehen haben, gilt für $u \in W^{1,n}(B_1(0))$ i.a. nicht $u \in L^\infty(B_1(0))$, insbesondere können wir für $f \in L^n(B_1(0))$ i.a. nicht $fu \in L^n(B_1(0))$ schließen. Um diesen kritischen Fall genauer zu untersuchen beweisen wir folgende Hilfsabschätzung.

Proposition 5.30 *Es sei* $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ *mit* $[f \neq 0] \subseteq \Omega \subset\subset \mathbb{R}^n$ *und für ein* $\beta \in \mathbb{R}$ *und* $M < \infty$

$$\int_{B_\varrho} |f| \leq M\varrho^\beta \quad \textit{für alle } B_\varrho.$$

Dann gilt für $\mu < \beta$ *und* $x \in \Omega$

$$\left| \int |x-y|^{-\mu} f(y) \, \mathrm{d}y \right| \leq \frac{M 2^{\mu_+ + 1} diam(\Omega)^{\beta-\mu}}{\min(1, \beta - \mu)},$$

wobei $\mu_+ := \max(\mu, 0)$.

Beweis:

Wir setzen $B_k := B_{2^{-k}diam(\Omega)}(x)$ und rechnen

$$\left| \int |x-y|^{-\mu} f(y) \, \mathrm{d}y \right| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \int_{B_k - B_{k+1}} |x-y|^{-\mu} |f(y)| \, \mathrm{d}y \leq$$

$$\leq \sum_{k=0}^{\infty} 2^{\mu_+} (2^{-k} diam(\Omega))^{-\mu} \int_{B_k} |f(y)| \, \mathrm{d}y \leq \sum_{k=0}^{\infty} M 2^{\mu_+} (2^{-k} diam(\Omega))^{\beta-\mu} \leq$$

$$\leq M 2^{\mu_+} diam(\Omega)^{\beta-\mu} (1 - (1/2)^{\beta-\mu})^{-1}.$$

Für $\delta := \beta - \mu \geq 1$ sehen wir

$$(1 - (1/2)^\delta)^{-1} \leq (1 - (1/2))^{-1} = 2.$$

Für $0 < \delta \leq 1$ sehen wir mit $\gamma(t) := (1+t)^\delta$, daß

$$(1 - (1/2)^\delta) = 2^{-\delta}(2^\delta - 1) = 2^{-\delta}(\gamma(1) - \gamma(0)) = 2^{-\delta}\gamma'(\theta) = 2^{-\delta}\delta(1+\theta)^{\delta-1} \geq \delta/2,$$

also $(1 - (1/2)^\delta)^{-1} \leq 2/\delta$. In beiden Fällen folgt die Behauptung.

///

Satz 5.5 (John-Nirenberg) *Es sei* $\Omega \subset\subset \mathbb{R}^n$ *offen, konvex, und* $u \in W^{1,1}(\Omega)$ *mit*

$$\int\limits_{\Omega\cap B_\varrho} |\nabla u| \le M\varrho^{n-1} \quad \textit{für alle } B_\varrho. \tag{5.42}$$

Dann gilt

$$\int\limits_{\Omega} \exp(\frac{\sigma}{M}|u-u_\Omega|) \le C_n \; diam(\Omega)^n, \tag{5.43}$$

wobei $\sigma = \sigma_n \dfrac{\mathcal{L}^n(\Omega)}{diam(\Omega)^n}$ *mit* $\sigma_n > 0$ *und* $u_\Omega := \fint\limits_\Omega u$.

Beweis:
Mit Lemma 5.29 sehen wir für $\mathcal{L}^n-$fast alle $x \in \Omega$

$$|u(x) - u_\Omega| \le \frac{d^n}{n\mathcal{L}^n(\Omega)} \int\limits_\Omega |x-y|^{1-n}|\nabla u(y)| \; \mathrm{d}y \tag{5.44}$$

mit $d := diam(\Omega)$.

Für $m \ge 2$ und ein $r = r_m > 0$, unten gewählt, erhalten wir mit der Hölder-Ungleichung

$$\begin{aligned} g(x) &:= \int\limits_\Omega |x-y|^{1-n}|\nabla u(y)| \; \mathrm{d}y = \\ &= \int\limits_\Omega |x-y|^{-r}|\nabla u(y)|^{1/m} \; |x-y|^{1-n+r}|\nabla u(y)|^{1-1/m} \; \mathrm{d}y \le \\ &\le \Big(\int\limits_\Omega |x-y|^{-rm}|\nabla u(y)| \; \mathrm{d}y\Big)^{1/m} \; \Big(\int\limits_\Omega |x-y|^{(1-n+r)m/(m-1)}|\nabla u(y)| \; \mathrm{d}y\Big)^{1-1/m}. \end{aligned} \tag{5.45}$$

Für

$$rm < n \tag{5.46}$$

schätzen wir den ersten Term in der $m-$ten Potenz ab durch

$$\begin{aligned} &\int\limits_\Omega\int\limits_\Omega |x-y|^{-rm}|\nabla u(y)| \; \mathrm{d}y \; \mathrm{d}x \le \int\limits_\Omega\int\limits_\Omega |x-y|^{-rm}|\nabla u(y)| \; \mathrm{d}x \; \mathrm{d}y \le \\ &\le \int\limits_{B_d(0)} |x|^{-rm} \; \mathrm{d}x \; \parallel \nabla u \parallel_{L^1(\Omega)} \le \frac{C_n}{n-rm} d^{n-rm} \; \parallel \nabla u \parallel_{L^1(\Omega)} . \end{aligned} \tag{5.47}$$

Den zweiten Term schätzen wir mit Proposition 5.30 ab. Dazu muß

$$\mu := (n-1-r)m/(m-1) < n-1 =: \beta$$

bzw.

$$0 < \beta - \mu = \Big[(n-1)(m-1) - (n-1-r)m\Big](m-1)^{-1} = \frac{rm-(n-1)}{m-1},$$

also

$$n - 1 < rm \tag{5.48}$$

gelten. In diesem Fall sehen wir mit Proposition 5.30

$$\sup_{x \in \Omega} \int_\Omega |x-y|^{(1-n+r)m/(m-1)} |\nabla u(y)| \ \mathrm{d}y \leq C_n M \frac{m-1}{rm-(n-1)} \ d^{(rm-(n-1))/(m-1)}, \tag{5.49}$$

da $\beta - \mu \leq 1/(m-1)$ mit (5.46). Vergleichen wir (5.46) - (5.49), so wählen wir $r = r_m$ mit

$$rm = n - \frac{1}{2}, \tag{5.50}$$

was (5.46) und (5.48) erfüllt. Aus (5.45), (5.47), (5.49) und (5.50) erhalten wir

$$\int_\Omega g^m \leq C_n d^{1/2} \ \| \nabla u \|_{L^1(\Omega)} \ \Big(C_n M (m-1) \Big)^{m-1} \ d^{1/2} \leq C_n d^n \ \Big(C_n M m \Big)^m, \tag{5.51}$$

da $\| \nabla u \|_{L^1(\Omega)} \leq M d^{n-1}$ mit (5.42). Für $m = 0$ erhalten wir

$$\int_\Omega g^0 \leq \mathcal{L}^n(\Omega) \leq \omega_n d^n$$

und für $m = 1$

$$\begin{aligned} \int_\Omega g &\leq \int_\Omega \int_\Omega |x-y|^{1-n} |\nabla u(y)| \ \mathrm{d}y \ \mathrm{d}x \leq \int_\Omega \int_\Omega |x-y|^{1-n} |\nabla u(y)| \ \mathrm{d}x \ \mathrm{d}y \leq \\ &\leq \int_{B_d(0)} |x|^{1-n} \ \mathrm{d}x \ \ \| \nabla u \|_{L^1(\Omega)} \leq C_n d \ \ \| \nabla u \|_{L^1(\Omega)} \leq C_n d^n M, \end{aligned}$$

also (5.51) für $m = 0, 1$.

Daraus ergibt sich

$$\int_\Omega \sum_{m=0}^\infty \frac{1}{m!} \left(\frac{c_0 \ g}{M} \right)^m \leq C_n d^n \sum_{m=0}^\infty \frac{(c_0 C_n m)^m}{m!} \leq C_n d^n,$$

wenn $c_0 C_n < \frac{1}{2e}$, da man mittels $\frac{m^m}{m!} \leq 3^{m-1}$

$$\sum_{m=0}^\infty \frac{((2e)^{-1} \, m)^m}{m!} \leq \sum_{m=0}^\infty \left(\frac{1}{2e} \right)^m 3^{m-1} = \frac{1}{3} \sum_{m=0}^\infty \left(\frac{3}{2e} \right)^m = \frac{1}{3} \frac{1}{1 - \frac{3}{2e}} \approx 0,74375$$

berechnen kann. Somit folgt (5.43) aus (5.44), wenn wir $\sigma_n := n c_0$ wählen.

///

Teil II
Apriori Abschätzungen für lineare Differentialgleichungen

6 L^2-Theorie

Wir betrachten einen linearen, elliptischen Differentialoperator in Divergenzform auf $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, d.h.

$$Lu := \partial_i(a_{ij}\partial_j u + b_i u) + c_i\partial_i u + du \tag{6.1}$$

mit

$$a_{ij}, b_i, c_i, d \in L^\infty(\Omega),$$

und es gelte für ein $1 \leq \Lambda < \infty$

$$\begin{aligned} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq \Lambda^{-1}|\xi|^2 \quad & \text{für } \mathcal{L}^n\text{-fast alle } x \in \Omega, \\ & \text{für alle } \xi \in \mathbb{R}^n, \end{aligned} \tag{6.2}$$

und

$$\| a_{ij}, b_i, c_i, d \|_{L^\infty(\Omega)} \leq \Lambda. \tag{6.3}$$

Für $f \in W_0^{1,2}(\Omega)^*$ heißt $u \in W^{1,2}(\Omega)$ eine schwache Lösung von

$$Lu \geq (\leq) f,$$

falls

$$\mathcal{L}(u,v) := \int\limits_\Omega \Big((a_{ij}\partial_j u + b_i u)\partial_i v - (c_i\partial_i u + du)v \Big) \leq (\geq) - \langle f, v\rangle \tag{6.4}$$

für alle $v \in W_0^{1,2}(\Omega), v \geq 0$. Oft ist f gegeben durch $f + div\ g$ mit $f \in L^2(\Omega), g \in L^2(\Omega, \mathbb{R}^n)$ und

$$\langle f + div\ g, v\rangle := \int\limits_\Omega (fv - g_i\partial_i v) \quad \text{für } v \in W_0^{1,2}(\Omega). \tag{6.5}$$

$\mathcal{L}$ ist eine stetige Bilinearform auf $W_0^{1,2}(\Omega)$, da

$$|\mathcal{L}(u,v)| \leq C_n\Lambda \| u \|_{W^{1,2}(\Omega)} \| v \|_{W^{1,2}(\Omega)} \tag{6.6}$$

mit (6.3) gilt. Aus (6.2), (6.3) folgt für $u \in W^{1,2}(\Omega)$ die Garding-Ungleichung

$$\mathcal{L}(u,u) \geq \Lambda^{-1} \| \nabla u \|^2_{L^2(\Omega)} - C_n\Lambda \| u \|_{L^2(\Omega)} \| \nabla u \|_{L^2(\Omega)} - \Lambda \| u \|^2_{L^2(\Omega)} \geq$$

$$\geq \frac{1}{2\Lambda} \| \nabla u \|^2_{L^2(\Omega)} - C_n(\Lambda) \| u \|^2_{L^2(\Omega)} \geq \frac{1}{4\Lambda} \| u \|^2_{W^{1,2}(\Omega)} - C_n(\Lambda) \| u \|^2_{L^2(\Omega)} . \tag{6.7}$$

Zuerst erweitern wir das schwache Maximumprinzip, Korollar 3.2, auf Operatoren in Divergenzform.

Satz 6.1 (Schwaches Maximumprinzip für Operatoren in Divergenzform) *Es sei $\Omega \subset\subset \mathbb{R}^n$ offen, L ein linearer, elliptischer Differentialoperator in Divergenzform, der (6.1) - (6.3) in Ω erfüllt, und es gelte*

$$\int_\Omega (b_i\partial_i v - dv) \geq 0 \quad \textit{für alle } v \in W_0^{1,1}(\Omega), v \geq 0. \tag{6.8}$$

Dann gilt für eine Unterlösung $u \in W^{1,2}(\Omega)$, d.h.

$$Lu \geq 0 \quad \textit{schwach in } \Omega,$$

daß

$$\sup_\Omega u \leq \sup_{\partial\Omega} u_+.$$

Dabei ist

$$\sup_{\partial\Omega} u_+ = \inf\{\ t \in \mathbb{R} \mid (u_+ - t)_+ \in W_0^{1,2}(\Omega)\ \}.$$

Beweis:
Für $u \in W^{1,2}(\Omega), v \in W_0^{1,2}(\Omega)$ gilt $uv \in W_0^{1,1}(\Omega)$ und

$$\nabla(uv) = \nabla u \cdot v + u \cdot \nabla v.$$

Aus $Lu \geq 0$ folgt

$$\int_\Omega a_{ij}\partial_j u \partial_i v - (c_i + b_i)(\partial_i u)v \leq$$

$$\leq \int_\Omega (-b_i\partial_i(uv) + duv) \leq 0 \quad \text{für alle } v \geq 0, uv \geq 0.$$

Aus (6.3) folgt

$$\int_\Omega a_{ij}\partial_j u \partial_i v \leq 2\Lambda \int_\Omega v|\nabla u| \quad \text{für alle } v \geq 0, uv \geq 0. \tag{6.9}$$

Im Spezialfall $c_i + b_i = 0$ folgt die Behauptung, wenn wir $v = (u - M)_+$ mit $M = \sup_{\partial\Omega} u_+$ wählen.

Falls die Behauptung im allgemeinen Fall nicht gilt, existiert

$$0 \leq M := \sup_{\partial\Omega} u_+ < t < \sup_\Omega u \leq +\infty, \tag{6.10}$$

und wir setzen

$$v_t := (u - t)_+ = (u_+ - t)_+ \in W_0^{1,2}(\Omega).$$

Es gilt $v_t \geq 0, uv_t \geq 0, v_t \not\equiv 0$ und mit Proposition 5.16

$$\nabla v_t = \begin{cases} \nabla u & \text{fast überall auf } [u > t]\ , \\ 0 & \text{fast überall auf } [u \leq t]\ . \end{cases}$$

Aus (6.2) und (6.9) folgt

$$\Lambda^{-1} \int_\Omega |\nabla v_t|^2 \leq \int_\Omega a_{ij}\partial_j u \partial_i v_t \leq 2\Lambda \int_\Omega v_t |\nabla v_t| \leq 2\Lambda \parallel \nabla v_t \parallel_{L^2(\Omega)} \parallel v_t \parallel_{L^2(\Gamma_t)}, \tag{6.11}$$

wobei

$$\Gamma_t := [\nabla v_t \neq 0] = [\nabla u \neq 0] \cap [u > t].$$

Mit der Sobolev-Einbettung $W_0^{1,2}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ für ein $2 < q < \infty$, siehe Satz 5.3, und der Poincaré-Ungleichung, Satz 5.2, da $v_t \in W_0^{1,2}(\Omega)$, erhalten wir für $\delta := \frac{1}{2} - \frac{1}{q} > 0$, daß

$$\| v_t \|_{L^2(\Gamma_t)} \leq \mathcal{L}^n(\Gamma_t)^\delta \| v_t \|_{L^q(\Omega)} \leq C(\Omega, n) \mathcal{L}^n(\Gamma_t)^\delta \| \nabla v_t \|_{L^2(\Omega)} .$$

Da $v_t \not\equiv 0$, folgt aus (6.11), daß

$$c_0(\Omega, n) \Lambda^{-\frac{2}{\delta}} \leq \mathcal{L}^n([\nabla u \neq 0] \cap [u > t])$$

für alle t , die (6.10) erfüllen.

Für $t \nearrow \sup_\Omega u \leq +\infty$, folgt

$$0 < \mathcal{L}^n([\nabla u \neq 0] \cap [u = \sup_\Omega u]). \tag{6.12}$$

Da $u \in L^2(\Omega)$, gilt $\mathcal{L}^n(u = +\infty) = 0$, und es folgt zuerst

$$0 \leq M \leq \sup_\Omega u < +\infty.$$

Andererseits gilt mit Proposition 5.16

$$\nabla u = 0 \quad \text{fast überall auf } [u = \tau]$$

für alle $\tau \in \mathbb{R}$. Damit ist (6.12) unmöglich, und der Satz ist bewiesen.

///

Dies ergibt die Eindeutigkeit der Lösung des Dirichletproblems unter der Bedingung (6.8). Die Existenz besagt folgender Satz.

Satz 6.2 (Existenz von schwachen Lösungen für das Dirichletproblem) *Es sei $\Omega \subset\subset \mathbb{R}^n$ offen, L ein linearer, elliptischer Differentialoperator in Divergenzform, der (6.1) - (6.3), (6.8) in Ω erfüllt, $f \in W_0^{1,2}(\Omega)^*$ und $\varphi \in W^{1,2}(\Omega)$.*

Dann existiert genau eine schwache Lösung $u \in W^{1,2}(\Omega)$ von

$$\begin{aligned} Lu &= f \quad \textit{schwach in } \Omega, \\ u &= \varphi \quad \textit{auf } \partial\Omega \end{aligned} \tag{6.13}$$

und diese erfüllt

$$\| u \|_{W^{1,2}(\Omega)} \leq C(n, L)(\| f \|_{W_0^{1,2}(\Omega)^*} + \| \varphi \|_{W^{1,2}(\Omega)}).$$

Für eine Familie von Differentialoperatoren $\{L_m\}_{m \in M}$, die (6.1) - (6.3), (6.8) in Ω erfüllen, und für die

$$K := \{a_{ij,m}, c_{i,m}\}_{i,j,m} \subseteq L^1(\Omega)$$

kompakt ist, kann

$$C(n, L_m) \leq C(n, \Lambda, K) \tag{6.14}$$

gleichmäßig beschränkt gewählt werden.

Beweis:
Die Eindeutigkeit ist klar mit Satz 6.1. Da

$$Lu = f \quad \text{schwach in } \Omega$$

äquivalent zu

$$L(u - \varphi) = \tilde{f} \quad \text{schwach in } \Omega$$

mit $\tilde{f} \in W_0^{1,2}(\Omega)^*$ gegeben durch

$$\langle \tilde{f}, v \rangle := \langle f, v \rangle + \int_\Omega \Big(a_{ij}\partial_j\varphi\partial_i v + b_i\varphi\partial_i v - c_i\partial_i\varphi v - d\varphi v \Big) \quad \text{für } v \in W_0^{1,2}(\Omega)$$

ist, können wir $\varphi = 0$ annehmen.

Wegen (6.6) können wir L als linearen Operator auf dem Hilbertraum $W_0^{1,2}(\Omega)$

$$L : W_0^{1,2}(\Omega) \to W_0^{1,2}(\Omega)^* \cong W_0^{1,2}(\Omega),$$

definiert durch

$$\langle -Lu, v \rangle := \mathcal{L}(u, v) = \int_\Omega (a_{ij}\partial_j u\partial_i v + b_i u\partial_i v - c_i(\partial_i u)v - duv),$$

betrachten. Genauso betrachten wir den linearen Operator $K : W_0^{1,2}(\Omega) \to W_0^{1,2}(\Omega)^* \cong W_0^{1,2}(\Omega)$ definiert durch

$$\langle Ku, v \rangle := \int_\Omega uv.$$

K ist kompakt, da $W_0^{1,2}(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ mit dem Satz von Rellich 5.1 kompakt ist. Nach der Garding-Ungleichung (6.7) gilt

$$\langle (-L + C(n, \Lambda)K)u, u \rangle \geq c_0(\Lambda) \parallel u \parallel^2_{W^{1,2}(\Omega)} \qquad \text{für alle } u \in W_0^{1,2}(\Omega).$$

Mit dem Satz von Lax-Milgram 4.1 folgt, daß $-L + C(n, \Lambda)K$ ein Isomorphismus ist. Da L nach Satz 6.1 injektiv ist und K kompakt ist, ist L mit Lemma 4.2 auch ein Isomorphismus. Folglich existiert $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ mit

$$Lu = f,$$

also löst u (6.13). Weiter gilt

$$\parallel u \parallel_{W^{1,2}(\Omega)} \leq \parallel L^{-1} \parallel \parallel f \parallel_{W_0^{1,2}(\Omega)^*} .$$

Die gleichmäßige Abschätzung (6.14) folgt aus dem nächsten Lemma.

///

Lemma 6.1 *Es sei* $\Omega \subset\subset \mathbb{R}^n$ *und* L_m, L *lineare, elliptische Differentialoperatoren, die (6.1) - (6.3) in* Ω *erfüllen, und es gelte*

$$L_m \to L$$

in dem Sinne, daß

$$a_{ij,m}, c_{i,m} \to a_{ij}, c_i \quad \textit{fast überall auf}\, \Omega,$$

$$b_{i,m}, d_m \to b_i, d \quad \textit{schwach in}\ L^2(\Omega).$$

Erfüllt L *weiter (6.8) in* Ω *, so existiert* $C < \infty$ *mit*

$$\| u \|_{W^{1,2}(\Omega)} \leq C \| L_m u \|_{W_0^{1,2}(\Omega)^*} \quad \textit{für alle}\ u \in W_0^{1,2}(\Omega)$$

für m *groß genug.*

Beweis:
Angenommen, das Lemma ist falsch. Dann existieren $u_m \in W_0^{1,2}(\Omega), f_m := L_m u_m$ für eine Teilfolge $m \to \infty$ mit

$$\| f_m \|_{W_0^{1,2}(\Omega)^*} < \frac{1}{m} \| u_m \|_{W^{1,2}(\Omega)} . \tag{6.15}$$

Mit der Garding-Ungleichung (6.7) folgt

$$c_0(\Lambda) \| u_m \|^2_{W^{1,2}(\Omega)} - C(n,\Lambda) \| u_m \|^2_{L^2(\Omega)} \leq$$

$$\leq \langle -L_m u_m, u_m \rangle \leq \| f_m \|_{W_0^{1,2}(\Omega)^*} \| u_m \|_{W^{1,2}(\Omega)},$$

also

$$\| u_m \|_{W^{1,2}(\Omega)} \leq C(n,\Lambda) (\| f_m \|_{W_0^{1,2}(\Omega)^*} + \| u_m \|_{L^2(\Omega)}).$$

Ist $m \geq 2C(n,\Lambda)$, so folgt aus (6.15)

$$\| u_m \|_{W^{1,2}(\Omega)} \leq C(n,\Lambda) \| u_m \|_{L^2(\Omega)} . \tag{6.16}$$

O.B.d.A. können wir annehmen, daß

$$\| u_m \|_{L^2(\Omega)} = 1. \tag{6.17}$$

Mit (6.15) und (6.16) und dem Satz von Rellich Satz 5.1 folgt für eine Teilfolge

$$u_m \to u \quad \text{schwach in}\ W_0^{1,2}(\Omega), \quad \text{stark in}\ L^2(\Omega),$$

$$f_m \to 0 \quad \text{stark in}\ W_0^{1,2}(\Omega)^*.$$

Für $v \in C_0^1(\Omega)$ folgt

$$0 \leftarrow \langle f_m, v \rangle = \langle L_m u_m, v \rangle =$$

$$= \int -a_{ij,m} \partial_j u_m \partial_i v - b_{i,m} u_m \partial_i v + c_{i,m} \partial_i u_m\ v + d_m u_m v \to \langle Lu, v \rangle,$$

also

$$Lu = 0 \quad \text{schwach in}\ \Omega.$$

Da L (6.8) in Ω erfüllt, ergibt das Maximumprinzip Satz 6.1, daß $u = 0$. Da andererseits $u_m \to u$ stark in $L^2(\Omega)$ und somit

$$\| u \|_{L^2(\Omega)} \leftarrow \| u_m \|_{L^2(\Omega)} = 1,$$

führt dies zu einem Widerspruch.

///

Eine innere Apriori-Abschätzung ist die Cacciopoli-Ungleichung.

Lemma 6.2 (Cacciopoli-Ungleichung) *Es sei* $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ *offen,* L *ein linearer, elliptischer Differentialoperator in Divergenzform, der (6.1) - (6.3) in* Ω *erfüllt, und* $f \in W_0^{1,2}(\Omega)^*$.

Für eine schwache Lösung $u \in W^{1,2}(\Omega)$ *von*

$$Lu = f \quad \text{in } \Omega \tag{6.18}$$

und $\Omega' \subset\subset \Omega$ *gilt dann*

$$\| u \|_{W^{1,2}(\Omega')} \leq C(\Omega, \Omega', \Lambda, n) \ (\ \| f \|_{W_0^{1,2}(\Omega)^*} + \| u \|_{L^2(\Omega)} \ ). \tag{6.19}$$

Beweis:
Wir wählen $\eta \in C_0^\infty(\Omega)$ mit $\eta \equiv 1$ auf $\Omega', 0 \leq \eta \leq 1$ und setzen

$$v := u\eta^2 \in W_0^{1,2}(\Omega).$$

Mit (6.18) folgt gemäß (6.4)

$$\int_\Omega a_{ij}\partial_i u \partial_j v = \int_\Omega (-b_i u \partial_i v + c_i \partial_i u \ v + duv) - \langle f, v \rangle,$$

also mit (6.2)

$$\Lambda^{-1} \int |\nabla u|^2 \eta^2 \leq \int a_{ij}\partial_j u \partial_i u \cdot \eta^2 \leq$$

$$\leq - \int (a_{ij}\partial_j u \partial_i \eta \cdot 2\eta u + b_i u \partial_i u \ \eta^2 + b_i u^2 \partial_i \eta \cdot 2\eta - c_i \partial_i u \cdot u\eta^2 - du^2\eta^2)$$

$$+ \| f \|_{W_0^{1,2}(\Omega)^*} \| u\eta^2 \|_{W^{1,2}(\Omega)} \leq$$

$$\leq C(\Lambda) \int \Big(|\nabla u||\eta||u||\nabla \eta| + |\nabla u||u|\eta^2 \Big) + C(\Lambda) \int u^2 \Big(|\nabla \eta||\eta| + \eta^2 \Big)$$

$$+ \frac{1}{4\Lambda} \int |\nabla u|^2 \eta^2 + C(\Lambda) \int u^2 \eta^2 |\nabla \eta|^2 + C(\Lambda) \ \| f \|^2_{W_0^{1,2}(\Omega)^*} \leq$$

$$\leq \frac{1}{2\Lambda} \int |\nabla u|^2 \eta^2 + C(\Lambda, \eta)(\ \| f \|^2_{W_0^{1,2}(\Omega)^*} + \| u \|^2_{L^2(\Omega)} \ ),$$

wobei wir wiederholt die Cauchy-Schwarz-Ungleichung angewandt haben.

Absorbieren wir den ersten Term der rechten Seite in der linken Seite und beachten $\eta \equiv 1$ auf Ω' , so erhalten wir (6.19).

///

Weisen die Koeffizienten von L und die rechte Seite in (6.13) höhere Regularität auf, so hat die Lösung u höhere schwache Ableitungen.

Satz 6.3 (Satz von Friedrichs im Inneren) *Es sei* $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ *offen,* L *ein linearer, elliptischer Differentialoperator in Divergenzform, der (6.1) - (6.3) in* Ω *erfüllt,* $f \in L^2(\Omega)$ *und*

$$\| a_{ij}, b_i \|_{C^{0,1}(\Omega)} \leq \Lambda. \tag{6.20}$$

Für eine schwache Lösung $u \in W^{1,2}(\Omega)$ *von*

$$Lu = f \quad \textit{in}\ \Omega \tag{6.21}$$

gilt dann $u \in W^{2,2}_{loc}(\Omega)$ *und für* $\Omega' \subset\subset \Omega$ *die Abschätzung*

$$\| u \|_{W^{2,2}(\Omega')} \leq C(\Omega, \Omega', \Lambda, n) \Big(\| f \|_{L^2(\Omega)} + \| u \|_{L^2(\Omega)} \Big). \tag{6.22}$$

Weiter erfüllen die schwachen Ableitungen von u *(6.21) in ausdifferenzierter Form, d.h.*

$$a_{ij}\partial_{ij}u + (\partial_j a_{ji} + b_i + c_i)\partial_i u + (\partial_i b_i + d)u = f \quad \textit{fast überall auf}\ \Omega. \tag{6.23}$$

Beweis:
Zuerst vereinfachen wir (6.21) zu

$$\begin{aligned} L_0 u := \partial_i(a_{ij}\partial_j u) &= -\partial_i(b_i u) - c_i\partial_i u - du + f = \\ &= -(\partial_i b_i)u - (b_i + c_i)\partial_i u - du + f =: \hat{f} \end{aligned} \tag{6.24}$$

mit $\hat{f} \in L^2(\Omega)$. L_0 erfüllt alle Voraussetzungen des Satzes und für $\Omega' \subset\subset \Omega'' \subset\subset \Omega''' \subset\subset \Omega$ folgt mit der Cacciopoli-Ungleichung (6.19)

$$\| \hat{f} \|_{L^2(\Omega''')} \leq C(\Omega, \Omega''', \Lambda, n)(\| f \|_{L^2(\Omega)} + \| u \|_{L^2(\Omega)}). \tag{6.25}$$

Für $\Omega'' \subset\subset \Omega''' \subset\subset \Omega$ und $0 < |h|$ klein, so daß

$$\{ \ x \mid d(x, \Omega'') < |h| \ \} \subset\subset \Omega''',$$

ist die endliche Differenz $\partial_l^h u \in W^{1,2}(\Omega'')$, siehe (5.11). Für $v \in W_0^{1,2}(\Omega'')$ rechnen wir mit diskreter partieller Integration und (6.24)

$$\begin{aligned} \langle -L_0(\partial_l^h u), v \rangle = \mathcal{L}_0(\partial_l^h u, v) &= \int_{\Omega''} a_{ij}\partial_j\partial_l^h u \partial_i v = \\ = -\int_{\Omega} \partial_j u \partial_l^{-h}(a_{ij}\partial_i v) &= -\int_{\Omega} a_{ij}\partial_j u \partial_i \partial_l^{-h} v - \int_{\Omega} (\partial_l^{-h} a_{ij})\partial_j u \partial_i v(. - he_l) = \\ = \int_{\Omega'''} \hat{f}\partial_l^{-h} v &- \int_{\Omega''} (\partial_l^h a_{ij})\partial_j u(. + he_l)\partial_i v =: \langle -f_l^h, v \rangle. \end{aligned} \tag{6.26}$$

Da mit Proposition 5.12 (5.12)

$$\| \partial_l^{-h} v \|_{L^2(\Omega''')} \leq \| \nabla v \|_{L^2(\Omega'')},$$

sehen wir $f_l^h \in W_0^{1,2}(\Omega'')^*$ und mit der Cacciopoli-Ungleichung (6.19) und (6.25)

$$\begin{aligned} \| f_l^h \|_{W_0^{1,2}(\Omega'')^*} &\leq C_n(\ \| \hat{f} \|_{L^2(\Omega''')} + \| a_{ij} \|_{C^{0,1}(\Omega)} \| \nabla u \|_{L^2(\Omega''')} \ ) \leq \\ &\leq C(\Lambda, n)(\ \| f \|_{L^2(\Omega)} + \| u \|_{L^2(\Omega)} \ ). \end{aligned} \tag{6.27}$$

(6.26) besagt

$$L_0(\partial_l^h u) = f_l^h \quad \text{schwach in } \Omega''.$$

Mit (5.12), der Cacciopoli-Ungleichung (6.19) und (6.27) folgt

$$\begin{aligned} \| \partial_l^h u \|_{W^{1,2}(\Omega')} \leq C(\Omega'', \Omega', \Lambda, n)(\| f_l^h \|_{W_0^{1,2}(\Omega'')^*} + \| \partial_l^h u \|_{L^2(\Omega'')}) \leq \\ \leq C(\Omega, \Omega', \Lambda, n)(\| f \|_{L^2(\Omega)} + \| u \|_{L^2(\Omega)}). \end{aligned} \tag{6.28}$$

Mit Proposition 5.12 (5.14) folgt $u \in W_{loc}^{2,2}(\Omega)$, und (6.22) folgt aus (6.28), da $\partial_l^h u \to \partial_l u$ stark in $L^2(\Omega')$ mit Proposition 5.12 (5.13).

Da $a_{ij}, b_i \in C^{0,1}(\Omega) \subseteq W^{1,\infty}(\Omega)$ und $\nabla u \in W_{loc}^{1,2}(\Omega)$, folgt mit der Produktregel Proposition 5.14

$$a_{ij}\partial_j u, b_i u \in W_{loc}^{1,2}(\Omega)$$

und

$$\begin{aligned} \nabla(a_{ij}\partial_j u) = (\nabla a_{ij})\partial_j u + a_{ij}\partial_j \nabla u, \\ \nabla(b_i u) = (\nabla b_i)u + b_i \nabla u. \end{aligned} \tag{6.29}$$

Mit (6.21) folgt für $v \in C_0^1(\Omega)$

$$\begin{aligned} -\int fv = \int \Big(a_{ij}\partial_j u \partial_i v + b_i u \partial_i v - c_i \partial_i u \, v - duv \Big) = \\ = \int \Big(-\partial_i(a_{ij}\partial_j u + b_i u) - c_i \partial_i u - du \Big) v. \end{aligned}$$

Da $v \in C_0^1(\Omega)$ beliebig war, folgt (6.23) mit (6.29).

///

Für Abschätzungen am Rand setzen wir für $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$

$$\Omega^{\pm} := \Omega \cap \{\pm x_n > 0\} \subseteq \mathbb{R}^n.$$

Lemma 6.3 (Cacciopoli-Ungleichung am Rand) *L sei ein linearer, elliptischer Differentialoperator in Divergenzform, der (6.1) - (6.3) in $B_2(0)^+$ erfüllt, $f \in W_0^{1,2}(B_2(0)^+)^*$ und $\varphi \in W^{1,2}(B_2(0)^+)$.*

Für eine schwache Lösung $u \in W^{1,2}(B_2(0)^+)$ von

$$\begin{aligned} Lu = f \quad \text{in } B_2(0)^+, \\ u = \varphi \quad \text{auf } B_2(0) \cap \{x_n = 0\} \end{aligned}$$

gilt dann

$$\| u \|_{W^{1,2}(B_1(0)^+)} \leq C(\Lambda, n)(\| f \|_{W_0^{1,2}(B_2(0)^+)^*} + \| \varphi \|_{W^{1,2}(B_2(0)^+)} + \| u \|_{L^2(B_2(0)^+)}).$$

Beweis:
Da

$$\| L\varphi \|_{W_0^{1,2}(B_2(0)^+)^*} \leq C_n \Lambda \| \varphi \|_{W^{1,2}(B_2(0)^+)},$$

genügt es $\varphi = 0$ zu betrachten.

Wir wählen $\eta \in C_0^\infty(B_2(0))$ mit $\eta \equiv 1$ auf $B_1(0), 0 \le \eta \le 1$ und sehen

$$v := u\eta^2 \in W_0^{1,2}(B_2(0)^+)$$

mit Definition 5.5, da $u = 0$ auf $B_2(0) \cap \{x_n = 0\}$. Der Rest des Beweises verläuft wie in Lemma 6.2.

///

Satz 6.4 (Satz von Friedrichs, globale Version) *Es sei* $\Omega \subset\subset \mathbb{R}^n$ *offen mit* $\partial\Omega \in C^{1,1}$, L *ein linearer, elliptischer Differentialoperator in Divergenzform, der (6.1) - (6.3) in* Ω *erfüllt,* $f \in L^2(\Omega), \varphi \in W^{2,2}(\Omega)$ *und*

$$\| a_{ij}, b_i \|_{C^{0,1}(\Omega)} \le \Lambda. \tag{6.30}$$

Für eine schwache Lösung $u \in W^{1,2}(\Omega)$ *von*

$$\begin{aligned} Lu &= f \quad \textit{in } \Omega, \\ u &= \varphi \quad \textit{auf } \partial\Omega, \end{aligned} \tag{6.31}$$

gilt dann $u \in W^{2,2}(\Omega)$ *und*

$$\| u \|_{W^{2,2}(\Omega)} \le C(\Omega, \Lambda, n)(\| f \|_{L^2(\Omega)} + \| \varphi \|_{W^{2,2}(\Omega)} + \| u \|_{L^2(\Omega)}). \tag{6.32}$$

Weiter erfüllen die schwachen Ableitungen von u *(6.31) in ausdifferenzierter Form, d.h.*

$$a_{ij}\partial_{ij}u + (\partial_j a_{ji} + b_i + c_i)\partial_i u + (\partial_i b_i + d)u = f \quad \textit{fast überall auf } \Omega. \tag{6.33}$$

Beweis:
Aus Satz 6.3 folgt sofort $u \in W_{loc}^{2,2}(\Omega)$ und (6.33). Da

$$\| L\varphi \|_{L^2(\Omega)} \le C_n\Lambda \| \varphi \|_{W^{2,2}(\Omega)},$$

genügt es $\varphi = 0$ zu betrachten.

Es sei $x_0 \in \partial\Omega$ beliebig. Da $\partial\Omega \in C^{1,1}$, gibt es eine Umgebung $U(x_0)$ von x_0 und einen $C^{1,1}-$Diffeomorphismus

$$\Psi : U(x_0) \cong B_2(0)$$

mit

$$\Psi(x_0) = 0,$$
$$\Psi(U(x_0) \cap \Omega) = B_2(0)^+.$$

Wir definieren

$$\tilde{u} := u \circ \Psi^{-1} \in W^{1,2}(B_2(0)^+) \cap W_{loc}^{2,2}(B_2(0)^+)$$

und sehen mit Proposition 5.17

$$\partial_j u = \Big((\partial_l \tilde{u}) \circ \Psi\Big)\partial_j \Psi_l,$$

da $\Psi \in C^{1,1}(U(x_0))$. Da $u = 0$ auf $\partial\Omega$, gilt

$$\tilde{u} = 0 \quad \text{auf } B_2(0) \cap \{x_n = 0\}.$$

Für $\tilde{v} \in C_0^1(B_2(0)^+)$ ist $v := \tilde{v} \circ \Psi \in C_0^1(\Omega)$, und wir rechnen

$$-\int_\Omega fv = \int_\Omega \Big(a_{ij}\partial_j u \partial_i v + b_i u \partial_i v - c_i \partial_i u \; v - duv \Big) =$$

$$= \int_\Omega \Big(a_{ij}\partial_j \Psi_l \partial_i \Psi_k \; (\partial_l \tilde{u} \circ \Psi) \; (\partial_k \tilde{v} \circ \Psi) + b_i \partial_i \Psi_k \; (\tilde{u} \circ \Psi) \; (\partial_k \tilde{v} \circ \Psi)$$

$$- c_i \partial_i \Psi_k \; (\partial_k \tilde{u} \circ \Psi)(\tilde{v} \circ \Psi) - d(\tilde{u} \circ \Psi)(\tilde{v} \circ \Psi) \Big) =$$

$$= \int_{B_2(0)^+} \Big((a_{ij}\partial_j \Psi_l \partial_i \Psi_k) \circ \Psi^{-1} \cdot |det(D\Psi^{-1})| \partial_l \tilde{u} \partial_k \tilde{v} + (b_i \partial_i \Psi_k) \circ \Psi^{-1} \cdot |det(D\Psi^{-1})| \tilde{u} \partial_k \tilde{v}$$

$$- (c_i \partial_i \Psi_k) \circ \Psi^{-1} \cdot |det(D\Psi^{-1})| \partial_k \tilde{u} \; \tilde{v} - d \circ \Psi^{-1} \cdot |det(D\Psi^{-1})| \tilde{u} \tilde{v} \Big).$$

Wir setzen

$$\begin{aligned} \tilde{a}_{kl} &:= (a_{ij}\partial_j \Psi_l \partial_i \Psi_k) \circ \Psi^{-1} \cdot |det(D\Psi^{-1})|, \\ \tilde{b}_k &:= (b_i \partial_i \Psi_k) \circ \Psi^{-1} \cdot |det(D\Psi^{-1})|, \\ \tilde{c}_k &:= (c_i \partial_i \Psi_k) \circ \Psi^{-1} \cdot |det(D\Psi^{-1})|, \\ \tilde{d} &:= d \circ \Psi^{-1} \cdot |det(D\Psi^{-1})|, \\ \tilde{f} &:= f \circ \Psi^{-1} \cdot |det(D\Psi^{-1})| \end{aligned} \tag{6.34}$$

und sehen

$$\tilde{L}\tilde{u} := \partial_k(\tilde{a}_{kl}\partial_l \tilde{u} + \tilde{b}_k \tilde{u}) + \tilde{c}_k \partial_k \tilde{u} + \tilde{d}\tilde{u} = \tilde{f} \quad \text{schwach in } B_2(0)^+.$$

Weiter gilt

$$\begin{aligned} \| \tilde{a}_{kl}, \tilde{b}_k \|_{C^{0,1}(B_2(0)^+)} &\le C(\Psi) \| a_{ij}, b_i \|_{C^{0,1}(\Omega)} \le C(\Psi, \Lambda), \\ \| \tilde{c}_k, \tilde{d} \|_{L^\infty(B_2(0)^+)} &\le C(\Psi) \| c_i, d \|_{L^\infty(\Omega)} \le C(\Psi, \Lambda), \\ \| \tilde{f} \|_{L^2(B_2(0)^+)} &\le C(\Psi) \| f \|_{L^2(\Omega)}, \end{aligned}$$

und für $y = \Psi(x)$ mit (6.2)

$$\tilde{a}_{kl}(y)\xi_k\xi_l = a_{ij}(x)\partial_i \Psi_k(x)\xi_k \partial_j \Psi_l(x)\xi_l \cdot |det(D\Psi^{-1}(y))| \ge$$

$$\ge \Lambda^{-1}|\partial_i \Psi_k(x)\xi_k|^2 \cdot |det(D\Psi^{-1}(y))| \ge c_0(\Psi, \Lambda)|\xi|^2 \quad \text{für } \xi \in \mathbb{R}^n,$$

da Ψ ein Diffeomorphismus ist, also $D\Psi(x)$ invertierbar ist.

Also erfüllen $\tilde{L}$ und $\tilde{u}$ alle Bedingungen des Satzes in $B_2(0)^+$ mit geeignetem $\tilde{\Lambda} = C(\Psi, \Lambda)$. Wie im Beweis von Satz 6.3 vereinfachen wir dies zu

$$\tilde{L}_0 \tilde{u} := \partial_k(\tilde{a}_{kl}\partial_l \tilde{u}) = \hat{f} \quad \text{schwach in } B_2(0)^+, \tag{6.35}$$

mit

$$\begin{aligned} \| \hat{f} \|_{L^2(B_{3/2}(0)^+)} &\le C(\Psi, \Lambda)(\| \tilde{f} \|_{L^2(B_{3/2}(0)^+)} + \| \tilde{u} \|_{W^{1,2}(B_{3/2}(0)^+)}) \le \\ &\le C(\Psi, \Lambda)(\| \tilde{f} \|_{L^2(B_2(0)^+)} + \| \tilde{u} \|_{L^2(B_2(0)^+)}) \le \\ &\le C(\Psi, \Lambda)(\| f \|_{L^2(\Omega)} + \| u \|_{L^2(\Omega)}), \end{aligned} \tag{6.36}$$

wobei wir die Cacciopoli-Ungleichung am Rand, Lemma 6.3, verwendet haben. Für $0 < |h| < \frac{1}{4}, l = 1, \ldots, n-1$ ist $\partial_l^h \tilde{u} \in W^{1,2}(B_{5/4}(0)^+)$ und erfüllt

$$\partial_l^h \tilde{u} = 0 \quad \text{auf } B_{5/4}(0)^+ \cap \{x_n = 0\}.$$

Mit (6.26) gilt

$$\tilde{L}_0(\partial_l^h \tilde{u}) = \tilde{f}_l^h \quad \text{schwach in } B_{5/4}(0)^+, \tag{6.37}$$

wobei

$$\| \tilde{f}_l^h \|_{W_0^{1,2}(B_{5/4}(0)^+)^*} \leq C(\Psi, \Lambda)(\| f \|_{L^2(\Omega)} + \| u \|_{L^2(\Omega)})$$

mit der Cacciopoli-Ungleichung am Rand, Lemma 6.3, (6.27) und (6.36). Weiter folgt mit der Cacciopoli-Ungleichung am Rand, Lemma 6.3, und (6.37), daß

$$\| \partial_l^h \tilde{u} \|_{W^{1,2}(B_1(0)^+)} \leq C(\Psi, \Lambda)(\| f \|_{L^2(\Omega)} + \| u \|_{L^2(\Omega)}). \tag{6.38}$$

Da $\partial_l^h \tilde{u} \to \partial_l \tilde{u}$ stark in $L^2_{loc}(B_1(0)^+)$, folgt $\partial_l \tilde{u} \in W^{1,2}(B_1(0)^+)$, und, da wir $\tilde{u} \in W^{2,2}_{loc}(B_2(0)^+)$ bereits wissen, folgt $\partial_{kl} \tilde{u} \in L^2(B_1(0)^+)$ und mit (6.38)

$$\| \partial_{kl} \tilde{u} \|_{L^2(B_1(0)^+)} \leq C(\Psi, \Lambda)(\| f \|_{L^2(\Omega)} + \| u \|_{L^2(\Omega)}) \quad \text{für } (k,l) \neq (n,n). \tag{6.39}$$

Mit (6.23) aus Satz 6.3 angewandt auf (6.35) erhalten wir

$$\partial_{nn} \tilde{u} = \tilde{a}_{nn}^{-1} \Big(- \sum_{(k,l) \neq (n,n)} \tilde{a}_{kl} \partial_{kl} \tilde{u} - \sum_{k,l=1}^{n} (\partial_k \tilde{a}_{kl}) \partial_l \tilde{u} + \hat{f} \Big) \quad \text{in } B_2(0)^+,$$

also mit (6.2) (sodass $\| \tilde{a}_{nn}^{-1} \|_{L^\infty(B_2(0)^+)} \leq C(\Psi, \Lambda)$), $\| \tilde{a}_{kl} \|_{C^{0,1}(B_2(0)^+)} \leq C(\Psi, \Lambda)$, (6.36), (6.39) und der Cacciopoli-Ungleichung am Rand, Lemma 6.3:

$$\| \partial_{nn} \tilde{u} \|_{L^2(B_1(0)^+)} \leq C(\Psi, \Lambda)(\| f \|_{L^2(\Omega)} + \| u \|_{L^2(\Omega)}).$$

Zusammen mit (6.39) folgt $\tilde{u} \in W^{2,2}(B_1(0)^+)$ und für $V(x_0) := \Psi^{-1}(B_1(0)))$ gilt $u \in W^{2,2}(V(x_0) \cap \Omega)$ und mit Proposition 5.17:

$$\| u \|_{W^{2,2}(V(x_0) \cap \Omega)} \leq C(\Psi, \Lambda)(\| f \|_{L^2(\Omega)} + \| u \|_{L^2(\Omega)}). \tag{6.40}$$

Da $\partial\Omega$ kompakt ist, existieren endlich viele $x_1, \ldots, x_N \in \partial\Omega$ und $\delta > 0$ mit

$$\partial\Omega \subseteq \{ \ x \mid d(x, \partial\Omega) < 2\delta \ \} \subseteq V(x_1) \cup \ldots \cup V(x_N).$$

Wir setzen

$$\Omega' := \{ x \in \Omega \mid d(x, \partial\Omega) > \delta \ \} \subset\subset \Omega,$$

und (6.32) folgt aus (6.40) und Satz 6.3 (6.22) für Ω'.

///

Aus dem Satz von Friedrichs, Sätze 6.3 und 6.4, ergibt sich folgender Regularitätssatz.

Satz 6.5 *Es sei* $\Omega \subset\subset \mathbb{R}^n$ *offen,* L *ein linearer, elliptischer Differentialoperator in Divergenzform, der (6.1) und (6.2) in* Ω *erfüllt. Weiter sei* $k \geq 1, f \in W^{k,2}(\Omega)$ *und*

$$\| a_{ij}, b_i \|_{C^{k,1}(\Omega)}, \ \| c_i, d \|_{C^{k-1,1}(\Omega)} \leq \Lambda.$$

Für eine schwache Lösung $u \in W^{1,2}(\Omega)$ *von*

$$Lu = f \quad \text{in } \Omega$$

gilt dann $u \in W^{k+2,2}_{loc}(\Omega)$ *und für* $\Omega' \subset\subset \Omega$ *die Abschätzung*

$$\| u \|_{W^{k+2,2}(\Omega')} \leq C(\Omega, \Omega', \Lambda, n, k)(\| f \|_{W^{k,2}(\Omega)} + \| u \|_{L^2(\Omega)}). \tag{6.41}$$

Ist weiter $\partial\Omega \in C^{k+1,1}$ *und*

$$u = \varphi \quad \text{auf } \partial\Omega,$$

für ein $\varphi \in W^{k+2,2}(\Omega)$ *, so folgt* $u \in W^{k+2,2}(\Omega)$ *und*

$$\| u \|_{W^{k+2,2}(\Omega)} \leq C(\Omega, \Lambda, n, k)(\| f \|_{W^{k,2}(\Omega)} + \| \varphi \|_{W^{k+2,2}(\Omega)} + \| u \|_{L^2(\Omega)}). \tag{6.42}$$

Beweis:
Wieder können wir $\varphi = 0$ annehmen. Für $k = 0$ mit $C^{-1,1}(\Omega)$ ersetzt durch $L^\infty(\Omega)$ sind dies die Aussagen des Satzes von Friedrichs, Sätze 6.3 und 6.4.

Wir nehmen an, daß obige Aussage für $0, \ldots, k-1$ bereits gelten. Daher erhalten wir $u \in W^{k+1,2}_{loc}(\Omega)$ und für $\Omega' \subset\subset \Omega'' \subset\subset \Omega$

$$\| u \|_{W^{k+1,2}(\Omega'')} \leq C(\Omega, \Omega'', \Lambda, n, k)(\| f \|_{W^{k-1,2}(\Omega)} + \| u \|_{L^2(\Omega)}), \tag{6.43}$$

bzw. im Fall mit Rand $u \in W^{k+1,2}(\Omega)$ und

$$\| u \|_{W^{k+1,2}(\Omega)} \leq C(\Omega, \Lambda, n, k)(\| f \|_{W^{k-1,2}(\Omega)} + \| u \|_{L^2(\Omega)}). \tag{6.44}$$

Wie im Beweis von Satz 6.3 vereinfachen wir die Differentialgleichung zu

$$\begin{aligned} L_0 u := \partial_i(a_{ij}\partial_j u) &= -\partial_i(b_i u) - c_i \partial_i u - du + f = \\ &= -(\partial_i b_i)u - (b_i + c_i)\partial_i u - du + f =: \hat{f} \quad \text{schwach in } \Omega \end{aligned} \tag{6.45}$$

mit $\hat{f} \in W^{k,2}_{loc}(\Omega)$ und für $\Omega' \subset\subset \Omega'' \subset\subset \Omega$

$$\begin{aligned} \| \hat{f} \|_{W^{k,2}(\Omega'')} &\leq C(\Lambda, n, k)(\| f \|_{W^{k,2}(\Omega'')} + \| u \|_{W^{k+1,2}(\Omega'')}) \leq \\ &\leq C(\Omega, \Omega'', \Lambda, n, k)(\| f \|_{W^{k,2}(\Omega)} + \| u \|_{L^2(\Omega)}), \end{aligned} \tag{6.46}$$

bzw. im Fall mit Rand $\hat{f} \in W^{k,2}(\Omega)$ und

$$\| \hat{f} \|_{W^{k,2}(\Omega)} \leq C(\Omega, \Lambda, n, k)(\| f \|_{W^{k,2}(\Omega)} + \| u \|_{L^2(\Omega)}). \tag{6.47}$$

Da $a_{ij} \in C^{k,1}(\Omega) \subseteq W^{k+1,\infty}(\Omega), u \in W^{k+1,2}_{loc}(\Omega)$, folgt mit der Produktregel 5.14

$$a_{ij}\partial_j u, (\partial_l a_{ij})\partial_j u \in W^{k,2}_{loc}(\Omega)$$

und für $v \in C_0^\infty(\Omega)$

$$\int a_{ij}\partial_j\partial_l u \partial_i v = -\int a_{ij}\partial_j u \partial_i \partial_l v - \int (\partial_l a_{ij})\partial_j u \partial_i v =$$

$$= \int \hat{f}\partial_l v + \int \partial_i\Big((\partial_l a_{ij})\partial_j u\Big)v = \int \Big(-\partial_l \hat{f} + \partial_i\Big((\partial_l a_{ij})\partial_j u\Big)\Big)v.$$

Dies ergibt

$$L_0(\partial_l u) = \partial_l \hat{f} - \partial_i\Big((\partial_l a_{ij})\partial_j u\Big) \quad \text{schwach in } \Omega. \tag{6.48}$$

Weiter gilt

$$\begin{aligned} &\| \partial_i\Big((\partial_l a_{ij})\partial_j u\Big) \|_{W^{k-1,2}(\Omega'')} \leq \| (\partial_l a_{ij})\partial_j u \|_{W^{k,2}(\Omega'')} \leq \\ &\leq C_n(\Lambda) \| u \|_{W^{k+1,2}(\Omega'')} \leq C(\Omega,\Omega'',\Lambda,n,k)(\| f \|_{W^{k-1,2}(\Omega)} + \| u \|_{L^2(\Omega)}) \end{aligned} \tag{6.49}$$

mit (6.43). Aus (6.48) und (6.43) für $k-1$ folgt $\partial_l u \in W^{k+1,2}_{loc}(\Omega)$, also $u \in W^{k+2,2}_{loc}(\Omega)$, und

$$\begin{aligned} &\| u \|_{W^{k+2,2}(\Omega')} \leq \\ &\leq C(\Omega,\Omega',\Lambda,n,k)(\| \partial_l \hat{f} \|_{W^{k-1,2}(\Omega'')} + \| \partial_i\Big((\partial_l a_{ij})\partial_j u\Big) \|_{W^{k-1,2}(\Omega'')} + \| \partial_l u \|_{L^2(\Omega'')}) \leq \\ &\leq C(\Omega,\Omega',\Lambda,n,k)(\| f \|_{W^{k,2}(\Omega)} + \| u \|_{L^2(\Omega)}) \end{aligned}$$

mit (6.43), (6.46) und (6.49), also (6.41).

Im Fall mit Rand können wir den Rand mit einem $C^{k+1,1}-$Diffeomorphismus Ψ glattbiegen, und, da

$$\| v \|_{W^{k+2,2}(V)} \asymp \| v \circ \Psi^{-1} \|_{W^{k+2,2}(\Psi(V))}$$

mit einer von Ψ und n abhängigen Konstanten, genügt es lokal

$$\Omega \cap B_2(0) = B_2(0)^+$$

zu betrachten.

Mit (6.47), (6.48) und

$$\begin{aligned} &\| \partial_i\Big((\partial_l a_{ij})\partial_j u\Big) \|_{W^{k-1,2}(\Omega)} \leq \| (\partial_l a_{ij})\partial_j u \|_{W^{k,2}(\Omega)} \leq \\ &\leq C_n(\Lambda) \| u \|_{W^{k+1,2}(\Omega)} \leq C(\Omega,\Lambda,n,k)(\| f \|_{W^{k-1,2}(\Omega)} + \| u \|_{L^2(\Omega)}), \end{aligned}$$

das aus (6.44) folgt, sehen wir für $l = 1,\ldots,n$

$$L_0(\partial_l u) = \bar{f}_l \quad \text{schwach in } B_2(0)^+ \tag{6.50}$$

mit

$$\| \bar{f}_l \|_{W^{k-1,2}(B_2(0)^+)} \leq C(\Omega,\Lambda,n,k)(\| f \|_{W^{k,2}(\Omega)} + \| u \|_{L^2(\Omega)}). \tag{6.51}$$

Wir wählen

$$B_{4/3}(0)^+ \subseteq \Omega_0 \subseteq B_{5/3}(0)^+$$

mit $\partial\Omega_0 \in C^\infty$ und $\eta \in C_0^\infty(B_{4/3}(0))$ mit $\eta \equiv 1$ auf $B_1(0)$. Mit Proposition 5.24 und Definition 5.5 folgt $\eta\partial_l u \in W_0^{1,2}(\Omega_0)$ für $l = 1,\dots,n-1$ und mit (6.50), da $u \in W_{loc}^{k+2,2}(B_2(0)^+), a_{ij} \in C^{k,1}(B_2(0)^+)$,

$$\begin{aligned} L_0(\eta\partial_l u) &= \partial_i(a_{ij}\partial_j(\eta\partial_l u)) = \partial_i(a_{ij}\eta\partial_j\partial_l u) + \partial_i(a_{ij}\partial_j\eta\partial_l u) = \\ &= \partial_i(a_{ij}\partial_j\partial_l u)\eta + a_{ij}\partial_j\partial_l u\partial_i\eta + \partial_i(a_{ij}\partial_j\eta\partial_l u) = \\ &= \bar{f}_l\eta + a_{ij}\partial_j\partial_l u\partial_i\eta + \partial_i(a_{ij}\partial_j\eta\partial_l u) =: \bar{f}_{l,\eta} \quad \text{schwach in } B_2(0)^+, \end{aligned} \tag{6.52}$$

wobei

$$\| \bar{f}_{l,\eta} \|_{W^{k-1,2}(B_2(0)^+)} \leq C(\Omega,\Lambda,n,k)(\| f \|_{W^{k,2}(\Omega)} + \| u \|_{L^2(\Omega)})$$

mit (6.44) und (6.51). Aus (6.52) folgt mit (6.44) für $k-1$, daß $\eta\partial_l u \in W^{k+1,2}(\Omega_0)$ und

$$\begin{aligned} \| \partial_l u \|_{W^{k+1,2}(B_1(0)^+)} &\leq \| \eta\partial_l u \|_{W^{k+1,2}(\Omega_0)} \leq \\ &\leq C(\Lambda,n,k)(\| \bar{f}_{l,\eta} \|_{W^{k-1,2}(\Omega_0)} + \| \eta\partial_l u \|_{L^2(\Omega_0)}) \leq \\ &\leq C(\Omega,\Lambda,n,k)(\| f \|_{W^{k,2}(\Omega)} + \| u \|_{L^2(\Omega)}), \end{aligned}$$

insbesondere

$$\| \partial_{ij} u \|_{W^{k,2}(B_1(0)^+)} \leq C(\Omega,\Lambda,n,k)(\| f \|_{W^{k,2}(\Omega)} + \| u \|_{L^2(\Omega)}) \quad \text{für } (i,j) \neq (n,n), \tag{6.53}$$

da wir $u \in W_{loc}^{k+2,2}(\Omega)$ bereits wissen. Wie am Ende des Beweises von Satz 6.4 erhalten wir mit (6.23) aus Satz 6.3 angewandt auf (6.45), daß

$$\partial_{nn} u = a_{nn}^{-1}(- \sum_{(i,j)\neq(n,n)} a_{ij}\partial_{ij} u - \sum_{i,j=1}^n (\partial_i a_{ij})\partial_j u + \hat{f}) \quad \text{in } B_2(0)^+.$$

Kombinieren wir dies mit (6.2), $\| a_{ij} \|_{C^{k,1}(\Omega)} \leq \Lambda$, (6.47), (6.53) und (6.44), so erhalten wir:

$$\| \partial_{nn} u \|_{W^{k,2}(B_1(0)^+)} \leq C(\Omega,\Lambda,n,k)(\| f \|_{W^{k,2}(\Omega)} + \| u \|_{L^2(\Omega)}).$$

Zusammen mit (6.53) folgt $u \in W^{k+2,2}(B_1(0)^+)$ und

$$\| u \|_{W^{k+2,2}(B_1(0)^+)} \leq C(\Omega,\Lambda,n,k)(\| f \|_{W^{k,2}(\Omega)} + \| u \|_{L^2(\Omega)}). \tag{6.54}$$

Überdeckt man $\partial\Omega$ mit endlich vielen Bällen, so folgt $u \in W^{k+2,2}(\Omega)$, und (6.42) folgt aus (6.41) und (6.54).

///

Für glatte Daten sind auch die Lösungen glatt.

Korollar 6.6 *Es sei $\Omega \subset\subset \mathbb{R}^n$ offen, L ein linearer, elliptischer Differentialoperator in Divergenzform, der (6.1) und (6.2) in Ω erfüllt, und dessen Koeffizienten sowie $f \in C^\infty(\overline{\Omega})$. Dann gilt für eine schwache Lösung $u \in W^{1,2}(\Omega)$ von*

$$Lu = f \quad \textit{in } \Omega,$$

daß $u \in C_{loc}^\infty(\Omega)$. Ist weiter $\partial\Omega \in C^\infty$ und

$$u = \varphi \quad \textit{auf } \partial\Omega,$$

für ein $\varphi \in C^\infty(\overline{\Omega})$, so gilt $u \in C^\infty(\overline{\Omega})$.

Beweis:
Nach Satz 6.5 folgt
$$u \in W^{k,2}_{loc}(\Omega) \quad \forall k \in \mathbb{N}$$
und mit dem Satz von Morrey, Satz 5.4, ergibt sich
$$u \in C^{\infty}_{loc}(\Omega).$$
Im Fall mit Rand folgt mit Satz 6.5
$$u \in W^{k,2}(\Omega) \quad \forall k \in \mathbb{N}$$
und wieder ergibt der Satz von Morrey, Satz 5.4,
$$u \in C^{\infty}(\overline{\Omega}).$$

///

7 Schauder-Abschätzungen

Wir betrachten einen linearen, elliptischen Differentialoperator 2. Ordnung in Nicht-Divergenzform

$$(Lu)(x) = a_{ij}(x)\partial_{ij}u(x) + b_i(x)\partial_i u(x) + c(x)u(x) \tag{7.1}$$

für Funktionen $u \in C^2(\Omega)$, die auf einem offenen Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ definiert seien. Dabei seien für ein $0 < \alpha < 1$

$$a_{ij}, b_i, c \in C^{0,\alpha}(\Omega),$$

kurz $L \in C^{0,\alpha}(\Omega)$, und es gelte für ein $1 \leq \Lambda < \infty$

$$\| a_{ij}, b_i, c \|_{C^{0,\alpha}(\Omega)} \leq \Lambda \tag{7.2}$$

und

$$a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq \Lambda^{-1}|\xi|^2 \quad \text{für alle } x \in \Omega, \xi \in \mathbb{R}^n. \tag{7.3}$$

Unser erstes Ziel dieses Kapitels sind die folgenden „inneren Schauder-Abschätzungen":

Satz 7.1 (Innere Schauder-Abschätzungen) *L sei ein linearer, elliptischer Differentialoperator 2. Ordnung in Nicht-Divergenzform, der (7.1) – (7.3) auf $\Omega = B_2(0) \subseteq \mathbb{R}^n$ erfüllt.*

Dann gilt für $u \in C^{2,\alpha}(B_2(0))$:

$$\| u \|_{C^{2,\alpha}(B_1(0))} \leq C(\Lambda, n, \alpha)\Big(\| Lu \|_{C^{0,\alpha}(B_2(0))} + \| u \|_{L^2(B_2(0))} \Big).$$

□

Zum Beweis dieses Satzes benötigen wir zunächst die folgende primitivste Version einer Schauder-Abschätzung, die wir mittels eines von Simon aus [S97] (Theorem 1) entnommenen Skalierungs-Arguments beweisen werden.

Proposition 7.1 *Für $u \in C^{2,\alpha}_{loc}(\mathbb{R}^n), 0 < \alpha < 1$, mit*

$$\textit{hö}l_{\mathbb{R}^n,\alpha} D^2 u := \sum_{i,j=1}^n \textit{hö}l_{\mathbb{R}^n,\alpha}(\partial_{ij}u) < \infty$$

gilt

$$\textit{hö}l_{\mathbb{R}^n,\alpha} D^2 u \leq C(n,\alpha)\ \textit{hö}l_{\mathbb{R}^n,\alpha}\Delta u.$$

Beweis:
Wir nehmen an, dass die Aussage falsch ist, d.h. dass kein solches $C(n,\alpha) < \infty$ existiere. Dann existiert eine Folge $u_m \in C^{2,\alpha}_{loc}(\mathbb{R}^n)$ mit $\textit{hö}l_{\mathbb{R}^n,\alpha} D^2 u_m < \infty$, welche

$$\textit{hö}l_{\mathbb{R}^n,\alpha}\Delta u_m < m^{-1}\textit{hö}l_{\mathbb{R}^n,\alpha} D^2 u_m < \infty \tag{7.4}$$

für jedes $m \in \mathbb{N}$ erfüllt. Durch Ersetzen von u_m durch $\lambda_m u_m$, mit $\lambda_m > 0$ geeignet, können wir annehmen, daß

$$\textit{hö}l_{\mathbb{R}^n,\alpha} D^2 u_m = 1. \tag{7.5}$$

Man kann sich nun anhand von $\textit{hö}l_{\mathbb{R}^n,\alpha}(D^2u_m) = \sum_{i,j=1}^n \textit{hö}l_{\mathbb{R}^n,\alpha}(\partial_{ij}u_m)$ und anhand des Schubladenprinzips davon überzeugen, dass es eine Teilfolge u_{m_l}, ein Paar $(i,j) =: \gamma \in$

$\{1,\dots,n\}^2$, einen Standard-Einheitsvektor e_i, Punkte $x_{m_l} \in \mathbb{R}^n$ und $h_{m_l} > 0$ gibt, für welche

$$h_{m_l}^{-\alpha} |\partial^\gamma u_{m_l}(x_{m_l} \pm h_{m_l} e_i) - \partial^\gamma u_{m_l}(x_{m_l})| \geq \frac{1}{2n^3} > 0$$

für alle l gilt. Benennen wir die Folge m_l in m um und betrachten wir die reskalierten Funktionen

$$\tilde{u}_m(x) := h_m^{-2-\alpha}\, u_m(x_m + h_m x),$$

so bleiben (7.4) und (7.5) unverändert, und wir können o.B.d.A. annehmen, daß

$$|\partial^\gamma u_m(\pm e_i) - \partial^\gamma u_m(0)| \geq \frac{1}{2n^3} > 0 \tag{7.6}$$

für eine Teilfolge $m \to \infty$ gilt. Weiter bleiben (7.4) - (7.6) bei Subtraktion eines beliebigen Polynoms zweiter Ordnung $p(x) := c_{ij}\, x_i x_j + c_i x_i + c$ von $\tilde{u}_m$ erhalten, sodass wir weiterhin

$$u_m(0) = 0, \quad \nabla u_m(0) = 0, \quad D^2 u_m(0) = 0 \tag{7.7}$$

annehmen können. Aus (7.5), (7.7) und dem Mittelwertsatz folgen nun

$$\begin{aligned} \| D^2 u_m \|_{L^\infty(B_R(0))} &\leq R^\alpha, \\ \| \nabla u_m \|_{L^\infty(B_R(0))} &\leq C_n R^{1+\alpha}, \\ \| u_m \|_{L^\infty(B_R(0))} &\leq C_n R^{2+\alpha}. \end{aligned} \tag{7.8}$$

Mit (7.5) und (7.8) folgt

$$\| u_m \|_{C^{2,\alpha}(B_R(0))} \leq C(n,\alpha,R).$$

Damit konvergiert für eine weitere Teilfolge

$$u_m \to u \quad \text{stark in } C^2_{loc}(\mathbb{R}^n),$$

für eine $C^2_{loc}(\mathbb{R}^n)$-Funktion u. Aus (7.4) - (7.8) folgen $u \in C^{2,\alpha}_{loc}(\mathbb{R}^n)$ und

$$\Delta u \equiv const \quad \text{auf } \mathbb{R}^n, \tag{7.9}$$

$$h\ddot{o}l_{\mathbb{R}^n,\alpha} D^2 u \leq 1, \tag{7.10}$$

$$\partial^\gamma u(\pm e_i) \neq \partial^\gamma u(0), \tag{7.11}$$

$$D^2 u(0) = 0, \tag{7.12}$$

$$\| u \|_{L^\infty(B_R(0))} \leq C_n R^{2+\alpha} \tag{7.13}$$

für jedes $R > 0$. Aus (7.9) und (7.12) folgt $\Delta u = 0$, also dass u harmonisch auf $\mathbb{R}^n$ ist, und die Cauchy-Abschätzungen (Satz 2.5, hier mit dem Paar $B_R(0) \subset B_{2R}(0)$)) ergeben mit (7.13):

$$\| \partial^\kappa u \|_{L^\infty(B_R(0))} \leq C(n,\kappa) R^{-|\kappa|+2+\alpha} \tag{7.14}$$

für beliebige Multi-Indizes κ und jedes $R > 0$. Für $|\kappa| = 3$ und $R \to \infty$ folgt

$$D^3 u = 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^n,$$

also dass u ein quadratisches Polynom und somit $D^2 u$ konstant ist. Dies widerspricht (7.11), wegen $|\gamma| = 2$, und die Proposition ist beweisen.

///

Betrachtet man eine lineare Transformation, so erhält man folgende Proposition.

Proposition 7.2 *Es sei* $1 \leq \Lambda < \infty$ *und* $(a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ *mit*

$$a_{ij}\xi_i\xi_j \geq \Lambda^{-1}|\xi|^2 \quad \textit{für } \xi \in \mathbb{R}^n,$$
$$|a_{ij}| \leq \Lambda$$

und $u \in C^{2,\alpha}_{loc}(\mathbb{R}^n), 0 < \alpha < 1$ *, mit*

$$höl_{\mathbb{R}^n,\alpha} D^2 u < \infty.$$

Dann gilt

$$höl_{\mathbb{R}^n,\alpha} D^2 u \leq C(\Lambda, n, \alpha)\ höl_{\mathbb{R}^n,\alpha}(a_{ij}\partial_{ij}u).$$

Beweis:
Da $\partial_{ij}u$ symmetrisch in i, j ist, können wir annehmen, daß

$$a_{ij} = a_{ji}.$$

Dann ist

$$A := (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

symmetrisch, positiv definit und

$$\Lambda^{-1} I_n \leq A \leq C_n \Lambda I_n.$$

Die positiv definite Wurzel $B = (b_{ij})$ von A erfüllt

$$\begin{gathered} A = B^2, B^T = B, \\ \Lambda^{-1/2} I_n \leq B \leq (C_n\Lambda)^{1/2} I_n. \end{gathered} \tag{7.15}$$

Setzen wir

$$\tilde{u}(x) = u(Bx),$$

so berechnet man

$$\partial_k \tilde{u}(x) = \partial_i u(Bx) b_{ik},$$
$$\partial_{kl} \tilde{u}(x) = \partial_{ij} u(Bx) b_{ik} b_{jl},$$

woraus insbesondere

$$\Delta\tilde{u}(x) = \delta_{kl}\partial_{kl}\tilde{u}(x) = \partial_{ij}u(Bx)b_{il}b_{lj} = a_{ij}\partial_{ij}u(Bx), \tag{7.16}$$

wegen $B^T = B$ und $b_{il}b_{lj} = (B^2)_{ij} = a_{ij}$ folgt. Zusammen mit (7.15) folgt hieraus:

$$höl_{\mathbb{R}^n,\alpha}\Delta\tilde{u} \leq C_n \Lambda^{\alpha/2}\ höl_{\mathbb{R}^n,\alpha}(a_{ij}\partial_{ij}u) < \infty,$$
$$höl_{\mathbb{R}^n,\alpha} D^2\tilde{u} \leq C_n \Lambda^{1+\alpha/2}\ höl_{\mathbb{R}^n,\alpha} D^2 u < \infty,$$
$$höl_{\mathbb{R}^n,\alpha} D^2 u \leq C_n \Lambda^{1+\alpha/2}\ höl_{\mathbb{R}^n,\alpha} D^2\tilde{u},$$

was insbesondere $\tilde{u} \in C^{2,\alpha}_{loc}(\mathbb{R}^n)$ wie in (7.8) zeigt. Also erfüllt $\tilde{u}$ die Voraussetzungen von Proposition 7.1, aus der wir

$$höl_{\mathbb{R}^n,\alpha} D^2 \tilde{u} \leq C(n,\alpha)\ höl_{\mathbb{R}^n,\alpha} \Delta \tilde{u}$$

erhalten. Zusammen mit den drei obigen Ungleichungen folgt die Proposition.

///

Wir beweisen zuerst folgende schwächere Version von Satz 7.1.

Proposition 7.3 *Unter den Voraussetzungen von Satz 7.1 gilt*

$$\| u \|_{C^{2,\alpha}(B_1(0))} \leq C(\Lambda,n,\alpha)\Big(\| Lu \|_{C^{0,\alpha}(B_2(0))} + \| u \|_{C^2(B_2(0))} \Big). \tag{7.17}$$

Beweis: Wir wählen $\eta \in C_0^\infty(B_2(0))$ mit $\eta \equiv 1$ auf $B_1(0)$ und $0 < \varrho < 1/2$ klein, wie unten beschrieben. Für $x_0 \in B_1(0)$ gilt $B_{2\varrho}(x_0) \subseteq B_2(0)$, und wir setzen

$$\eta_{x_0,\varrho}(x) := \eta(\frac{x - x_0}{\varrho})$$

und

$$v := u\eta_{x_0,\varrho} \in C_0^{2,\alpha}(B_{2\varrho}(x_0)).$$

Es gilt

$$v = u \quad \text{auf } B_\varrho(x_0). \tag{7.18}$$

Aus (7.2) und (7.3) folgt mit Proposition 7.2

$$höl_{\mathbb{R}^n,\alpha} D^2 v \leq C(\Lambda,n,\alpha)\ höl_{\mathbb{R}^n,\alpha}(a_{ij}(x_0)\partial_{ij} v). \tag{7.19}$$

Wir schreiben

$$\begin{aligned} a_{ij}(x_0)\partial_{ij} v = a_{ij}\partial_{ij} v - (a_{ij} - a_{ij}(x_0))\partial_{ij} v = \\ = Lv - b_i\partial_i v - cv - (a_{ij} - a_{ij}(x_0))\partial_{ij} v. \end{aligned}$$

Mit (7.19), Proposition 5.2 und wegen $a_{ij} \in C^{0,\alpha}(B_2(0))$ mit Abschätzung (7.2) erhalten wir:

$$\begin{gathered} höl_{\mathbb{R}^n,\alpha} D^2 v \leq \\ \leq C(\Lambda,n,\alpha)\Big(höl_{\mathbb{R}^n,\alpha}(Lv) + höl_{\mathbb{R}^n,\alpha}((a_{ij} - a_{ij}(x_0))\partial_{ij} v)\Big) \\ +C(\Lambda,n,\alpha)\ höl_{\mathbb{R}^n,\alpha}(b_i\partial_i v + cv) \leq \\ \leq C(\Lambda,n,\alpha) \| a_{ij} - a_{ij}(x_0) \|_{L^\infty(B_{2\varrho(x_0)})}\ \ höl_{\mathbb{R}^n,\alpha}(D^2 v) \\ +C(\Lambda,n,\alpha) \| D^2 v \|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}\ \ höl_{\mathbb{R}^n,\alpha}((a_{ij} - a_{ij}(x_0)) \\ +C(\Lambda,n,\alpha)\ höl_{\mathbb{R}^n,\alpha}(Lv) + C(\Lambda,n,\alpha) \| b_i, c \|_{C^{0,\alpha}(B_2(0))} \| v \|_{C^{1,\alpha}(\mathbb{R}^n)} \leq \\ \leq C(\Lambda,n,\alpha)\varrho^\alpha\ höl_{\mathbb{R}^n,\alpha}(D^2 v) + C(\Lambda,n,\alpha)\Big(höl_{\mathbb{R}^n,\alpha}(Lv) + \| v \|_{C^2(\mathbb{R}^n)} \Big). \end{gathered}$$

Wählen wir $\varrho = \varrho(\Lambda,n,\alpha)$ klein genug, so erhalten wir

$$höl_{\mathbb{R}^n,\alpha} D^2 v \leq C(\Lambda,n,\alpha)\Big(höl_{\mathbb{R}^n,\alpha}(Lv) + \| v \|_{C^2(\mathbb{R}^n)} \Big). \tag{7.20}$$

Schließlich rechnen wir

$$\begin{aligned} \| v \|_{C^2(\mathbb{R}^n)} &\le C \| u \|_{C^2(B_2(0))} \| \eta_{x_0,\varrho} \|_{C^2(\mathbb{R}^n)} \le \\ &\le C_\varrho \| u \|_{C^2(B_2(0))} \le C(\Lambda, n, \alpha) \| u \|_{C^2(B_2(0))} \end{aligned} \tag{7.21}$$

und

$$Lv = a_{ij}\partial_{ij}(u\eta_{x_0,\varrho}) + b_i\partial_i(u\eta_{x_0,\varrho}) + cu\eta_{x_0,\varrho} =$$
$$= Lu \cdot \eta_{x_0,\varrho} + a_{ij}(\partial_i u \partial_j \eta_{x_0,\varrho} + \partial_j u \partial_i \eta_{x_0,\varrho}) + u a_{ij}\partial_{ij}\eta_{x_0,\varrho} + u b_i \partial_i \eta_{x_0,\varrho},$$

also wieder mittels Proposition 5.2 und mit den Abschätzungen in (7.2):

$$\begin{aligned} &h\ddot{o}l_{\mathbb{R}^n,\alpha}(Lv) \le \\ &\le C \| Lu, \nabla u, u \|_{C^{0,\alpha}(B_2(0))} \| 1, a_{ij}, b_i, c \|_{C^{0,\alpha}(B_2(0))} \| \eta_{x_0,\varrho} \|_{C^{2,\alpha}(\mathbb{R}^n)} \le \\ &\le C(\Lambda, n, \alpha) \Big(\| Lu \|_{C^{0,\alpha}(B_2(0))} + \| u \|_{C^{1,\alpha}(B_2(0))} \Big). \end{aligned} \tag{7.22}$$

Nun ergeben (7.18), (7.20) - (7.22)

$$h\ddot{o}l_{\alpha, B_\varrho(x_0)} D^2 u \le h\ddot{o}l_{\mathbb{R}^n,\alpha} D^2 v \le C(\Lambda, n, \alpha) \Big(\| Lu \|_{C^{0,\alpha}(B_2(0))} + \| u \|_{C^2(B_2(0))} \Big).$$

Da $x_0 \in B_1(0)$ beliebig war und $\varrho = \varrho(\Lambda, n, \alpha)$, erhalten wir

$$h\ddot{o}l_{\alpha, B_1(0)} D^2 u \le C(\Lambda, n, \alpha) \Big(\| Lu \|_{C^{0,\alpha}(B_2(0))} + \| u \|_{C^2(B_2(0))} \Big)$$

und somit zusammen mit dem Mittelwertsatz:

$$\begin{aligned} \| u \|_{C^{2,\alpha}(B_1(0))} &\le h\ddot{o}l_{\alpha, B_1(0)} D^2 u + C_n \| u \|_{C^2(B_2(0))} \le \\ &\le C(\Lambda, n, \alpha) \Big(\| Lu \|_{C^{0,\alpha}(B_2(0))} + \| u \|_{C^2(B_2(0))} \Big), \end{aligned}$$

also (7.17).

///

Beweis von Satz 7.1:
Wir setzen

$$S := |D^2 u|^{(n/2+2)}_{0,B_2(0)} := \sup_{x \in B_2(0)} d(x, \partial B_2(0))^{n/2+2} |D^2 u(x)|.$$

Da $u \in C^{2,\alpha}(B_2(0))$, gilt $S < \infty$. Für $x_0 \in B_2(0)$ wählen wir $\varrho := \frac{1}{3} d(x_0, \partial B_2(0)) < 1$, also $B_{2\varrho}(x_0) \subseteq B_2(0)$ und

$$d(x, \partial B_2(0)) \ge \varrho \quad \text{für alle } x \in B_{2\varrho}(x_0). \tag{7.23}$$

Wir reskalieren

$$\tilde{u}(x) := u(x_0 + \varrho x),$$
$$\tilde{a}_{ij}(x) := a_{ij}(x_0 + \varrho x),$$
$$\tilde{b}_i(x) := \varrho b_i(x_0 + \varrho x),$$
$$\tilde{c} := \varrho^2 c(x_0 + \varrho x),$$

für $x \in B_2(0)$ und erhalten

$$\begin{aligned} Lu(x_0+\varrho x) &= (a_{ij}\partial_{ij}u + b_i\partial_i u + cu)(x_0+\varrho x) = \\ &= (\tilde{a}_{ij}\varrho^{-2}\partial_{ij}\tilde{u} + \varrho^{-1}\tilde{b}_i\varrho^{-1}\partial_i\tilde{u} + \varrho^{-2}\tilde{c}\tilde{u})(x) = \varrho^{-2}\tilde{L}\tilde{u}(x) \end{aligned} \tag{7.24}$$

und wegen (7.23) und der Definition von S:

$$\| D^2\tilde{u} \|_{L^\infty(B_1(0))} = \varrho^2 \| D^2 u \|_{L^\infty(B_\varrho(x_0))},$$

$$\varrho^{n/2} \| D^2\tilde{u} \|_{L^\infty(B_2(0))} = \varrho^{n/2+2} \| D^2 u \|_{L^\infty(B_{2\varrho}(x_0))} \leq S,$$

$$\| \tilde{u} \|_{L^2(B_2(0))} \leq \varrho^{-n/2} \| u \|_{L^2(B_2(0))},$$

$$\| \tilde{L}\tilde{u} \|_{C^{0,\alpha}(B_2(0))} = \varrho^2 \| Lu \|_{L^\infty(B_{2\varrho}(x_0))} + \varrho^{2+\alpha} h\ddot{o}l_{\alpha,B_{2\varrho}(x_0)}(Lu) \leq \| Lu \|_{C^{0,\alpha}(B_2(0))},$$

$$\| \tilde{a}_{ij}, \tilde{b}_i, \tilde{c} \|_{C^{0,\alpha}(B_2(0))} \leq \| a_{ij}, b_i, c \|_{C^{0,\alpha}(B_2(0))} \leq \Lambda,$$

wobei wir noch $\varrho \leq 1$ und (7.2) benutzten. Insbesondere erfüllt $\tilde{L}$ (7.1) - (7.3) auf $B_2(0)$. Anhand der Einbettungen $C^2(\overline{B_r(0)}) \hookrightarrow C^1(\overline{B_r(0)}) \hookrightarrow L^2(B_r(0))$, für beliebiges $r \in (0,2]$, von denen die erste nach den Propositionen 5.3 und 5.4 kompakt ist, erhalten wir mit dem Ehrling-Lemma 4.1:

$$\| \tilde{u} \|_{C^1(B_r(0))} \leq \frac{1}{2} \| \tilde{u} \|_{C^2(B_r(0))} + C_n \| \tilde{u} \|_{L^2(B_r(0))} .$$

Zusammen mit $\| \tilde{u} \|_{C^2(B_r(0))} = \| D^2\tilde{u} \|_{L^\infty(B_r(0))} + \| \tilde{u} \|_{C^1(B_r(0))}$ erhalten wir:

$$\| \tilde{u} \|_{C^1(B_r(0))} \leq \| D^2\tilde{u} \|_{L^\infty(B_r(0))} + 2C_n \| \tilde{u} \|_{L^2(B_r(0))}$$

und somit

$$\| \tilde{u} \|_{C^2(B_r(0))} = \| D^2\tilde{u} \|_{L^\infty(B_r(0))} + \| \tilde{u} \|_{C^1(B_r(0))} \leq C_n \left(\| D^2\tilde{u} \|_{L^\infty(B_r(0))} + \| \tilde{u} \|_{L^2(B_r(0))}\right)$$

für $r \in (0,2]$ und $C_n < \infty$. Desweiteren liefert Proposition 5.4 mit dem Ehrling-Lemma 4.1 sofort die Interpolationsungleichung

$$\| D^2\tilde{u} \|_{L^\infty(B_1(0))} \leq \| \tilde{u} \|_{C^2(B_1(0))} \leq \varepsilon \| \tilde{u} \|_{C^{2,\alpha}(B_1(0))} + C_{n,\alpha,\varepsilon} \| \tilde{u} \|_{L^2(B_1(0))}$$

für beliebiges $0 < \varepsilon < 1$ und $C_{n,\alpha,\varepsilon} < \infty$. Mit Proposition 7.3 und diesen Interpolationsungleichungen ergibt dies, da $\varrho \leq 1$:

$$d(x_0, \partial B_2(0))^{n/2+2} |D^2 u(x_0)| \leq (3\varrho)^{n/2+2} \| D^2 u \|_{L^\infty(B_\varrho(x_0))} =$$

$$= 3^{n/2+2} \varrho^{n/2} \| D^2\tilde{u} \|_{L^\infty(B_1(0))} \leq \varepsilon\varrho^{n/2} \| \tilde{u} \|_{C^{2,\alpha}(B_1(0))} + C_{n,\alpha,\varepsilon}\varrho^{n/2} \| \tilde{u} \|_{L^2(B_1(0))} \leq$$

$$\leq C(\Lambda,n,\alpha)\varepsilon\varrho^{n/2}(\| \tilde{L}\tilde{u} \|_{C^{0,\alpha}(B_2(0))} + \| \tilde{u} \|_{C^2(B_2(0))}) + C_{n,\alpha,\varepsilon}\varrho^{n/2} \| \tilde{u} \|_{L^2(B_1(0))} \leq$$

$$\begin{aligned} &\leq C(\Lambda,n,\alpha) \| \tilde{L}\tilde{u} \|_{C^{0,\alpha}(B_2(0))} + C_\varepsilon(\Lambda,n,\alpha)\varrho^{n/2} \| \tilde{u} \|_{L^2(B_2(0))} \\ &\quad + C(\Lambda,n,\alpha)\varepsilon\varrho^{n/2} \| D^2\tilde{u} \|_{L^\infty(B_2(0))} \leq \end{aligned}$$

$$\leq C_\varepsilon(\Lambda, n, \alpha)\Big(\parallel Lu \parallel_{C^{0,\alpha}(B_2(0))} + \parallel u \parallel_{L^2(B_2(0))} \Big) + C(\Lambda, n, \alpha)\varepsilon S.$$

Nehmen wir das Supremum auf der linken Seite für $x_0 \in B_2(0)$ und wählen wir $\varepsilon = \varepsilon(\Lambda, n, \alpha)$ klein, so erhalten wir

$$S \leq C(\Lambda, n, \alpha)\Big(\parallel Lu \parallel_{C^{0,\alpha}(B_2(0))} + \parallel u \parallel_{L^2(B_2(0))} \Big). \tag{7.25}$$

Durch Reskalieren und Überdecken von $B_1(0)$ durch kleine Bälle erhalten wir aus (7.17):

$$\parallel u \parallel_{C^{2,\alpha}(B_1(0))} \leq C(\Lambda, n, \alpha)\Big(\parallel Lu \parallel_{C^{0,\alpha}(B_{3/2}(0))} + \parallel u \parallel_{C^2(B_{3/2}(0))} \Big) \leq$$

$$\leq C(\Lambda, n, \alpha)\Big(\parallel Lu \parallel_{C^{0,\alpha}(B_2(0))} + \parallel u \parallel_{L^2(B_2(0))} + \parallel D^2 u \parallel_{L^\infty(B_{3/2}(0))} \Big).$$

Da $d(x, \partial B_2(0)) \geq \frac{1}{2}$ für alle $x \in B_{3/2}(x_0)$ gilt, folgt

$$\parallel D^2 u \parallel_{L^\infty(B_{3/2}(0))} \leq 2^{n/2+2} S$$

aus der Definition von S und somit die Behauptung mit (7.25).

///

Für die Existenz klassischer Lösungen brauchen wir Abschätzungen am Rand.

Satz 7.2 (Schauder-Abschätzungen am Rand) *L sei ein linearer, elliptischer Differentialoperator in Nicht-Divergenzform, der (7.1) – (7.3) auf $B_2(0)^+ \subseteq \mathbb{R}^n$ erfüllt. Dann gilt für $u, \varphi \in C^{2,\alpha}(B_2(0)^+)$ mit*

$$u = \varphi \quad \textit{auf } \{x_n = 0\} \cap B_2(0),$$

daß

$$\parallel u \parallel_{C^{2,\alpha}(B_1(0)^+)} \leq$$
$$\leq C(\Lambda, n, \alpha)(\parallel Lu \parallel_{C^{0,\alpha}(B_2(0)^+)} + \parallel \varphi \parallel_{C^{2,\alpha}(B_2(0)^+)} + \parallel u \parallel_{L^2(B_2(0)^+)}).$$

□

Da

$$\parallel L\varphi \parallel_{C^{0,\alpha}(B_2(0)^+)} \leq C(\Lambda, n, \alpha) \parallel \varphi \parallel_{C^{2,\alpha}(B_2(0)^+)},$$

genügt es $\varphi = 0$ zu betrachten. Wieder betrachten wir zuerst $L = \Delta$ auf $\mathbb{R}^n_+ := \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}_+$, wobei $\mathbb{R}_+ =]0, \infty[$.

Proposition 7.4 *Für $u \in C^{2,\alpha}_{loc}(\overline{\mathbb{R}^n_+}), 0 < \alpha < 1$, mit $u = 0$ auf $\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}$ und*

$$höl_{\alpha,\mathbb{R}^n_+}(D^2 u) < \infty.$$

Dann existiert eine Konstante $C(n, \alpha)$, für die

$$höl_{\alpha,\mathbb{R}^n_+}(D^2 u) \leq C(n, \alpha) höl_{\alpha,\mathbb{R}^n_+}(\Delta u)$$

gilt.

Beweis [S97] Theorem 4:
Angenommen die Aussage ist falsch, dann existiert eine Folge $u_m \in C^{2,\alpha}_{loc}(\overline{\mathbb{R}^n_+})$ mit

$$u_m = 0 \quad \text{auf } \mathbb{R}^{n-1} \times \{0\} \tag{7.26}$$

und

$$h\ddot{o}l_{\alpha,\mathbb{R}^n_+}(\Delta u_m) < m^{-1} h\ddot{o}l_{\alpha,\mathbb{R}^n_+}(D^2 u_m) < \infty. \tag{7.27}$$

Wir können annehmen, daß

$$h\ddot{o}l_{\alpha,\mathbb{R}^n_+}(D^2 u_m) = 1 \tag{7.28}$$

für jedes $m \in \mathbb{N}$ erfüllt ist. Wie im Beweis von Proposition 7.1 kann man anhand des Schubladenprinzips die Existenz eines Paares $(i,j) =: \gamma \in \{1,\ldots,n\}^2$, eines Standard-Einheitsvektors e_i und von Punkten $x_m \in \mathbb{R}^n_+$ und $h_m > 0$ beweisen, so daß für eine Teilfolge $m \to \infty$, die wir o.B.d.A. betrachten,

$$h_m^{-\alpha} |\partial^\gamma u_m(x_m \pm h_m e_i) - \partial^\gamma u_m(x_m)| \geq \frac{1}{2n^3} > 0$$

gilt. Nach einer Translation um einen Vektor aus $\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}$ können wir annehmen, dass jedes x_m auf der e_n-Achse liegt und somit $|x_m| = \langle x_m, e_n\rangle$ gilt. Wir unterscheiden nun zwei Fälle:

$$\lim_{m\to\infty} h_m^{-1}\langle x_m, e_n\rangle = +\infty \tag{7.29}$$

und

$$\liminf_{m\to\infty} h_m^{-1}|x_m| < +\infty. \tag{7.30}$$

Im ersten Fall reskalieren wir wie im Beweis von Proposition 7.1 durch

$$\tilde{u}_m(x) = h_m^{-2-\alpha} u_m(x_m + h_m x),$$

für $x \in \mathbb{R}^n$ mit $\langle x, e_n\rangle \geq -\frac{|x_m|}{h_m}$, also für $x \in \Omega_m := \overline{\mathbb{R}^n_+} - \frac{|x_m|}{h_m} e_n$. Wir sehen: $h\ddot{o}l_{\Omega_m,\alpha}(\partial_{ij}\tilde{u}_m) = h\ddot{o}l_{\mathbb{R}^n_+,\alpha}(\partial_{ij}u_m)$, woraus

$$h\ddot{o}l_{\Omega_m,\alpha}(D^2\tilde{u}_m) = h\ddot{o}l_{\mathbb{R}^n_+,\alpha}(D^2 u_m) = 1$$

und

$$h\ddot{o}l_{\Omega_m,\alpha}\Delta\tilde{u}_m = h\ddot{o}l_{\mathbb{R}^n_+,\alpha}\Delta u_m < m^{-1}$$

für jedes $m \in \mathbb{N}$ folgen. Somit können wir

$$|\partial^\gamma u_m(\pm e_i) - \partial^\gamma u_m(0)| \geq \frac{1}{2n^3} > 0$$

annehmen und mittels Subtraktion eines geeigneten Polynoms zweiter Ordnung ausserdem $u_m(0) = 0$, $\nabla u_m(0) = 0$ und $D^2 u_m(0) = 0$. Anhand der Voraussetzung (7.29) gilt $\bigcup_{m\in\mathbb{N}} \Omega_m = \mathbb{R}^n$ und daher die Abschätzungen (7.8) auf jedem Ball $B_R(0)$, für hinreichend grosse m, und somit

$$\| u_m \|_{C^{2,\alpha}(B_R(0))} \leq C(n,\alpha,R)$$

für jedes $R > 0$ und hinreichend grosse m. Somit gilt für eine weitere Teilfolge

$$u_m \to u \quad \text{stark in } C^2_{loc}(\mathbb{R}^n)$$

für eine Grenzfunktion $u \in C^{2,\alpha}_{loc}(\mathbb{R}^n)$ mit den Eigenschaften (7.9)-(7.13) für jedes $R > 0$, aus denen insbesondere folgt, dass u auf $\mathbb{R}^n$ harmonisch ist. Anwendung der Cauchy-Abschätzungen (Satz 2.5) führt zur Ungleichung (7.14) und somit zu einem Widerspruch zu $\partial^\gamma u(\pm e_i) \neq \partial^\gamma u(0)$. Im zweiten Fall reskalieren wir durch

$$\tilde{u}_m(x) := h_m^{-2-\alpha} u_m(h_m x).$$

Dadurch bleiben (7.26) - (7.28) unverändert, und wir können o.B.d.A. annehmen, daß

$$|\partial^\gamma u_m\Big(\frac{x_m}{h_m} \pm e_i\Big) - \partial^\gamma u_m\Big(\frac{x_m}{h_m}\Big)| \geq \frac{1}{2n^3} > 0 \tag{7.31}$$

gilt. Setzen wir $\tilde{x}_m := \frac{x_m}{h_m}$, so können wir nach Übergang zu einer weiteren Teilfolge $m \to \infty$ anhand der Voraussetzung in (7.30)

$$\tilde{x}_m \to x_0 \in \overline{\mathbb{R}^n_+} \tag{7.32}$$

annehmen. Beachten wir, dass wegen $u_m = 0$ auf $\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}$ $\nabla u_m(0)$ senkrecht auf $\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}$ steht und $\partial_{ij} u_m(0) = 0$ für $i, j < n$ gilt, so erkennen wir, dass durch Subtraktion der Taylorploynome

$$P_m(x) := \nabla u_m(0)x + \frac{1}{2} x^T D^2 u_m(0) x$$

von u_m (7.26) - (7.28) und (7.31) unverändert bleiben. Somit dürfen wir nicht nur $u_m(0) = 0$, sondern sogar

$$u_m(0) = 0, \nabla u_m(0) = 0, D^2 u_m(0) = 0 \tag{7.33}$$

annehmen. Aus (7.28), (7.33) und dem Mittelwertsatz folgen nun wie im Beweis von Proposition 7.1:

$$\begin{aligned} \| D^2 u_m \|_{L^\infty(B_R(0)^+)} &\leq R^\alpha, \\ \| \nabla u_m \|_{L^\infty(B_R(0)^+)} &\leq C_n R^{1+\alpha}, \\ \| u_m \|_{L^\infty(B_R(0)^+)} &\leq C_n R^{2+\alpha}. \end{aligned} \tag{7.34}$$

Mit (7.28) und (7.34) folgt

$$\| u_m \|_{C^{2,\alpha}(B_R(0)^+)} \leq C(n, \alpha, R).$$

Damit konvergiert für eine weitere Teilfolge

$$u_m \to u \quad \text{stark in } C^2_{loc}\overline{(\mathbb{R}^n_+)}.$$

Aus (7.26) - (7.28), (7.31) - (7.34) folgt $u \in C^{2,\alpha}_{loc}(\overline{\mathbb{R}^n_+})$ und

$$u = 0 \quad \text{auf } \mathbb{R}^{n-1} \times \{0\} \tag{7.35}$$

$$\Delta u \equiv \text{const in } \mathbb{R}^n_+ \tag{7.36}$$

$$h\ddot{o}l_{\alpha,\mathbb{R}^n_+}(D^2 u) \leq 1 \tag{7.37}$$

$$\partial^\gamma u(x_0 \pm e_i) \neq \partial^\gamma u(x_0) \tag{7.38}$$

$$D^2u(0) = 0 \tag{7.39}$$

$$\| u \|_{L^\infty(B_R(0)^+)} \le C_n R^{2+\alpha}. \tag{7.40}$$

Aus (7.36) und (7.39) folgt

$$\Delta u = 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^n_+. \tag{7.41}$$

Aus (7.35) folgt weiter

$$\partial_{ll} u = 0 \quad \text{auf } \mathbb{R}^{n-1} \times \{0\} \quad \text{für } l = 1, .., n-1,$$

also mit (7.41)

$$\partial_{nn} u = -\sum_{l=1}^{n-1} \partial_{ll} u = 0 \quad \text{auf } \mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}.$$

Setzen wir u durch

$$E_- u(y,t) := \begin{cases} u(y,t) & \text{falls } t \ge 0 \,, \\ -u(y,-t) & \text{falls } t < 0 \,, \end{cases}$$

auf den gesamten $\mathbb{R}^n$ „ungerade" fort, so sehen wir mittels (7.35) zuerst: $u \in C^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$. Weiter ist anhand der ungeraden Spiegelung $\partial_{ln} u$ stetig auf ganz $\mathbb{R}^n$, für $l = 1, \ldots, n-1$, und dasselbe gilt für $1 \le l, k \le n-1$ oder $(l,k) = (n,n)$, da $\partial_{lk} u \equiv 0$ auf $\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}$ für diese l, k gilt, wie wir uns soeben überzeugen konnten. Wegen $u \in C^{2,\alpha}_{loc}(\overline{\mathbb{R}^n_+})$ folgt somit $u \in C^{2,\alpha}_{loc}(\mathbb{R}^n)$, und mit (7.41) ausserdem

$$\Delta u = 0 \quad \text{auf } \mathbb{R}^n.$$

Da $\| u \|_{L^\infty(B_R(0))} \le C_n R^{2+\alpha}$ aus (7.40) folgt, erhalten wir nun aus den Cauchy-Abschätzungen wie im Beweis von Proposition 7.1:

$$\| D^k u \|_{L^\infty(B_R(0))} \le C(n,k) R^{-|k|+2+\alpha}$$

für beliebige Multiindizes k . Für $|k| = 3$ und $R \to \infty$ folgt

$$D^3 u = 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^n.$$

Somit ist u ein quadratisches Polynom, insbesondere ist $D^2 u$ konstant, also $D^2 u \equiv 0$ auf $\mathbb{R}^n$ wegen (7.39). Dies widerspricht (7.38), da $|\gamma| = 2$, und die Proposition ist bewiesen.

///

Mittels einer geeigneten orthogonalen Transformation O des $\mathbb{R}^n$ und einer Hilfsfunktion $\tilde{u} := u \circ O^T$ lässt sich die folgende Proposition anhand der bereits bewiesenen Aussage von Proposition 7.4 und mittels der Rechnungen des Beweises von Proposition 7.2 führen.

Proposition 7.5 *Es sei* $1 \le \Lambda < \infty$ *und* $(a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ *mit*

$$a_{ij}\xi_i\xi_j \ge \Lambda^{-1}|\xi|^2 \quad \textit{für } \xi \in \mathbb{R}^n,$$
$$|a_{ij}| \le \Lambda$$

und $u \in C^{2,\alpha}_{loc}(\overline{\mathbb{R}^n_+}), 0 < \alpha < 1$ *, mit*

$$u = 0 \quad \textit{auf } \mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}$$

und

$$h\ddot{o}l_{\alpha,\mathbb{R}^n_+}(D^2u) < \infty.$$

Dann existiert eine Konstante $C(\Lambda, n, \alpha) > 0$*, für die*

$$h\ddot{o}l_{\alpha,\mathbb{R}^n_+}(D^2u) \le C(\Lambda, n, \alpha) h\ddot{o}l_{\alpha,\mathbb{R}^n_+}(a_{ij}\partial_{ij}u)$$

gilt.

□

Wieder beweisen wir zuerst eine schwächere Version von Satz 7.2.

Proposition 7.6 *Unter den Voraussetzungen von Satz 7.2 für* L *auf* $B_2(0)^+$ *gilt für* $u, \varphi \in C^{2,\alpha}(B_2(0)^+)$ *mit*

$$u = \varphi \quad \textit{auf } \{x_n = 0\} \cap B_2(0),$$

daß

$$\begin{aligned} &\| u \|_{C^{2,\alpha}(B_1(0)^+)} \le \\ &\le C(\Lambda, n, \alpha)(\| Lu \|_{C^{0,\alpha}(B_2(0)^+)} + \| \varphi \|_{C^{2,\alpha}(B_2(0)^+)} + \| u \|_{C^2(B_2(0)^+)} . \end{aligned} \tag{7.42}$$

Beweis:
Wie schon bemerkt kann $\varphi = 0$ angenommen werden. Wir wählen $\eta \in C_0^\infty(B_2(0))$ mit $\eta \equiv 1$ auf $B_1(0)$ und $0 < \varrho < 1/2$ klein, wie unten beschrieben. Für $x_0 \in \overline{B_1(0)^+}$ gilt $B_{2\varrho}(x_0) \subseteq B_2(0)$, und wie im Beweis von Proposition 7.3 setzen wir

$$\eta_{x_0,\varrho}(x) := \eta(\frac{x - x_0}{\varrho}),$$

also $\eta_{x_0,\varrho} \in C_0^\infty(B_{2\varrho}(x_0))$. Wir definieren

$$v := u \cdot \eta_{x_0,\varrho} \in C_0^{2,\alpha}(B_{2\varrho}(x_0)^+ \cup (\{x_n = 0\} \cap B_{2\varrho}(x_0))),$$

genauer gilt

$$v \in C^{2,\alpha}(\overline{\mathbb{R}^n_+})$$

und

$$supp\ v \subseteq B_{2\varrho}(x_0)^+ \cup (\{x_n = 0\} \cap B_{2\varrho}(x_0)).$$

Weiter gilt

$$v = 0 \quad \text{auf } \mathbb{R}^{n-1} \times \{0\} \tag{7.43}$$

und

$$v = u \quad \text{auf } B_\varrho(x_0)^+. \tag{7.44}$$

Aus (7.2), (7.3) und (7.43) mit Proposition 7.5

$$h\ddot{o}l_{\alpha,\mathbb{R}^n_+}(D^2v) \le C(\Lambda, n, \alpha) h\ddot{o}l_{\mathbb{R}^n_+,\alpha}(a_{ij}(x_0)\partial_{ij}v).$$

Daraus ergibt sich wie im Beweis von Proposition 7.3

$$\begin{aligned} &h\ddot{o}l_{\alpha,\mathbb{R}^n_+}(D^2v) \le \\ &\le C(\Lambda, n, \alpha)\varrho^\alpha h\ddot{o}l_{\mathbb{R}^n_+,\alpha}(D^2v) + C(\Lambda, n, \alpha)(h\ddot{o}l_{\alpha,\mathbb{R}^n_+}(Lv) + \| v \|_{C^2(\mathbb{R}^n_+)}). \end{aligned}$$

Wählen wir $\varrho = \varrho(\Lambda, n, \alpha)$ klein genug, so erhalten wir

$$h\ddot{o}l_{\alpha,\mathbb{R}^n_+}(D^2 v) \leq C(\Lambda, n, \alpha)(h\ddot{o}l_{\mathbb{R}^n_+,\alpha}(Lv) + \| v \|_{C^2(\mathbb{R}^n_+)}).$$

Wie im Beweis von Proposition 7.3 ergibt sich daraus mit (7.44)

$$h\ddot{o}l_{\alpha,B_\varrho(x_0)^+}(D^2 u) \leq h\ddot{o}l_{\alpha,\mathbb{R}^n_+}(D^2 v) \leq C(\Lambda, n, \alpha)(\| Lu \|_{C^{0,\alpha}(B_2(0)^+)} + \| u \|_{C^2(B_2(0)^+)}).$$

Da $x_0 \in \overline{B_1(0)^+}$ beliebig war und $\varrho = \varrho(\Lambda, n, \alpha)$, erhalten wir

$$h\ddot{o}l_{\alpha,B_1(0)^+}(D^2 u) \leq C(\Lambda, n, \alpha)(\| Lu \|_{C^{0,\alpha}(B_2(0)^+)} + \| u \|_{C^2(B_2(0)^+)})$$

und zusammen mit dem Mittelwertsatz:

$$\begin{aligned} \| u \|_{C^{2,\alpha}(B_1(0)^+)} &\leq h\ddot{o}l_{\alpha,B_1(0)^+}(D^2 u) + C_n \| u \|_{C^2(B_1(0)^+)} \leq \\ &\leq C(\Lambda, n, \alpha)(\| Lu \|_{C^{0,\alpha}(B_2(0)^+)} + \| u \|_{C^2(B_2(0)^+)}), \end{aligned}$$

also die Behauptung.

///

Beweis von Satz 7.2:
Analog zum Beweis von Satz 7.1, setzen wir

$$S := |D^2 u|^{(n/2+2)}_{0,B_2(0)^+ \cup \{x_n=0\}} := \sup_{x \in B_2(0)^+} d(x, \partial B_2(0))^{n/2+2} |D^2 u(x)|.$$

Da $u \in C^{2,\alpha}(B_2(0)^+)$, gilt $S < \infty$. Für $x_0 \in B_2(0)^+$ setzen wir

$$\varrho := \frac{1}{8} d(x_0, \partial B_2(0)), x_0' := x_0 \quad \text{falls } x_{0,n} \geq \frac{1}{4} d(x_0, \partial B_2(0))$$

und

$$\varrho := \frac{1}{4} d(x_0, \partial B_2(0)), x_0' := x_0 - x_{0,n} e_n \quad \text{falls } x_{0,n} < \frac{1}{4} d(x_0, \partial B_2(0)).$$

In beiden Fällen gilt

$$\begin{gathered} x_0 \in B_\varrho(x_0')^+, \\ B_{2\varrho}(x_0') \subseteq B_2(0), \\ d(y, \partial B_2(0)) \geq \varrho \quad \text{für alle } y \in B_{2\varrho}(x_0'), \\ d(x_0, \partial B_2(0)) \leq 8\varrho. \end{gathered} \tag{7.45}$$

Weiter gilt im ersten Fall

$$B_{2\varrho}(x_0') \subseteq \mathbb{R}^n_+ \tag{7.46}$$

und im zweiten Fall

$$x_0' \in \mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}. \tag{7.47}$$

Wir reskalieren

$$\tilde{u}(x) := u(\varrho x),$$

für $x \in B_2(\varrho^{-1}x_0')^+$ und erhalten wie in (7.24)

$$Lu(\varrho x) = \varrho^{-2}\tilde{L}\tilde{u}(x) \quad \text{für } x \in B_2(\varrho^{-1}x_0')^+$$

mit geeignetem $\tilde{L}$. Mit (7.47) bzw. (7.46) sind $B_1(\varrho^{-1}x_0')^+$ und $B_2(\varrho^{-1}x_0')^+$ halbe bzw. ganze Bälle. Propositionen 5.3 und 5.4 liefern somit wie im Beweis von Satz 7.1 zusammen mit dem Ehrling-Lemma 4.1:

$$\| \tilde{u} \|_{C^1(B_r(\varrho^{-1}x_0')^+)} \leq \frac{1}{2} \| \tilde{u} \|_{C^2(B_r(\varrho^{-1}x_0')^+)} + C_n \| \tilde{u} \|_{L^2(B_r(\varrho^{-1}x_0')^+)}$$

für $r = 1, 2$. Zusammen mit

$$\| \tilde{u} \|_{C^2(B_r(\varrho^{-1}x_0')^+)} = \| D^2\tilde{u} \|_{L^\infty(B_r(\varrho^{-1}x_0')^+)} + \| \tilde{u} \|_{C^1(B_r(\varrho^{-1}x_0')^+)}$$

erhalten wir:

$$\| \tilde{u} \|_{C^1(B_r(\varrho^{-1}x_0')^+)} \leq \| D^2\tilde{u} \|_{L^\infty(B_r(\varrho^{-1}x_0')^+)} + 2C_n \| \tilde{u} \|_{L^2(B_r(\varrho^{-1}x_0')^+)}$$

und somit

$$\begin{aligned} \| \tilde{u} \|_{C^2(B_r(\varrho^{-1}x_0')^+)} &= \| D^2\tilde{u} \|_{L^\infty(B_r(\varrho^{-1}x_0')^+)} + \| \tilde{u} \|_{C^1(B_r(\varrho^{-1}x_0')^+)} \\ &\leq C_n \left(\| D^2\tilde{u} \|_{L^\infty(B_r(\varrho^{-1}x_0')^+)} + \| \tilde{u} \|_{L^2(B_r(\varrho^{-1}x_0')^+)}\right) \end{aligned}$$

für $r = 1, 2$ und $C_n < \infty$. Desweiteren liefert Proposition 5.4 mit dem Ehrling-Lemma 4.1 sofort die Interpolationsungleichung

$$\| D^2\tilde{u} \|_{L^\infty(B_1(\varrho^{-1}x_0')^+)} \leq \| \tilde{u} \|_{C^2(B_1(\varrho^{-1}x_0')^+)} \leq \varepsilon \| \tilde{u} \|_{C^{2,\alpha}(B_1(\varrho^{-1}x_0')^+)} + C_{n,\alpha,\varepsilon} \| \tilde{u} \|_{L^2(B_1(\varrho^{-1}x_0')^+)}$$

für beliebiges $0 < \varepsilon < 1$ und $C_{n,\alpha,\varepsilon} < \infty$. Mit (7.17), (7.42), (7.45) und (7.46) ergibt dies, da $\varrho \leq 1$,

$$\begin{aligned} & d(x_0, \partial B_2(0))^{n/2+2}|D^2u(x_0)| \leq \\ & \leq (8\varrho)^{n/2+2} \| D^2u \|_{L^\infty(B_\varrho(x_0')^+)} = 8^{n/2+2}\varrho^{n/2} \| D^2\tilde{u} \|_{L^\infty(B_1(\varrho^{-1}x_0')^+)} \leq \\ & \leq \varepsilon\varrho^{n/2} \| \tilde{u} \|_{C^{2,\alpha}(B_1(\varrho^{-1}x_0')^+)} + C_{n,\alpha,\varepsilon}\varrho^{n/2} \| \tilde{u} \|_{L^2(B_1(\varrho^{-1}x_0')^+)} \leq \\ & \leq C(\Lambda, n, \alpha)\varepsilon\varrho^{n/2}(\| \tilde{L}\tilde{u} \|_{C^{0,\alpha}(B_2(\varrho^{-1}x_0')^+)} + \| \tilde{u} \|_{C^2(B_2(\varrho^{-1}x_0')^+)}) \\ & \quad + C_{n,\alpha,\varepsilon}\varrho^{n/2} \| \tilde{u} \|_{L^2(B_1(\varrho^{-1}x_0')^+)} \leq \\ & \leq C(\Lambda, n, \alpha) \| \tilde{L}\tilde{u} \|_{C^{0,\alpha}(B_2(\varrho^{-1}x_0')^+)} + C_\varepsilon(\Lambda, n, \alpha)\varrho^{n/2} \| \tilde{u} \|_{L^2(B_2(\varrho^{-1}x_0')^+)} \\ & \quad + C(\Lambda, n, \alpha)\varepsilon\varrho^{n/2} \| D^2\tilde{u} \|_{L^\infty(B_2(\varrho^{-1}x_0')^+)} \leq \\ & \leq C_\varepsilon(\Lambda, n, \alpha)\Big(\| Lu \|_{C^{0,\alpha}(B_2(0)^+)} + \| u \|_{L^2(B_2(0)^+)} \Big) + C(\Lambda, n, \alpha)\varepsilon S, \end{aligned}$$

wenn wir wegen der dritten Ungleichung in (7.45) und wegen (7.46) noch die Ungleichung

$$\begin{aligned} \varrho^{n/2} \| D^2\tilde{u} \|_{L^\infty(B_2(\varrho^{-1}x_0')^+)} &= \varrho^{n/2+2} \| D^2u \|_{L^\infty(B_{2\varrho}(x_0')^+)} \\ &\leq \sup_{x \in B_2(0)^+} d(x, \partial B_2(0))^{n/2+2}|D^2u(x)| = S \end{aligned}$$

beachten. Nehmen wir das Supremum auf der linken Seite für $x_0 \in B_2(0)^+$ und wählen wir $\varepsilon = \varepsilon(\Lambda, n, \alpha)$ hinreichend klein, so erhalten wir

$$S \leq C(\Lambda, n, \alpha)\Big(\| Lu \|_{C^{0,\alpha}(B_2(0)^+)} + \| u \|_{L^2(B_2(0)^+)} \Big). \tag{7.48}$$

Durch Reskalieren und Überdecken von $B_1(0)$ durch kleine Bälle erhalten wir aus (7.42) und obiger Interpolationsungleichung:

$$\| u \|_{C^{2,\alpha}(B_1(0)^+)} \leq C(\Lambda, n, \alpha)\Big(\| Lu \|_{C^{0,\alpha}(B_{3/2}(0)^+)} + \| u \|_{C^2(B_{3/2}(0)^+)} \Big) \leq$$

$$\leq C(\Lambda, n, \alpha)\Big(\| Lu \|_{C^{0,\alpha}(B_2(0)^+)} + \| u \|_{L^2(B_2(0)^+)} + \| D^2 u \|_{L^\infty(B_{3/2}(0)^+)} \Big).$$

Da $d(x, \partial B_2(0)) \geq \frac{1}{2}$ für alle $x \in B_{3/2}(0)$ gilt, folgt

$$\| D^2 u \|_{L^\infty(B_{3/2}(0)^+)} \leq 2^{n/2+2} S$$

aus der Definition von S und somit die Behauptung von Satz 7.2 mit (7.48).

///

Mit den Propositionen 7.3 und 7.6, dem Ehrling-Lemma 4.1 und Proposition 5.3 können nun die globalen Schauder-Abschätzungen bewiesen werden.

Satz 7.3 (Globale Schauder-Abschätzungen) *Es sei* $\Omega \subset\subset \mathbb{R}^n$ *offen,* $\partial\Omega \in C^{2,\alpha}, 0 < \alpha < 1$, L *ein linearer, elliptischer Differentialoperator, der (7.1) - (7.3) in* Ω *erfüllt, und* $\varphi \in C^{2,\alpha}(\Omega)$ *. Dann gilt für* $u \in C^{2,\alpha}(\Omega)$ *mit*

$$u = \varphi \quad auf\ \partial\Omega,$$

daß

$$\| u \|_{C^{2,\alpha}(\Omega)} \leq C(\Omega, \Lambda, n, \alpha)(\| Lu \|_{C^{0,\alpha}(\Omega)} + \| \varphi \|_{C^{2,\alpha}(\Omega)} + \| u \|_{L^2(\Omega)}).$$

Beweis:
Wie oben bemerkt, genügt es, $\varphi = 0$ zu betrachten. Wir betrachten $x_0 \in \partial\Omega$ beliebig. Da $\partial\Omega \in C^{2,\alpha}$, gibt es eine Umgebung $U(x_0)$ von x_0 und einen $C^{2,\alpha}-$Diffeomorphismus

$$\Psi : U(x_0) \cong B_2(0)$$

mit

$$\Psi(x_0) = 0,$$

$$\Psi(U(x_0) \cap \Omega) = B_2(0)^+.$$

Wir definieren

$$\tilde{u} = u \circ \Psi^{-1} \in C^{2,\alpha}(B_2(0)^+).$$

Da $u = 0$ auf $\partial\Omega$, gilt

$$\tilde{u} = 0 \quad \text{auf } \{x_n = 0\} \cap B_2(0).$$

Weiter rechnen wir

$$Lu = a_{ij}\partial_{ij}u + b_i\partial_i u + cu =$$

$$= a_{ij}\partial_i\Psi_k\partial_j\Psi_l(\partial_{kl}\tilde{u})\circ\Psi + (a_{ij}\partial_{ij}\Psi_k + b_i\partial_i\Psi_k)\partial_k\tilde{u}\circ\Psi + c\cdot(\tilde{u}\circ\Psi).$$

Setzen wir

$$\tilde{a}_{kl} := (a_{ij}\partial_i\Psi_k\partial_j\Psi_l)\circ\Psi^{-1},$$
$$\tilde{b}_k := (a_{ij}\partial_{ij}\Psi_k + b_i\partial_i\Psi_k)\circ\Psi^{-1},$$
$$\tilde{c} := c\circ\Psi^{-1} \in C^{0,\alpha}(B_2(0)^+),$$

so gilt

$$(Lu)\circ\Psi^{-1} = \tilde{a}_{kl}\partial_{kl}\tilde{u} + \tilde{b}_k\partial_k\tilde{u} + \tilde{c}\tilde{u} =: \tilde{L}\tilde{u}$$

und weiter, da Ψ ein $C^{2,\alpha}$-Diffeomorphismus zwischen $U(x_0)\cap\Omega$ und $B_2(0)^+$ ist und wegen Proposition 5.2:

$$\tilde{a}_{kl}(y)\xi_k\xi_l = \langle\xi,(D\Psi)^T(a_{ij})(D\Psi)\,\xi\rangle(\Psi^{-1}(y)) = \langle(D\Psi)\,\xi,(a_{ij})\,(D\Psi)\,\xi\rangle(\Psi^{-1}(y))$$
$$\geq \Lambda^{-1} \mid (D\Psi)(\Psi^{-1}(y))\,\xi\mid^2 \geq c_0(\Psi,\Lambda,n)|\xi|^2 \quad \text{für alle } y\in B_2(0)^+, \text{ und } \xi\in\mathbb{R}^n,$$
$$\|\ \tilde{a}_{kl},\tilde{b}_k,\tilde{c}\ \|_{C^{0,\alpha}(B_2^+(0))} \leq C(\Psi,\Lambda,n,\alpha).$$

Setzen wir

$$V(x_0) := \Psi^{-1}(B_1(0)),$$

so erhalten wir aus Proposition 7.6, angewandt auf $\tilde{u}$ und $\tilde{L}$:

$$\|\ u\ \|_{C^{2,\alpha}(V(x_0)\cap\Omega)} \leq C(\Psi,n,\alpha)\ \|\ \tilde{u}\ \|_{C^{2,\alpha}(B_1(0)^+)} \leq$$

$$\leq C(\Psi,\Lambda,n,\alpha)(\ \|\ \tilde{L}\tilde{u}\ \|_{C^{0,\alpha}(B_2(0)^+)} + \|\ \tilde{u}\ \|_{C^2(B_2(0)^+)}\ ) \leq$$
$$\leq C(\Psi,\Lambda,n,\alpha)(\ \|\ Lu\ \|_{C^{0,\alpha}(\Omega)} + \|\ u\ \|_{C^2(\Omega)}\ ). \tag{7.49}$$

Nun betrachten wir $x_0\in\Omega$. Dann existiert $\varrho_{x_0} > 0$ mit $B_{2\varrho_{x_0}}(x_0)\subseteq\Omega$ und aus Proposition 7.3 folgt nach Reskalieren für $V(x_0) = B_{\varrho_{x_0}}(x_0)$, daß

$$\|\ u\ \|_{C^{2,\alpha}(V(x_0))} \leq C(\Lambda,\varrho_{x_0},n,\alpha)(\ \|\ Lu\ \|_{C^{0,\alpha}(\Omega)} + \|\ u\ \|_{C^2(\Omega)}\ ). \tag{7.50}$$

Da $\overline{\Omega}$ kompakt ist, existieren endlich viele $x_1,...,x_N\in\overline{\Omega}$ mit

$$\overline{\Omega}\subseteq V(x_1)\cup...\cup V(x_N).$$

Aus (7.49) und (7.50) folgt

$$\|\ u\ \|_{C^{2,\alpha}(\Omega)} \leq C(\Omega,\Lambda,n,\alpha)(\ \|\ Lu\ \|_{C^{0,\alpha}(\Omega)} + \|\ u\ \|_{C^2(\Omega)}\ ).$$

Die Behauptung folgt nun aus der Interpolationsungleichung

$$\|\ u\ \|_{C^2(\Omega)} \leq \epsilon\ \|\ u\ \|_{C^{2,\alpha}(\Omega)} + C_\epsilon(\Omega)\ \|\ u\ \|_{L^2(\Omega)}$$

für $\epsilon > 0$ klein genug, die aus dem Ehrling-Lemma 4.1 und Proposition 5.3 folgt.

///

Satz 7.4 (Existenz von klassischen Lösungen für das Dirichletproblem) *Es sei* $\Omega \subset\subset \mathbb{R}^n$ *offen,* $\partial\Omega \in C^{2,\alpha}, 0 < \alpha < 1,$ L *ein linearer, elliptischer Differentialoperator, der (7.1) - (7.3) auf* Ω *erfüllt,* $c \leq 0, \varphi \in C^{2,\alpha}(\Omega)$ *und* $f \in C^{0,\alpha}(\Omega)$ *. Dann existiert eine eindeutige Lösung* $u \in C^{2,\alpha}(\Omega)$ *des Dirichletproblems*

$$\begin{aligned} Lu &= f \quad \textit{in } \Omega, \\ u &= \varphi \quad \textit{auf } \partial\Omega \end{aligned} \tag{7.51}$$

und diese erfüllt

$$\| u \|_{C^{2,\alpha}(\Omega)} \leq C(\Omega, \Lambda, n, \alpha)(\| f \|_{C^{0,\alpha}(\Omega)} + \| \varphi \|_{C^{2,\alpha}(\Omega)}). \tag{7.52}$$

Beweis:
Wieder genügt es $\varphi = 0$ zu betrachten. Die Eindeutigkeit der Lösung in $C^{2,\alpha}$ folgt aus dem Maximumprinzip Korollar 3.2, da $c \leq 0$. Zuerst beweisen wir die Abschätzung (7.52) für $C^{2,\alpha}-$Lösungen von (7.51). Angenommen (7.52) gilt nicht, dann existieren L_m , die (7.1) - (7.3) erfüllen, und $c_m \leq 0, u_m \in C^{2,\alpha}(\Omega), f_m \in C^{0,\alpha}(\Omega)$ mit $u_m = 0$ auf $\partial\Omega$ und

$$\| f_m \|_{C^{0,\alpha}(\Omega)} < m^{-1} \| u_m \|_{C^{2,\alpha}(\Omega)},$$

für alle $m \in \mathbb{N}$. Andererseits wissen wir aus Satz 7.3, da die Operatoren L_m die Strukturbedingungen (7.1) - (7.3) erfüllen:

$$\| u_m \|_{C^{2,\alpha}(\Omega)} \leq C(\| f_m \|_{C^{0,\alpha}(\Omega)} + \| u_m \|_{C^0(\Omega)}),$$

mit $C = C(\Omega, \Lambda, n, \alpha)$ und für jedes $m \in \mathbb{N}$. Daraus folgt

$$\| u_m \|_{C^{2,\alpha}(\Omega)} < Cm^{-1} \| u_m \|_{C^{2,\alpha}(\Omega)} + C \| u_m \|_{C^0(\Omega)},$$

also für $m \geq 2C$,

$$\| u_m \|_{C^{2,\alpha}(\Omega)} < 2C \| u_m \|_{C^0(\Omega)} .$$

Wir können o.B.d.A.

$$\| u_m \|_{C^0(\Omega)} = 1$$

annehmen. Wenn wir wieder bedenken, dass die Operatoren L_m die Strukturbedingungen (7.1) - (7.3) erfüllen, und dass $\| f_m \|_{C^{0,\alpha}(\Omega)} < 2Cm^{-1} \to 0$ gilt, so folgt aus Proposition 5.3 die Existenz einer Teilfolge $m \to \infty$, für die

$$\begin{aligned} u_m &\to u \quad \text{stark in } C^2(\overline{\Omega}), \\ L_m &\to L \quad \text{stark in } C^0(\overline{\Omega}), \\ f_m &\to 0 \quad \text{stark in } C^{0,\alpha}(\Omega) \end{aligned}$$

gilt. Daraus folgt

$$\begin{aligned} Lu &= 0 \quad \text{in } \Omega, \\ u &= 0 \quad \text{auf } \partial\Omega. \end{aligned}$$

Da mit Proposition 5.3 $0 \geq c_m \to c$ gleichmässig auf Ω und somit $c \leq 0$ auf Ω gilt, folgt mit dem Maximumprinzip, Korollar 3.2: $u = 0$. Da

$$\| u \|_{C^0(\Omega)} \leftarrow \| u_m \|_{C^0(\Omega)} = 1,$$

ist dies ein Widerspruch, und (7.52) ist bewiesen. Zum Beweis der Existenzaussage nehmen wir zunächst

$$L, f \in C^\infty(\overline{\Omega})$$

an, denn wir können mit Proposition 5.6, (iii), $L_m, f_m \in C^\infty(\overline{\Omega})$ wählen, die

$$\begin{gathered} L_m, f_m \to L, f \quad \text{stark in } C^0(\overline{\Omega}), \\ L_m \quad \text{erfüllt (7.1) - (7.3) für } C(\Omega, \Lambda, \alpha) \text{ anstatt } \Lambda \text{ in } \Omega, \\ c_m \leq 0, \\ f_m \quad \text{ist beschränkt in } C^{0,\alpha}(\Omega) \end{gathered} \tag{7.53}$$

erfüllen. Wir nehmen an, bereits gezeigt zu haben, dass es $u_m \in C^{2,\alpha}(\Omega)$ mit

$$\begin{gathered} L_m u_m = f_m \quad \text{in } \Omega, \\ u_m = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega \end{gathered}$$

gibt. Mit (7.52) und (7.53) folgt, daß u_m in $C^{2,\alpha}(\Omega)$ beschränkt ist, und somit für eine Teilfolge $m \to \infty$, daß

$$\begin{gathered} u_m \to u \quad \text{stark in } C^2(\overline{\Omega}), \\ u \in C^{2,\alpha}(\Omega) \end{gathered}$$

und

$$\begin{gathered} Lu = f \quad \text{in } \Omega, \\ u = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega, \end{gathered}$$

also die Behauptung des Theorems. Sei nun $L \in C^\infty(\overline{\Omega})$, so können wir L in Divergenzform

$$\begin{gathered} Lu = a_{ij}\partial_{ij}u + b_i\partial_i u + cu = \\ = \partial_i(a_{ij}\partial_j u) + (b_i - \partial_j(a_{ji}))\partial_i u + cu =: L_d u \end{gathered}$$

mit $C^\infty-$Koeffizienten schreiben. Da $c \leq 0$, erfüllt L die Bedingung (6.8) des Maximumprinzips, Satz 6.1, und nach Satz 6.2 existiert genau eine schwache Lösung $u \in W^{1,2}(\Omega)$ von

$$\begin{gathered} L_d u = f \quad \text{in } \Omega, \\ u = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega. \end{gathered} \tag{7.54}$$

Da $L, f \in C^\infty(\overline{\Omega})$, folgt mit Korollar 6.6, daß

$$u \in C^\infty_{loc}(\Omega)$$

und

$$Lu = f \quad \text{in } \Omega.$$

Ist darüberhinaus $\partial\Omega \in C^\infty$, so folgt mit Korollar 6.6, daß

$$u \in C^\infty(\overline{\Omega})$$

und

$$u = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega,$$

also dass u eine klassische Lösung von (7.51) ist. Nach den Voraussetzungen des Satzes ist $\partial\Omega$ jedoch nur von der Klasse $C^{2,\alpha}$, und wir müssen zeigen, daß $u \in C^{2,\alpha}(\Omega)$ gilt, bzw., da wir $u \in C^\infty_{loc}(\Omega)$ schon wissen, daß für alle $x_0 \in \partial\Omega$ eine Umgebung $V(x_0)$ mit

$$u \in C^{2,\alpha}(V(x_0) \cap \Omega) \tag{7.55}$$

existiert. Da $\partial\Omega \in C^{2,\alpha}$, können wir $\partial\Omega$ mit einem $C^{2,\alpha}-$Diffeomorphismus $\Psi : U(x_0) \cong B_2(0)$ in einer Umgebung $U(x_0)$ glattbiegen, und

$$\tilde{u} := u \circ \Psi^{-1} \in W^{1,2}(B_2(0)^+)$$

erfüllt

$$\tilde{u} = 0 \quad \text{auf } \{x_n = 0\} \cap B_2(0).$$

Setzen wir gemäß (6.34)

$$\begin{aligned}
\tilde{a}_{kl} &:= (a_{ij}\partial_j\Psi_l\partial_i\Psi_k) \circ \Psi^{-1} \cdot |\det D\Psi^{-1}|, \\
\tilde{b}_k &:= ((b_i - \partial_j a_{ji})\partial_i\Psi_k) \circ \Psi^{-1} \cdot |\det D\Psi^{-1}|, \\
\tilde{c} &:= c \circ \Psi^{-1} |\det D\Psi^{-1}|, \\
\tilde{f} &:= f \circ \Psi^{-1} |\det D\Psi^{-1}|,
\end{aligned}$$

so transformiert sich (7.54) zu

$$\tilde{L}_d\tilde{u} := \partial_i(\tilde{a}_{ij}\partial_j\tilde{u}) + \tilde{b}_i\partial_i\tilde{u} + \tilde{c}\tilde{u} = \tilde{f} \quad \text{schwach in } B_2(0)^+. \tag{7.56}$$

Wir sehen, daß

$$\tilde{L}_d, \tilde{f} \in C^{1,\alpha}(B_2(0)^+)$$

und (7.55) folgt, wenn wir

$$\tilde{u} \in C^{2,\alpha}(B_1(0)^+) \tag{7.57}$$

zeigen. Wir wählen wieder mit Proposition 5.6, (iii), $\tilde{L}_{d,m}, \tilde{f}_m \in C^\infty(\overline{B_2(0)^+}), \tilde{c}_m \leq 0$ mit

$$\begin{aligned}
\tilde{L}_{d,m}, \tilde{f}_m \to \tilde{L}_d, \tilde{f} \qquad & \text{stark in } C^1(\overline{B_2(0)^+}), \\
& \text{beschränkt in } C^{1,\alpha}(B_2(0)^+).
\end{aligned} \tag{7.58}$$

Weiter wählen wir

$$B_{4/3}(0)^+ \subseteq \Omega_0 \subseteq B_{5/3}(0)^+$$

mit $\partial\Omega_0 \in C^\infty$ und mit Proposition 5.22 $\tilde{\varphi}_m \in C^\infty(\overline{B_2(0)^+})$, die

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}_m \to \tilde{u} \quad &\text{stark in } W^{1,2}(B_2^+(0)), \\ \tilde{\varphi}_m = 0 \quad &\text{auf } \{x_n = 0\} \cap B_2(0) \end{aligned} \tag{7.59}$$

erfüllen. Wieder folgt aus Satz 6.2 wegen $\tilde{c}_m \leq 0$ die Existenz einer eindeutigen schwachen Lösung $\tilde{u}_m \in W^{1,2}(\Omega_0)$ von

$$\begin{aligned} \tilde{L}_{d,m}\tilde{u}_m = \tilde{f}_m \quad &\text{in } \Omega_0, \\ \tilde{u}_m = \tilde{\varphi}_m \quad &\text{auf } \partial\Omega_0. \end{aligned}$$

Da $\tilde{c}_m \leq 0$ folgt aus (7.58) und Satz 6.2

$$\| \tilde{u}_m \|_{W^{1,2}(\Omega_0)} \leq C(\| \tilde{f}_m \|_{L^2(\Omega_0)} + \| \tilde{\varphi}_m \|_{W^{1,2}(\Omega_0)})$$

mit einer von m unabhängigen Konstanten $C < \infty$. Wegen (7.58) und (7.59) bleibt die rechte Seite für beliebige m beschränkt, und somit konvergiert für eine Teilfolge $\tilde{u}_m \to \overline{u}$ schwach in $W^{1,2}(\Omega_0)$. Es folgt zusammen mit Proposition 5.21, bzw. mit der schwachen Abgeschlossenheit von $W_0^{1,2}(\Omega_0)$, daß $\bar{u}$ eine schwache Lösung von

$$\begin{aligned} \tilde{L}_d\bar{u} = \tilde{f} \quad &\text{in } \Omega_0, \\ \bar{u} = \tilde{u} \quad &\text{auf } \partial\Omega_0 \end{aligned}$$

ist, und, da $\tilde{L}_d(\bar{u} - \tilde{u}) = 0$ schwach in Ω_0 und $\tilde{c} \leq 0$ gilt, folgt mit dem Maximumprinzip Satz 6.1, angewandt auf die Differenz $\bar{u} - \tilde{u}$, dass $\bar{u} = \tilde{u}$ auf Ω_0 gilt, also

$$\tilde{u}_m \to \tilde{u} \quad \text{schwach in } W^{1,2}(\Omega_0). \tag{7.60}$$

Da $\tilde{L}_{d,m}, \tilde{f}_m, \tilde{\varphi}_m \in C^\infty(\overline{\Omega_0}), \partial\Omega_0 \in C^\infty$, folgt mit Korollar 6.6

$$\tilde{u}_m \in C^\infty(\overline{\Omega_0})$$

und somit

$$\tilde{L}_m\tilde{u}_m = \tilde{f}_m \quad \text{klassisch in } \Omega_0,$$

wobei $\tilde{L}_m$ den ausdifferenzierten Nicht-Divergenzform Operator zu $\tilde{L}_{d,m}$ bezeichne. Mit (7.58) sind die Koeffizienten von $\tilde{L}_m$ in $C^{0,\alpha}(B_2(0)^+)$ beschränkt. Dann folgt mit Satz 7.2, daß

$$\| \tilde{u}_m \|_{C^{2,\alpha}(B_1(0)^+)} \leq C(\| \tilde{f}_m \|_{C^{0,\alpha}(B_{4/3}(0)^+)} + \| \tilde{u}_m \|_{L^2(B_{4/3}(0)^+)})$$

mit einer von m unabhängigen Konstanten $C < \infty$, da $\tilde{u}_m = \tilde{\varphi}_m = 0$ auf $\{x_n = 0\} \cap B_{4/3}^+(0)$ mit (7.59). Mit (7.58) und (7.60) bleibt die rechte Seite beschränkt für $m \to \infty$. Damit folgt (7.57) aus (7.60), und der Satz ist bewiesen.

///

Schließlich zeigen wir, daß C^2-Lösungen so regulär sind, wie die Daten.

Satz 7.5 *Es sei* $\Omega \subset\subset \mathbb{R}^n$ *offen und* L *ein linearer, elliptischer Differentialoperator, der (7.1), (7.2) auf* Ω *erfüllt,* $k \geq 0, 0 < \alpha < 1$ *und*

$$\| a_{ij}, b_i, c \|_{C^{k,\alpha}(\Omega)} \leq \Lambda \tag{7.61}$$

und $f \in C^{k,\alpha}(\Omega)$ *.*

Für $u \in C^2_{loc}(\Omega)$ *mit*

$$Lu = f \quad in\ \Omega \tag{7.62}$$

gilt dann $u \in C^{k+2,\alpha}_{loc}(\Omega)$ *und für* $\Omega' \subset\subset \Omega$

$$\| u \|_{C^{k+2,\alpha}(\Omega')} \leq C(\Omega, \Omega', \Lambda, n, \alpha, k)(\| f \|_{C^{k,\alpha}(\Omega)} + \| u \|_{C^0(\Omega)}). \tag{7.63}$$

Ist weiter $u \in C^0(\overline{\Omega}), \partial\Omega \in C^{k+2,\alpha}$ *und*

$$u = \varphi \quad auf\ \partial\Omega$$

mit $\varphi \in C^{k+2,\alpha}(\Omega)$ *, so gilt* $u \in C^{k+2,\alpha}(\Omega)$ *und*

$$\begin{aligned} &\| u \|_{C^{k+2,\alpha}(\Omega)} \leq \\ &\leq C(\Omega, \Lambda, n, \alpha, k)(\| f \|_{C^{k,\alpha}(\Omega)} + \| \varphi \|_{C^{k+2,\alpha}(\Omega)} + \| u \|_{C^0(\Omega)}). \end{aligned} \tag{7.64}$$

Beweis:
Wir betrachten konzentrische Bälle

$$B' \subset\subset B \subset\subset \Omega$$

und wählen $\varphi_m \in C^\infty(\overline{B})$ mit

$$\varphi_m \to u \quad \text{stark in } C^2(\overline{B}).$$

Mit Satz 7.4 existiert $u_m \in C^{2,\alpha}(B)$ mit

$$L_0 u_m = a_{ij}\partial_{ij} u_m + b_i \partial_i u_m = f - cu =: \tilde{f} \in C^{0,\alpha}(B),$$
$$u_m = \varphi_m \quad \text{auf } \partial B.$$

Da $L_0(u_m - u) = 0$ in B gilt, folgt aus der vereinfachten Form des Operators L_0 und dem Maximumprinzip, Korollar 3.2,

$$\| u_m - u \|_{L^\infty(B)} \leq \| u_m - u \|_{L^\infty(\partial B)} \leq \| \varphi_m - u \|_{L^\infty(B)} \to 0,$$

also

$$u_m \to u \quad \text{stark in } C^0(\overline{B}). \tag{7.65}$$

Mit Satz 7.1 folgt

$$\| u_m \|_{C^{2,\alpha}(B')} \leq C(\Lambda, B, B', n, \alpha, k)(\| \tilde{f} \|_{C^{0,\alpha}(B)} + \| u_m \|_{C^0(B)}).$$

Mit (7.65) ist die rechte Seite beschränkt für $m \to \infty$, und es folgt $u \in C^{2,\alpha}(B')$, also

$$u \in C^{2,\alpha}_{loc}(\Omega),$$

und (7.63) für $k = 0$ aus Satz 7.1.
Nun sei $k \geq 1$ und (7.63) für $0, \dots, k-1$ bewiesen. Dann folgt $u \in C^{k+1,\alpha}_{loc}(\Omega)$. Wir wählen $\Omega' \subset\subset \Omega'' \subset\subset \Omega''' \subset\subset \Omega$. Für die endliche Differenz $\partial_l^h u$, siehe (5.11), $l = 1, \dots, n, 0 < |h| < d(\Omega'', \partial\Omega''')$, und $\bar{u}(x) := u(x + he_l)$ gilt

$$L(\partial_l^h u) = \partial_l^h f - (\partial_l^h a_{ij})\partial_{ij}\bar{u} - (\partial_l^h b_i)\partial_i \bar{u} - (\partial_l^h c)\bar{u} =: f_l^h \quad \text{in } \Omega''. \tag{7.66}$$

Für $v \in C^{1,\alpha}(\Omega)$ und $x \in \Omega''$ gilt

$$\partial_l^h v(x) = \frac{1}{h}\int_0^1 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}} v(x + the_l)\ \mathrm{dt} = \int_0^1 \partial_l v(x + the_l)\ \mathrm{dt},$$

und damit

$$\| \partial_l^h v \|_{C^{k-1,\alpha}(\Omega'')} \leq \| \partial_l v \|_{C^{k-1,\alpha}(\Omega''')} .$$

Daraus folgt mit (7.61)

$$\| f_l^h \|_{C^{k-1,\alpha}(\Omega'')} \leq \| f \|_{C^{k,\alpha}(\Omega''')} + C_{n,k}\Lambda \| u \|_{C^{k+1,\alpha}(\Omega''')} .$$

Aus (7.63) für $k-1$ und (7.66) folgt

$$\begin{aligned} \| \partial_l^h u \|_{C^{k+1,\alpha}(\Omega')} &\leq C(\Omega'', \Omega', \Lambda, n, \alpha, k)(\| f_l^h \|_{C^{k-1,\alpha}(\Omega'')} + \| \partial_l^h u \|_{C^0(\Omega'')}) \\ &\leq C(\Omega''', \Omega'', \Omega', \Lambda, n, \alpha, k)(\| f \|_{C^{k,\alpha}(\Omega''')} + \| u \|_{C^{k+1,\alpha}(\Omega''')}) \leq \\ &\leq C(\Omega''', \Omega'', \Omega', \Lambda, n, \alpha, k)(\| f \|_{C^{k,\alpha}(\Omega)} + \| u \|_{C^0(\Omega)}). \end{aligned}$$

Für $h \to 0$ konvergiert $\partial_l^h u \to \partial_l u$ in $C^0(\Omega')$. Dann folgt mit obiger Abschätzung $\partial_l u \in C^{k+1,\alpha}_{loc}(\Omega)$, also $u \in C^{k+2,\alpha}_{loc}(\Omega)$, und (7.63) für k .
Für den Fall mit Rand kann $\varphi = 0$ angenommen werden. Nach Glattbiegen des Randes können wir lokal

$$\Omega \cap B_2(0) = B_2(0)^+$$

betrachten. Wir reskalieren $x \mapsto \varrho x$, für $\rho \in (0,1)$, und die Funktion $\tilde{u}(x) := u(\rho x)$ erfüllt die partielle Differentialgleichung $\tilde{L}(\tilde{u}) = \tilde{f}$ auf $B_2(0)^+$ mit

$$\begin{aligned} \tilde{a}_{ij}(x) &:= a_{ij}(\varrho x), \tilde{b}_i(x) := \varrho b_i(\varrho x), \\ \tilde{c}(x) &:= \varrho^2 c(\varrho x), \tilde{f}(x) := \varrho^2 f(\varrho x). \end{aligned}$$

Daher können wir annehmen, daß L die Voraussetzungen (7.1), (7.2) mit Λ ersetzt durch geeignetes Λ_0 erfüllt und weiter

$$\| c \|_{L^\infty(B_2(0)^+)} \leq \varepsilon,$$

für $\varepsilon > 0$ genügend klein unten gewählt. Weiter sei

$$B_{4/3}(0)^+ \subseteq \Omega_0 \subseteq B_{5/3}(0)^+$$

mit $\partial\Omega_0 \in C^\infty$. Wie im Beweis von Proposition 5.22, nun wegen $u \in C^0(\overline{B_2^+(0)})$ in Kombination mit Proposition 5.6 (ii), können wir Funktionen $\varphi_m \in C^{2,\alpha}(B_2(0)^+)$ konstruieren, die

$$\varphi_m \to u \quad \text{stark in } C^0(\overline{B_2^+(0)}),$$
$$\varphi_m = 0 \quad \text{auf } \{x_n = 0\} \cap B_2(0)$$

erfüllen. Wir suchen $u_m \in C^{2,\alpha}(\Omega_0)$ mit

$$\begin{aligned} L(u_m) &= f \quad \text{in } \Omega_0, \\ u_m &= \varphi_m \quad \text{auf } \partial\Omega_0. \end{aligned} \tag{7.67}$$

Wir betrachten die stetigen linearen Abbildungen $L, L_0 : C^{2,\alpha,0}(\Omega_0) := \{v \in C^{2,\alpha}(\Omega_0) \mid v = 0 \text{ auf } \partial\Omega_0 \} \to C^{0,\alpha}(\Omega_0)$. Mit Satz 7.4 ist L_0 ein Isomorphismus, und $L - L_0$ ist kompakt. Wählen wir $\varepsilon > 0$ so klein, daß $c_0 := 1 - C(\Omega_0, \Lambda_0)\varepsilon > 0$ in Korollar 3.7 gilt, so folgt mit Korollar 3.7, daß L injektiv ist. Zusammen mit Lemma 4.2 folgt, daß L ein Isomorphismus ist. Somit existiert genau ein $\tilde{u}_m \in C^{2,\alpha,0}(\Omega_0)$, welches $L(\tilde{u}_m) = f - L(\varphi_m)$ auf Ω_0 [und $\tilde{u}_m = 0$ auf $\partial\Omega_0$] erfüllt. Die Funktionen $u_m := \tilde{u}_m + \varphi_m$ lösen also (7.67), wie erwünscht. Wegen $u \in C^0(\overline{B_2^+(0)}) \cap C^2_{loc}(B_2^+(0))$ und $c_0 := 1 - C(\Omega_0, \Lambda_0)\varepsilon > 0$ dürfen wir das Maximumprinzip, Korollar 3.7, anwenden und erhalten zusammen mit $L(u_m - u) = 0$ auf Ω_0:

$$\| u_m - u \|_{C^0(\overline{\Omega_0})} \le c_0^{-1} \| u_m - u \|_{C^0(\partial\Omega_0)} \le c_0^{-1} \| \varphi_m - u \|_{C^0(\overline{B_2(0)^+})} \to 0,$$

also

$$u_m \to u \quad \text{stark in } C^0(\overline{\Omega_0}). \tag{7.68}$$

Wegen (7.67) und $u_m = \varphi_m = 0$ auf $\{x_n = 0\} \cap B_{4/3}(0)$ folgt ausserdem aus Satz 7.2:

$$\| u_m \|_{C^{2,\alpha}(B_1(0)^+)} \le C(\Lambda, n, \alpha)(\| f \|_{C^{0,\alpha}(B_{4/3}(0)^+)} + \| u_m \|_{C^0(B_{4/3}(0)^+)}).$$

Mit (7.68) ist die rechte Seite beschränkt für $m \to \infty$, und es folgt $u \in C^{2,\alpha}(B_1(0)^+)$. Überdeckt man $\partial\Omega$ mit endlich vielen Bällen, so folgt

$$u \in C^{2,\alpha}(\Omega),$$

und (7.64) folgt für $k = 0$ aus Satz 7.3.
Nun sei $k \ge 1$ und (7.64) für $0, \ldots, k-1$ mit Randwerten $\varphi = 0$ bewiesen. Daher gilt $u \in C^{k+2,\alpha}_{loc}(\Omega)$ und $u \in C^{k+1,\alpha}(\Omega)$ mit

$$\| u \|_{C^{k+1,\alpha}(\Omega)} \le C(\Omega, \Lambda, n, \alpha, k)(\| f \|_{C^{k-1,\alpha}(\Omega)} + \| u \|_{C^0(\Omega)}). \tag{7.69}$$

Weiter nehmen wir nach Glattbiegen des Randes

$$\Omega \cap B_2(0) = B_2(0)^+$$

an und wissen nach Induktionsannahme:

$$\partial_l u \in C^{k+1,\alpha}_{loc}(B_2(0)^+) \cap C^{k,\alpha}(B_2(0)^+),$$

und, da $u = 0$ auf $\{x_n = 0\} \cap B_2(0)$,

$$\partial_l u = 0 \quad \text{auf } \{x_n = 0\} \cap B_2(0) \quad \text{für } l = 1, \ldots, n-1.$$

Wir wählen $\eta \in C_0^\infty(B_{4/3}(0)), \eta \equiv 1$ auf $B_1(0)$ und setzen

$$v := \eta \partial_l u \in C^{k+1,\alpha}_{loc}(\Omega_0) \cap C^{k,\alpha}(\Omega_0)$$

für ein festes $l \in \{1, \ldots, n-1\}$ und

$$v = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega_0.$$

Es gilt

$$\begin{aligned} a_{ij}\partial_{ij} v &= a_{ij}\partial_{ij}(\eta\partial_l u) = \\ &= \eta a_{ij}\partial_{ijl} u + a_{ij}(\partial_i\eta\partial_{jl}u + \partial_j\eta\partial_{il}u) + a_{ij}\partial_l u \partial_{ij}\eta = \\ &=: \eta a_{ij}\partial_{ijl}u + R_l \end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned} &\| R_l \|_{C^{k-1,\alpha}(B_2(0)^+)} \leq \\ &\leq C(\Lambda, n, \alpha, k) \| u \|_{C^{k+1,\alpha}(B_2(0)^+)} \leq C(\Omega, \Lambda, n, \alpha, k)(\| f \|_{C^{k-1,\alpha}(\Omega)} + \| u \|_{C^0(\Omega)}), \end{aligned}$$

wobei wir (7.69) verwendet haben. Mit (7.62) folgt

$$\begin{aligned} a_{ij}\partial_{ijl}u &= \partial_l(a_{ij}\partial_{ij}u) - (\partial_l a_{ij})\partial_{ij}u = \\ &= \partial_l(f - b_i\partial_i u - cu) - (\partial_l a_{ij})\partial_{ij}u =: \hat{f} \quad \text{in } B_2(0)^+, \end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned} \| \hat{f} \|_{C^{k-1,\alpha}(B_2(0)^+)} &\leq C(\Lambda, n, \alpha, k)(\| f \|_{C^{k,\alpha}(B_2(0)^+)} + \| u \|_{C^{k+1,\alpha}(B_2(0)^+)}) \leq \\ &\leq C(\Omega, \Lambda, n, \alpha, k)(\| f \|_{C^{k,\alpha}(\Omega)} + \| u \|_{C^0(\Omega)}), \end{aligned}$$

wobei wieder wir (7.69) verwendet haben. Wenden wir (7.64) für $k-1$ auf die obige Gleichung $a_{ij}\partial_{ij}v = \eta a_{ij}\partial_{ijl}u + R_l$ für v in Ω_0 an und beachten wir $v = 0$ auf $\partial\Omega_0$, so erhalten wir

$$\begin{aligned} &\| \partial_l u \|_{C^{k+1,\alpha}(B_1(0)^+)} \leq \| v \|_{C^{k+1,\alpha}(\Omega_0)} \leq \\ &\leq C(\Omega, \Lambda, n, \alpha, k)(\| a_{ij}\partial_{ij}v \|_{C^{k-1,\alpha}(\Omega_0)} + \| v \|_{C^0(\Omega_0)}) \leq \\ &\leq C(\Omega, \Lambda, n, \alpha, k)(\| f \|_{C^{k,\alpha}(\Omega)} + \| u \|_{C^0(\Omega)}). \end{aligned}$$

Da $l \in \{1, \ldots, n-1\}$ und $u \in C^{k+2,\alpha}_{loc}(\Omega)$ ist, folgt hieraus:

$$\| \partial_{ij} u \|_{C^{k,\alpha}(B_1(0)^+)} \leq C(\Omega, \Lambda, n, \alpha, k)(\| f \|_{C^{k,\alpha}(\Omega)} + \| u \|_{C^0(\Omega)}) \quad \text{für } (i,j) \neq (n,n). \tag{7.70}$$

Aus (7.62) folgt:

$$\partial_{nn} u = a_{nn}^{-1}\Big(- \sum_{(i,j)\neq(n,n)} a_{ij}\partial_{ij}u - \sum_{i=1}^{n} b_i \partial_i u - cu + f\Big) \quad \text{in } B_2(0)^+,$$

also zusammen mit (7.61), (7.3), (7.69) und (7.70)

$$\| \partial_{nn} u \|_{C^{k,\alpha}(B_1(0)^+)} \leq C(\Omega, \Lambda, n, \alpha, k)(\| f \|_{C^{k,\alpha}(\Omega)} + \| u \|_{C^0(\Omega)}).$$

Zusammen mit (7.69) und (7.70) folgt:

$$\| u \|_{C^{k+2,\alpha}(B_1(0)^+)} \leq C(\Omega, \Lambda, n, \alpha, k)(\| f \|_{C^{k,\alpha}(\Omega)} + \| u \|_{C^0(\Omega)}). \tag{7.71}$$

Überdeckt man $\partial\Omega$ mit endlich vielen Bällen, so folgt $u \in C^{k+2,\alpha}(\Omega)$, und (7.64) folgt auch für k aus (7.63) und (7.71).

///

8 Calderon-Zygmund-Abschätzungen

Wir betrachten einen lineraren, elliptischen Diffentialoperator in Nicht-Divergenzform auf $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, d.h.

$$Lu := a_{ij}\partial_{ij}u + b_i\partial_i u + cu \tag{8.1}$$

für $u \in W^{2,1}(\Omega)$ mit meßbaren Koeffizienten

$$a_{ij}, b_i, c : \Omega \to \mathbb{R}$$

und

$$(a_{ij}(x))_{i,j} \quad \text{symmetrisch und positiv definit für } \mathcal{L}^n\text{-fast alle } x \in \Omega. \tag{8.2}$$

Wir setzen

$$\begin{aligned} \mathcal{D} &:= \det a_{ij} > 0, \\ \mathcal{D}^* &:= \mathcal{D}^{1/n}. \end{aligned} \tag{8.3}$$

Für meßbares f heißt $u \in W^{2,1}(\Omega)$ eine starke Lösung von

$$Lu \geq (\leq) f \quad \text{in } \Omega, \tag{8.4}$$

falls diese Ungleichung nach Einsetzen der schwachen Ableitungen fast überall in Ω erfüllt ist.

Definition 8.1 *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Teilmenge und v eine auf Ω stetige Funktion. Wir definieren zu jeder offenen Teilmenge $\Omega' \subset \Omega$ die ,,obere Kontaktmenge" von v bezüglich Ω' durch:*

$$\Gamma_v^+(\Omega') := \{x \in \Omega' \mid \exists b \in \mathbb{R}^n : \forall y \in \Omega' : v(y) \leq v(x) + b(y-x)\ \}.$$

Wir beginnen mit einem weiteren Maximumprinzip.

Satz 8.1 (Alexandroff'sches Maximumprinzip) *L sei ein linearer, elliptischer Differentialoperator in Nicht-Divergenzform, der (8.1) - (8.3) in $\Omega \subset\subset \mathbb{R}^n$ offen erfüllt. Weiter sei*

$$\| b/\mathcal{D}^* \|_{L^n(\Omega)} \leq \Lambda, \quad c \leq 0, \tag{8.5}$$

$f/\mathcal{D}^* \in L^n(\Omega)$ und $u \in W^{2,n}_{loc}(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ mit

$$Lu \geq f \quad \textit{fast überall in } \Omega.$$

Dann gilt

$$\sup_\Omega u \leq \sup_{\partial\Omega} u_+ + C(\Lambda, n)\ diam\ \Omega \,\| f_-/\mathcal{D}^* \|_{L^n(\Gamma_u^+ \cap [u>0])}, \tag{8.6}$$

wobei $\Gamma_u^+ := \Gamma_u^+(\Omega)$ die obere Kontaktmenge von u bezüglich Ω bezeichne.

□

Zuerst geben wir eine nützliche Stetigkeitseigenschaft der Kontaktmenge an.

Proposition 8.1 *Es sei* $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n, \Omega_m \subseteq \Omega_{m+1}$ *offen mit* $\Omega = \cup_{m=1}^{\infty}\Omega_m$ *, und* $u : \Omega \to \mathbb{R}, u_m : \Omega_m \to \mathbb{R}$ *stetig, mit* $u_m \to u$ *punktweise auf* Ω *. Dann gilt*

$$\limsup_{m\to\infty} \chi_{\Gamma^+_{u_m}(\Omega_m)} \leq \chi_{\Gamma^+_u(\Omega)}. \tag{8.7}$$

Beweis:
Wir betrachten $x \in \Gamma^+_{u_m}(\Omega_m)$ für eine Teilfolge $m \to \infty$ und sehen für ein $b_m \in \mathbb{R}^n$

$$u_m(y) \leq u_m(x) + b_m(y-x) \quad \text{für alle } y \in \Omega_m.$$

Wir betrachten $B_{2\varrho_x}(x) \subset\subset \Omega$ und sehen $B_{2\varrho_x}(x) \subseteq \Omega_m$ für m groß genug. Angenommen $|b_m| \to \infty$ für eine Teilfolge, so konvergiert für eine weitere Teilfolge $b_m/|b_m| \to \nu \in \partial B_1(0)$, insbesondere $(b_m/|b_m|)\nu \to |\nu|^2 = 1$, und $b_m\nu \to \infty$. Für $\varrho \in [0, \varrho_x)$ setzen wir $y := x - \varrho\nu \in B_{\varrho_x}(x)$ und haben $y \in \Omega_m$ für hinreichend grosse m und somit

$$-\infty < u(y) \leftarrow u_m(y) \leq u_m(x) + b_m(y-x) = u_m(x) - \varrho\, b_m\nu \to -\infty,$$

also einen Widerspruch. Daher konvergiert für eine Teilfolge $b_m \to b \in \mathbb{R}^n$. Damit gilt wegen $\Omega = \cup_{m=1}^{\infty}\Omega_m$ und $\Omega_m \subseteq \Omega_{m+1}$:

$$u(y) \leq u(x) + b(y-x) \quad \text{für alle } y \in \Omega,$$

also $x \in \Gamma^+_u(\Omega)$, und (8.7) folgt.

///

Zum Beweis des Alexandroff'schen Maximumprinzips führen wir ausserdem den Begriff der ,,normalen Abbildung"

$$\chi_u(x) := \{b \in \mathbb{R}^n \mid u(y) \leq u(x) + \langle b, y-x\rangle \quad \forall y \in \Omega\} \tag{8.8}$$

einer beliebigen, auf Ω stetigen Funktion u ein. $\chi_u(x)$ ist also diejenige Teilmenge von Vektoren b des $\mathbb{R}^n$, sodass diejenige Hyperebene H_b des $\mathbb{R}^{n+1}$, auf der der Vektor $(b, -1)$ senkrecht steht, nach Translation in den Punkt $(x, u(x))$ eine Stützebene des Graphen von u ist, also sodass H_b den Graphen von u im Punkt $(x, u(x))$ berührt und ausserdem der Graph von u unterhalb von H_b liegt. Wir sehen sofort, dass genau dann $\chi_u(x) \neq \emptyset$ gilt, falls $x \in \Gamma^+_u(\Omega)$ ist. Ausserdem beachte man, dass für $x \in \Gamma^+_u(\Omega)$ exakt

$$\chi_u(x) = \{\nabla u(x)\}$$

gilt, falls u im Punkt x klassisch differenzierbar ist, also falls der Graph von u im Punkt $(x, u(x))$ eine eindeutige Tangentialebene besitzt. Zur Vorbereitung des Beweises der folgenden Proposition betrachten wir als Beispiel die Funktion

$$u(y) := a\Big(1 - \frac{|\, y - z\,|}{R}\Big),$$

für $a, R > 0$ und ein $z \in \mathbb{R}^n$, deren Graph der über der Basis $B_R(z)$ errichtete Kegel mit Höhe a und Spitze (z, a) ist. Man überzeugt sich leicht davon, dass die ,,normale Abbildung" dieser Funktion explizit durch

$$\chi_u(x) = \begin{cases} \overline{-\frac{a}{R}\frac{x-z}{|x-z|}} & \text{falls } x \neq z, \\ \overline{B_{a/R}(0)} & \text{falls } x = z\ , \end{cases} \tag{8.9}$$

gegeben ist. Eine erste Variante des Alexandroff'schen Maximum-Prinzips lautet:

Proposition 8.2 *Es gelten (8.2), (8.3), und $\Omega \subset\subset \mathbb{R}^n$ sei eine beschränkte offene Menge. Dann erfüllt jedes $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ das folgende Maximum-Prinzip:*

$$\sup_{\Omega} u \leq \sup_{\partial\Omega} u_+ + \frac{diam\ \Omega}{n\omega_n^{1/n}} \left\| \frac{a_{ij}\partial_{ij}u}{\mathcal{D}^*} \right\|_{L^n(\Gamma_u^+ \cap [u>0])}. \tag{8.10}$$

Beweis:
Da wir u durch $\tilde{u} := u - \sup\limits_{\partial\Omega} u_+$ ersetzen können, reicht es aus, die behauptete Formel (8.10) für Funktionen $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ mit $u \leq 0$ auf $\partial\Omega$, also mit $\sup\limits_{\partial\Omega} u_+ = 0$ zu beweisen. Da Γ_u^+ abgeschlossen in Ω ist, folgt insbesondere, dass Γ_u^+ eine Borel-Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ ist. Desweiteren gilt $\chi_u = \nabla u$ auf Γ_u^+, $\chi_u(x) = \emptyset$ genau für $x \in \Omega \setminus \Gamma_u^+(\Omega)$, und es ist ∇u aus $C^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$. Somit ergibt die Flächenformel (8.17) (hier mit $m = n$) für jede Borel-Teilmenge A von Ω:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^n(\chi_u(A)) = \mathcal{L}^n(\chi_u(\Gamma_u^+ \cap A)) = \mathcal{L}^n((\nabla u)(\Gamma_u^+ \cap A)) \\ \leq \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{H}^0((\nabla u)^{-1}(z) \cap (\Gamma_u^+ \cap A))\, d\mathcal{L}^n(z) = \int_{\Gamma_u^+ \cap A} |\det(D^2u)|\, d\mathcal{L}^n. \end{aligned} \tag{8.11}$$

Nun nehmen wir an, dass u ein positives Maximum in einem Punkt $x \in \Omega$ annimmt. Wir definieren k als diejenige Funktion, deren Graph der Kegel K mit Spitze $(x, u(x))$ und Basis Ω ist. Wegen $u \leq 0$ auf $\partial\Omega$ und da $\nabla u(x) = 0$ im Maximierer x von u gilt, folgt zu jeder Stützebene H an K die Existenz eines Punktes $z \in [u > 0]$, sodass die Tangentialebene an den Graphen von u im Punkt $(z, u(z))$ parallel zu H ist. Dies impliziert insbesondere: $\chi_k(\Omega) \subset \chi_u([u > 0])$. Ist nun $\tilde{k} : B_d(x) \to \mathbb{R}$ diejenige Funktion, deren Graph der Kegel $\tilde{K}$ mit gleicher Spitze $(x, u(x))$, jedoch mit der grösseren Basis $B_d(x)$, $d := diam\ \Omega$, ist, so erhalten wir zuerst mit (8.9) für $a := u(x)$ und $R := d$:

$$\overline{B_{\frac{u(x)}{d}}(0)} = \chi_{\tilde{k}}(B_d(x)) \subset \chi_k(\Omega) \subset \chi_u([u > 0]) \tag{8.12}$$

und demnach zusammen mit (8.11) für die Borel-Menge $A := [u > 0]$:

$$\omega_n \left(\frac{u(x)}{d}\right)^n = \mathcal{L}^n(\chi_{\tilde{k}}(B_d(x))) \leq \mathcal{L}^n(\chi_u([u > 0])) \leq \int_{\Gamma_u^+ \cap [u>0]} |\det(D^2u)|\, d\mathcal{L}^n. \tag{8.13}$$

Hieraus folgt zunächst

$$\sup_{\Omega} u = u(x) \leq \frac{diam\ \Omega}{\omega_n^{1/n}} \Big(\int_{\Gamma_u^+ \cap [u>0]} |\det(D^2u)|\, d\mathcal{L}^n \Big)^{1/n} \tag{8.14}$$

unter der Voraussetzung „$u \leq 0$ auf $\partial\Omega$" an u. Schliesslich gilt für symmetrische Matrizen $A, B \geq 0$ und die positive Wurzel S von B, d.h.

$$B = S^2, \quad S \geq 0 \quad \text{symmetrisch},$$

mit der Ungleichung zwischen geometrischen und arithmetischen Mittelwerten

$$\det A \cdot \det B = \det S^T AS \leq \Big(\frac{tr(S^T AS)}{n}\Big)^n = \Big(\frac{tr(AB)}{n}\Big)^n.$$

Da D^2u negativ-semidefinit auf Γ_u^+ ist, folgt hieraus in Anwendung auf $A := -D^2u$ und $B := (a_{ij})$:

$$|\det D^2u| \leq \mathcal{D}^{-1}\Big(\frac{-a_{ij}\partial_{ij}u}{n}\Big)^n, \tag{8.15}$$

und die Proposition ergibt sich aus Formel (8.14).

///

Zur Erleichterung des Verständnisses geben wir hier die allgemeine Flächenformel an:

Proposition 8.3 *Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $n \leq m$, lokal-Lipschitz-stetig. Dann gilt für jede $\mathcal{L}^n$-messbare, nicht-negative Funktion $\tilde{g} : \mathbb{R}^n \to [0, \infty)$:*

$$\begin{aligned} & y \mapsto \int_{f^{-1}(y)} \tilde{g}\, d\mathcal{H}^0 \qquad \textit{ist } \mathcal{H}^n - \textit{messbar auf } \mathbb{R}^m \\ \textit{und} \quad & \int_{\mathbb{R}^n} \tilde{g}\, J(f)\, d\mathcal{L}^n = \int_{\mathbb{R}^m} \Big(\int_{f^{-1}(y)} \tilde{g}\, d\mathcal{H}^0 \Big)\, d\mathcal{H}^n(y). \end{aligned} \tag{8.16}$$

Hierbei bezeichnet $J(f)(x) := \sqrt{\det(Df^T \cdot Df)}(x)$ die Gramsche Determinante von f in $x \in \mathbb{R}^n$. Insbesondere für die charakteristische Funktion $\tilde{g} := \chi_A$ einer $\mathcal{L}^n-$messbaren Teilmenge A des $\mathbb{R}^n$ ergibt dies wegen $\int_{f^{-1}(y)} \chi_A\, d\mathcal{H}^0 = \mathcal{H}^0(A \cap f^{-1}(y))$ die bekannte ,,Flächenformel":

$$\int_A J(f)\, d\mathcal{L}^n = \int_{\mathbb{R}^m} \mathcal{H}^0(A \cap f^{-1}(y))\, d\mathcal{H}^n(y) \geq \mathcal{H}^n(f(A)). \tag{8.17}$$

///

Nun kommen wir zu einer Verallgemeinerung von Formel (8.10), wobei wieder (8.2), (8.3) und $\Omega \subset\subset \mathbb{R}^n$ gelten mögen:

Proposition 8.4 *Für jedes $u \in C^2(\overline{\Omega})$ mit $\tilde{M} := (diam\ \Omega)^{-1}(\sup_\Omega u - \sup_{\partial\Omega} u_+) > 0$, und für jede stetige, nicht-negative Funktion g auf $\mathbb{R}^n$ gilt:*

$$\int_{B_{\tilde{M}}(0)} g\, d\mathcal{L}^n \leq \int_{\Gamma_u^+ \cap [u>0]} g(\nabla u) \left\| \frac{a_{ij}\partial_{ij} u}{n\, \mathcal{D}^*} \right\|^n d\mathcal{L}^n.$$

Beweis:
Die Abbildung $f := \nabla u$ ist Lipschitz-stetig auf $\bar{\Omega}$ und kann somit zu einer Lipschitz-stetigen Funktion auf ganz $\mathbb{R}^n$ fortgesetzt werden. Die Verkettung $g \circ \nabla u$ ist stetig, also insbesondere $\mathcal{L}^n-$messbar auf Ω, und ausserdem nicht-negativ. Wenden wir die allgemeine Flächenformel (8.16) auf $\tilde{g} := (g \circ \nabla u)\, \chi_{\Gamma_u^+ \cap [u>0]}$ und $f = \nabla u$ an, so erhalten wir:

$$\begin{aligned} & \int_{\nabla u(\Gamma_u^+ \cap [u>0])} g\, d\mathcal{L}^n \equiv \int_{\mathbb{R}^n} g\, \chi_{\nabla u(\Gamma_u^+ \cap [u>0])}\, d\mathcal{L}^n \\ \leq & \int_{\mathbb{R}^n} \int_{(\nabla u)^{-1}(z)} (g \circ \nabla u)\, \chi_{\Gamma_u^+ \cap [u>0]} d\mathcal{H}^0\, d\mathcal{L}^n(z) = \int_{\mathbb{R}^n} (g \circ \nabla u)\, \chi_{\Gamma_u^+ \cap [u>0]}\, |\det(D^2 u)|\, d\mathcal{L}^n \\ & = \int_{\Gamma_u^+ \cap [u>0]} g \circ \nabla u\, |\det(D^2 u)|\, d\mathcal{L}^n. \end{aligned} \tag{8.18}$$

Beachten wir noch die Übereinstimmung von χ_u mit ∇u auf Γ_u^+ und dass $\chi_u(x) = \emptyset$ genau für $x \in \Omega \setminus \Gamma_u^+(\Omega)$ gilt, so erhalten wir aus (8.18) und (8.15) die Ungleichung:

$$\int_{\chi_u([u>0])} g\, d\mathcal{L}^n \leq \int_{\Gamma_u^+ \cap [u>0]} g(\nabla u) \left\| \frac{a_{ij}\partial_{ij} u}{n\, \mathcal{D}^*} \right\|^n d\mathcal{L}^n. \tag{8.19}$$

Ausserdem gilt Formel (8.12) aus dem Beweis von Proposition 8.2 für die „runtergezogene" Funktion $\tilde{u} := u - \sup\limits_{\partial\Omega} u_+$, also wegen $[\tilde{u} > 0] \subset [u > 0]$ und $\chi_{\tilde{u}} = \chi_u$

$$\overline{B_{\tilde{M}}(0)} \subset \chi_{\tilde{u}}([\tilde{u} > 0]) \subset \chi_u([u > 0]),$$

mit $\tilde{M} := (diam\ \Omega)^{-1}(\sup_\Omega u - \sup_{\partial\Omega} u_+) > 0$, sodass sich die Behauptung der Proposition aus (8.19) ergibt.

///

Beweis von Satz 8.1:
Zuerst nehmen wir $u \in C^2(\overline{\Omega})$ an. Weiter genügt es, $\sup_\Omega u > \sup_{\partial\Omega} u_+$ zu betrachten. Aus der Definition der oberen Kontaktmenge und der Taylorentwicklung von $u \in C^2(\Omega)$ bis zur zweiten Ordnung folgt, dass $D^2(u)(x)$ in jedem Punkt $x \in \Gamma_u^+$ negativ-semidefinit ist. Desweiteren erinnern wir an die elementare Hölder-Ungleichung

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 \le (a_1^p + a_2^p)^{1/p}\,(b_1^q + b_2^q)^{1/q}$$

für $q, p \in (1, \infty)$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ und nicht-negative a_i, b_i. Wenden wir diese auf den Ausdruck $|b||\nabla u| + f_- = |b||\nabla u| + \frac{f_-}{\mu}\,\mu$, für ein beliebig fixiertes $\mu > 0$, mit $p := n$ und $q = \frac{n}{n-1}$ (falls $n > 1$) an, so erhalten wir (wegen $c \le 0$) auf $\Gamma_u^+ \cap [u > 0]$:

$$\begin{aligned} 0 &\le -a_{ij}\partial_{ij} u \le b_i \partial_i u + cu - f \le |b||\nabla u| + f_- \le \\ &\le (|b|^n + \mu^{-n}(f_-)^n)^{1/n} \ \parallel (|\nabla u|, \mu) \parallel_{n/(n-1)}, \end{aligned}$$

wobei

$$\parallel (a,b) \parallel_q := \begin{cases} (|a|^q + |b|^q)^{1/q} & \text{für } 1 \le q < \infty, \\ \max(|a|, |b|) & \text{für } q = \infty \end{cases}$$

gesetzt sei. Definieren wir nun

$$g(p) := \parallel (p, \mu) \parallel_{n/(n-1)}^{-n},$$

so ist dies eine nicht-negative, stetige (und durch μ^{-n} beschränkte) Funktion, und wir erhalten auf $\Gamma_u^+ \cap [u > 0]$:

$$-g(\nabla u)^{1/n} \frac{a_{ij}\partial_{ij} u}{n\mathcal{D}^*} \le \frac{(|b|^n + \mu^{-n}(f_-)^n)^{1/n}}{n\mathcal{D}^*}.$$

Für $\tilde{M} := (diam\ \Omega)^{-1}(\sup_\Omega u - \sup_{\partial\Omega} u_+) > 0$, folgt zusammen mit Proposition 8.4:

$$\begin{aligned} \int\limits_{B_{\tilde{M}}(0)} g\, d\mathcal{L}^n &\le \int\limits_{\Gamma_u^+ \cap [u>0]} g(\nabla u)\Big(\frac{-a_{ij}\partial_{ij} u}{n\mathcal{D}^*}\Big)^n d\mathcal{L}^n \le \\ &\le \frac{1}{n^n} \int\limits_{\Gamma_u^+ \cap [u>0]} \frac{|b|^n + \mu^{-n}(f_-)^n}{\mathcal{D}}\, d\mathcal{L}^n. \end{aligned} \tag{8.20}$$

Mittels der Ungeichung $a^{1/p} + b^{1/p} \leq 2^{1-\frac{1}{p}}\,(a+b)^{\frac{1}{p}}$, für nicht-negative a, b und $p \in [1,\infty)$, folgt hier für $p = n-1$, $a := |p|^n$ und $b := \mu^n$, falls $n > 1$:

$$g(p) \geq 2^{2-n}(|p|^n + \mu^n)^{-1},$$

und trivialerweise $g(p) \geq (|p| + \mu)^{-1}$ falls $n = 1$, also für jedes $n \geq 1$:

$$\int\limits_{B_{\tilde{M}}(0)} g\, d\mathcal{L}^n \geq n\omega_n 2^{1-n} \int\limits_0^{\tilde{M}} \frac{r^{n-1}}{r^n + \mu^n}\ \mathrm{d}r = 2^{1-n}\omega_n \log\Big(\frac{\tilde{M}^n}{\mu^n} + 1\Big).$$

Zusammen mit (8.20) folgt:

$$\log\Big(\frac{\tilde{M}^n}{\mu^n} + 1\Big) \leq \frac{2^{n-1}}{n^n\omega_n} \int\limits_{\Gamma_u^+ \cap [u>0]} \frac{|b|^n + \mu^{-n}(f_-)^n}{\mathcal{D}}.$$

Wir lassen nun $\mu \searrow \| f_-/\mathcal{D}^* \|_{L^n(\Gamma_u^+ \cap [u>0])}$ fallen und erhalten

$$\tilde{M} \leq \Big[\exp\Big(\frac{2^{n-1}}{n^n\omega_n}\Big(1 + \int\limits_{\Gamma_u^+ \cap [u>0]} \frac{|b|^n}{\mathcal{D}}\Big)\Big) - 1\Big]^{1/n}\ \| f_-/\mathcal{D}^* \|_{L^n(\Gamma_u^+ \cap [u>0])}\ .$$

Wegen $\tilde{M} = (diam\ \Omega)^{-1}(\sup_\Omega u - \sup_{\partial\Omega} u_+)$ folgt (8.6) für $u \in C^2(\overline{\Omega})$.

//

Für $u \in W^{2,n}_{loc}(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ nehmen wir zuerst an, daß

$$a_{ij}/\mathcal{D}^*, b_i/\mathcal{D}^* \in L^\infty(\Omega). \tag{8.21}$$

Wir wählen $u_m \in C^\infty(\Omega)$ mit

$$u_m \to u \quad \text{stark in } W^{2,n}_{loc}(\Omega),$$

d.h. für jedes $\Omega' \subset\subset \Omega$ gilt

$$u_m \to u \quad \text{stark in } W^{2,n}(\Omega')$$

und insbesondere $u_m \to u$ stark in $C^0(\overline{\Omega'})$. Daher können wir weiter annehmen, daß $u_m \leq u$ in Ω' , sodass

$$\begin{aligned} Lu_m = Lu + a_{ij}\partial_{ij}(u_m - u) + b_i\partial_i(u_m - u) + c(u_m - u) \geq \\ \geq -f_- + a_{ij}\partial_{ij}(u_m - u) + b_i\partial_i(u_m - u) \end{aligned}$$

wegen $c \leq 0$ gilt. Dann folgt aus (8.6) für die approximierenden $u_m \in C^2(\overline{\Omega'})$ (anhand des obigen Zwischenresultats), zusammen mit der Zusatz-Annahme (8.21) und wegen $f/\mathcal{D}^* \in L^n(\Omega)$:

$$\begin{aligned} \sup_{\Omega'} u = \lim_{m\to\infty} \sup_{\Omega'} u_m \leq \limsup_{m\to\infty} \Bigg(\sup_{\partial\Omega'} u_{m,+} + C(\Lambda, n) diam\ \Omega' \cdot \\ \cdot \Big(\| f_-/\mathcal{D}^* \|_{L^n(\Gamma_{u_m}^+ \cap [u_m>0])} + \Big\| \frac{a_{ij}}{\mathcal{D}^*}\partial_{ij}(u_m - u) + \frac{b_i}{\mathcal{D}^*}\partial_i(u_m - u) \Big\|_{L^n(\Omega')} \Big) \Bigg) \end{aligned}$$

$$\leq \sup_{\partial\Omega'} u_+ + C(\Lambda,n) diam\ \Omega' \parallel (f_-/\mathcal{D}^*) \limsup_{m\to\infty}\ \chi_{(\Gamma^+_{u_m}\cap[u_m>0])} \parallel_{L^n(\Omega')},$$

wobei wir hier $\Gamma^+_{u_m}$ bezüglich Ω' betrachten. Mit (8.7) und $[u_m > 0] \cap \Omega' \subseteq [u > 0]$, da $u_m \leq u$ in Ω' , sehen wir

$$\limsup_{m\to\infty}\ \chi_{(\Gamma^+_{u_m}(\Omega')\cap[u_m>0])} \leq \chi_{(\Gamma^+_u(\Omega')\cap[u>0])}.$$

Dies ergibt (8.6) für $u \in W^{2,n}_{loc}(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ auf $\Omega' \subset\subset \Omega$ unter der Annahme (8.21) an L. Für allgemeines L , an welches also keine zusätzlichen Voraussetzungen gestellt werden, schreiben wir:

$$spec(a_{ij}) = \{0 < \sigma_1 \leq \ldots \leq \sigma_n < \infty\},$$

und wir setzen

$$L_\varepsilon := L + \varepsilon(\sigma_n + |b|)\Delta,$$

also

$$a^\varepsilon_{ij} = a_{ij} + \varepsilon(\sigma_n + |b|)\delta_{ij}.$$

Dann gilt

$$spec(a^\varepsilon_{ij}) = \{\sigma_l + \varepsilon(\sigma_n + |b|) \mid l = 1, \ldots, n\},$$

und

$$\varepsilon(\sigma_n + |b|)I_n \leq (a^\varepsilon_{ij}) \leq ((1+\varepsilon)\sigma_n + \varepsilon|b|)I_n.$$

Daraus folgt

$$\mathcal{D}^* = (\Pi^n_{l=1}\sigma_l)^{1/n} \leq \mathcal{D}^*_\varepsilon \quad \text{und} \quad \varepsilon\,|b| \leq \varepsilon(\sigma_n + |b|) \leq \mathcal{D}^*_\varepsilon, \tag{8.22}$$

und ausserdem

$$\Big(\frac{\varepsilon(\sigma_n + |b|)}{\mathcal{D}^*_\varepsilon}\Big)^n \leq \frac{\varepsilon^n(\sigma_n + |b|)^n}{\varepsilon^{n-1}(\sigma_n + |b|)^{n-1}(\sigma_n + \varepsilon(\sigma_n + |b|))} = \frac{\varepsilon(\sigma_n + |b|)}{\sigma_n + \varepsilon(\sigma_n + |b|)} \leq 1,$$

also

$$1 \geq \frac{\varepsilon(\sigma_n + |b|)}{\mathcal{D}^*_\varepsilon} \to 0 \quad \text{fast überall auf } \Omega. \tag{8.23}$$

Da ausserdem

$$\frac{\sigma_n}{\mathcal{D}^*_\varepsilon} \leq \frac{\sigma_n}{\varepsilon\,(\sigma_n + |b|)} \leq \frac{1}{\varepsilon}$$

gilt, folgt insgesamt:

$$\frac{a^\varepsilon_{ij}}{\mathcal{D}^*_\varepsilon} \leq \Big(1 + \frac{1}{\varepsilon}\Big)\, I_n,$$

und auch

$$\frac{|b_i|(x)}{\mathcal{D}^*_\varepsilon(x)} \leq \frac{|b|(x)}{\varepsilon\,|b|(x)} = \frac{1}{\varepsilon}$$

falls $|b|(x) > 0$ ist. Insbesondere erfüllt somit der gestörte Operator L_ε die Zusatz-Voraussetzungen (8.21). Da wir Ungleichung (8.6) für $u \in W^{2,n}_{loc}(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ auf $\Omega' \subset\subset \Omega$ für solch einen Operator bereits bewiesen haben, folgt nun mit rechter Seite
$\tilde{f} := f + \varepsilon(\sigma_n + |b|)\Delta(u)$ und mittels (8.22):

$$\sup_{\Omega'} u \leq \sup_{\partial\Omega'} u_+ +$$
$$+ C(\Lambda,n) diam\ \Omega' \parallel f_-/\mathcal{D}^* \parallel_{L^n(\Gamma^+_u(\Omega')\cap[u>0])} + C(\Lambda,n) diam\ \Omega' \left\| \frac{\varepsilon(\sigma_n + |b|)}{\mathcal{D}^*_\varepsilon}\Delta u \right\|_{L^n(\Omega')}.$$

Wegen $\Delta u \in L^n(\Omega')$ und (8.23) konvergiert der letzte Term anhand des Satzes von Lebesgue gegen 0 für $\varepsilon \to 0$, und (8.6) folgt für u auf jedem Gebiet $\Omega' \subset\subset \Omega$.
Schließlich wählen wir $\Omega_m \subseteq \Omega_{m+1} \subset\subset \Omega$ mit $\Omega = \cup_{m=1}^{\infty}\Omega_m$, und erhalten mit $u \in C^0(\overline{\Omega}), f/\mathcal{D}^* \in L^n(\Omega)$ und (8.7):

$$\sup_{\Omega} u = \lim_{m\to\infty} \sup_{\Omega_m} u \leq$$

$$\leq \limsup_{m\to\infty} \left(\sup_{\partial\Omega_m} u_+ + C(\Lambda, n) diam\ \Omega_m \parallel f_-/\mathcal{D}^* \parallel_{L^n(\Gamma_u^+(\Omega_m)\cap[u>0])} \right) \leq$$

$$\leq \sup_{\partial\Omega} u_+ + C(\Lambda, n) diam\ \Omega \parallel f_-/\mathcal{D}^* \parallel_{L^n(\Gamma_u^+(\Omega)\cap[u>0])},$$

und (8.6) folgt für u auf Ω .

///

Mit dem Alexandroff'schen Maximumprinzip erhalten wir folgenden Eindeutigkeitssatz.

Satz 8.2 *Für einen linearen, elliptischen Differentialoperator L in Nicht-Divergenzform, der (8.1) - (8.3), (8.5) in $\Omega \subset\subset \mathbb{R}^n$ offen erfüllt, f meßbar in Ω und $\varphi \in C^0(\overline{\Omega})$, hat*

$$Lu = f \quad in\ \Omega,$$

$$u = \varphi \quad auf\ \partial\Omega$$

höchstens eine starke Lösung $u \in W^{2,n}_{loc}(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$.

□

Schließlich erhalten wir folgendes starke Maximumprinzip.

Satz 8.3 *L sei ein linearer, elliptischer Differentialopeqrator in Nicht-Divergenzform, der (8.1), (8.2) in $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und zusammenhängend, erfüllt, $L \in L^\infty(\Omega)$ und*

$$a_{ij}\xi_i\xi_j \geq \Lambda^{-1}|\xi|^2 \quad für\ \xi \in \mathbb{R}^n \tag{8.24}$$

für ein $1 \leq \Lambda < \infty$. Weiter sei $u \in W^{2,n}_{loc}(\Omega)$,

$$Lu \geq 0 \quad in\ \Omega$$

und $c \leq 0$ bzw. $c = 0$. Nimmt u ein inneres nichtnegatives bzw. beliebiges Maximum auf Ω an, so ist u konstant.

Beweis:
Ist u differenzierbar, so können wir dem Beweis des Hopf'schen Maximumprinzip (3.4) folgen, wobei wir das Alexandroff'sche Maximumprinzip, Satz 8.1, anstatt Korollar 3.2 verwenden.

Nehmen wir an, daß das Theorem im allgemeinen Fall falsch ist, so nimmt u sein Maximum $M = \sup_\Omega u$ in Ω an, ohne konstant zu sein. Dann existieren konzentrische Bälle o.B.d.A. mit 0 als Zentrum

$$B_\varrho(0) \subset\subset B_R(0) \subset\subset \Omega$$

mit

$$u < M \quad \text{auf } \overline{B_\varrho(0)},$$

$$u(x_0) = M \quad \text{für ein } x_0 \in B_R(0) - \overline{B_\varrho(0)}.$$

Für $\alpha > 0$ setzen wir

$$v(x) := e^{-\alpha |x|^2} - e^{-\alpha R^2}.$$

Wir rechnen, da $c \leq 0$ und mit (8.24),

$$Lv(x) = e^{-\alpha|x|^2}[4\alpha^2 a_{ij} x_i x_j - 2\alpha \sum_{i=1}^n (a_{ii} + b_i x_i)] + cv \geq$$

$$\geq e^{-\alpha|x|^2}[4\alpha^2 \Lambda^{-1} |x|^2 - 2\alpha(\sum_{i=1}^n a_{ii} + |b||x|) + c] \geq 0 \quad \text{auf } B_R(0) - \overline{B_\varrho(0)}$$

für α groß genug, da $a_{ii}, b, c \in L^\infty(\Omega)$. Da $c \leq 0$ und $M \geq 0$ oder $c = 0$, gilt

$$L(M - u - \varepsilon v) \leq 0 \quad \text{in } B_R(0) - \overline{B_\varrho(0)}$$

für $\varepsilon > 0$. Auf $\partial B_R(0)$ gilt

$$M - u \geq 0, \quad v = 0.$$

Weiter gilt $\inf\limits_{\partial B_\varrho(0)} (M-u) > 0$, also

$$M - u - \varepsilon v > 0 \quad \text{auf } \partial B_\varrho(0)$$

für ε klein.
Mit dem Alexandroff'schen Maximumprinzip, Satz 8.1, folgt

$$M - u - \varepsilon v \geq 0 \quad \text{in } B_R(0) - \overline{B_\varrho(0)}.$$

Aber es gilt $x_0 \in B_R(0) - \overline{B_\varrho(0)}$ und

$$(M - u - \varepsilon v)(x_0) = -\varepsilon v(x_0) < 0,$$

also ein Widerspruch.

///

Wir kommen zu den Calderon-Zygmund Abschätzungen, die für $1 < p < \infty$ die $W^{2,p}-$ Norm einer starken Lösung von (8.6) durch die L^p- Norm der rechten Seite und schwächere Normen der Lösung abschätzt.

Wieder betrachten wir zuerst den Laplace-Operator Δ auf dem Ganzraum.

Lemma 8.5 *Es sei* $1 < p < \infty$. *Für* $u \in W^{2,p}(\mathbb{R}^n)$ *gilt*

$$\| D^2 u \|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq C(n,p) \| \Delta u \|_{L^p(\mathbb{R}^n)} . \tag{8.25}$$

Beweis:
$n = 1$ ist trivial.

Für $u \in W^{2,p}(\mathbb{R}^n)$ existiert mit Proposition 5.11 eine Folge $u_m \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ mit

$$u_m \to u \quad \text{stark in } W^{2,p}(\mathbb{R}^n).$$

Gilt (8.25) für u_m, so folgt (8.25) auch für u. Also genügt es, $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ zu betrachten.

Nach der Green'schen Darstellungsformel (2.10) gilt

$$u(x) = \int \Gamma(x-y)\Delta u(y)\, \mathrm{d}y \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

wobei Γ die Fundamentallösung des Laplace-Operators ist, d.h.

$$\Gamma(x) := \begin{cases} \dfrac{1}{n(2-n)\omega_n}|x|^{2-n} & n \geq 3, \\ \dfrac{1}{2\pi}\log|x| & n = 2. \end{cases}$$

Also ist $u = N\Delta u$ das Newtonpotential seines Laplace, und (8.25) folgt aus der folgenden Calderon-Zygmund-Ungleichung für das Newtonpotential.

///

Lemma 8.6 (Spezialfall der Calderon-Zygmund-Ungleichung) *Es sei* $\Omega \subset\subset \mathbb{R}^n$ *offen,* $n \geq 2, f \in L^p(\Omega), 1 < p < \infty$ *und das Newton-Potential*

$$(Nf)(x) := \int_\Omega \Gamma(x-y)f(y)dy$$

wobei Γ *die Fundamentallösung des Laplace-Operators ist. Dann gilt* $Nf \in W^{2,p}(\Omega)$ *und*

$$\| D^2(Nf) \|_{L^p(\Omega)} \leq C(n,p) \| f \|_{L^p(\Omega)} . \tag{8.26}$$

Beweis:
Zuerst betrachten wir $p = 2$. Für $f \in C_0^\infty(\Omega) \subseteq C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ ist $u := Nf \in C^2(\mathbb{R}^n)$ und mit Proposition 2.2 gilt $\Delta u = f$ auf $\mathbb{R}^n$. Für $R \geq R_0$ mit $\Omega \subseteq B_{R_0/2}(0)$, gilt mit dem Divergenzsatz

$$\int_{B_R(0)} |D^2u|^2 = \int_{B_R(0)} \sum_{i,j=1}^n |\partial_{ij}u|^2 = -\int_{B_R(0)} \partial_j u\ \partial_{jii}u + \int_{\partial B_R(0)} \partial_j u\ \partial_{ij}u\ \nu_i =$$

$$= \int_{B_R(0)} \partial_{jj}u\ \partial_{ii}u - \int_{\partial B_R(0)} \nu_j\ \partial_j u\ \Delta u + \int_{\partial B_R(0)} \partial_j u\ \partial_{ij}u\ \nu_i =$$

$$= \int_{B_R(0)} f^2 + \int_{\partial B_R(0)} \nabla u \cdot \partial_\nu \nabla u, \tag{8.27}$$

da $\Delta u = f = 0$ auf $\partial B_R(0)$. Mit den Abschätzungen (2.8) folgt für $|x| \geq R_0$ und $j = 1, 2$:

$$|D^j u(x)| = |\int_\Omega D_x^j \Gamma(x-y) f(y)\, d\mathcal{L}^n(y)| \leq C_n \parallel f \parallel_{L^1(\Omega)} |x|^{2-n-j},$$

wenn man noch beachtet, dass $|x| \leq |x-y| + |y| \leq |x-y| + \frac{|x|}{2}$ und somit $|x| \leq 2\,|x-y|$ für $y \in B_{R_0/2}(0)$ und $|x| \geq R_0$ gilt, woraus wegen $\Omega \subseteq B_{R_0/2}(0)$ insbesondere

$$\sup_{y\in\Omega} |x-y|^{2-n-j} \leq 2^{n+j-2}\, |x|^{2-n-j}$$

für $|x| \geq R_0$ folgt. Dies ergibt

$$|\int\limits_{\partial B_R(0)} \nabla u \cdot \partial_\nu \nabla u| \leq C_n \parallel f \parallel_{L^1(\Omega)}^2 R^{n-1} R^{1-n} R^{-n} \to 0 \quad \text{für } R \to \infty,$$

und (8.26) folgt wegen $u := N(f)$ aus (8.27), hier zunächst für $f \in C_0^\infty(\Omega)$ und mit $C(n,2) = 1$.
Für allgemeines $f \in L^2(\Omega)$, wählen wir mittels Proposition 5.7 $f_m \in C_0^\infty(\Omega)$ mit

$$f_m \to f \qquad \text{in } L^2(\Omega).$$

Mit Proposition 2.2 ist

$$N : L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$$

stetig, also

$$Nf_m \to Nf \quad \text{in } L^2(\Omega). \tag{8.28}$$

Aus dem eben Bewiesenen folgt

$$\limsup_{m\to\infty} \parallel D^2(Nf_m) \parallel_{L^2(\Omega)} \leq \limsup_{m\to\infty} \parallel f_m \parallel_{L^2(\Omega)} = \parallel f \parallel_{L^2(\Omega)} .$$

Kombinieren wir dies (mittels partieller Integration) mit (8.28) und Proposition 5.9, so erhalten wir $Nf \in W^{2,2}(\Omega)$ und (8.26) für beliebiges $f \in L^2(\Omega)$. Damit ist (8.26) für $p = 2$ bewiesen.

//

Für feste $1 \leq i, j \leq n$ erhalten wir den stetigen, linearen Operator

$$\partial_{ij} N : L^2(\Omega) \to L^2(\Omega),$$
$$(\partial_{ij} N) f := \partial_{ij}(Nf).$$

Aus (8.26) für $p = 2$ und der Tschebychef'schen Ungleichung erhalten wir

$$\mathcal{L}^n(|\partial_{ij} Nf| > t) \leq \frac{C_n \parallel f \parallel_{L^2(\Omega)}^2}{t^2} \quad \text{für } t > 0 \tag{8.29}$$

und für jedes $f \in L^2(\Omega)$. Als nächstes zeigen wir

$$\mathcal{L}^n(|\partial_{ij} Nf| > t) \leq \frac{C_n \parallel f \parallel_{L^1(\Omega)}}{t} \quad \text{für } t > 0 \tag{8.30}$$

und für jedes $f \in L^1(\Omega)$. Wir setzen $f \in L^1(\Omega)$ auf $\mathbb{R}^n - \Omega$ durch 0 fort, fixieren $t > 0$ und wählen $R > 0$ mit

$$\begin{aligned} &\Omega \subseteq Q_0 := [-R, R]^n, \\ &\| f \|_{L^1(\Omega)} \leq t\mathcal{L}^n(Q_0). \end{aligned} \tag{8.31}$$

Nun führen wir eine Calderon-Zygmund-Zerlegung des Würfels Q_0 durch, d.h. wir halbieren die Seiten von Q_0 und zerlegen Q_0 in 2^n kongruente Unterwürfel Q. Diejenigen Q , die

$$\fint_Q |f| \leq t$$

erfüllen, werden weiter unterteilt. Die restlichen Würfel, die

$$\fint_Q |f| > t$$

erfüllen, fassen wir sukzessiv in eine Familie $\{Q_l\}_{l\in\mathbb{N}}$ von Unterwürfeln zusammen, deren Inneres sich paarweise nicht schneiden. Jedes Q_l ist in einem eindeutigen Vorgängerwürfel $\tilde{Q}_l$ doppelter Seitenlänge enthalten, der

$$\fint_{\tilde{Q}_l} |f| \leq t \tag{8.32}$$

erfüllt. Da $\mathcal{L}^n(\tilde{Q}_l) = 2^n\mathcal{L}^n(Q_l)$, folgt

$$t < \fint_{Q_l} |f| \leq 2^n t. \tag{8.33}$$

Wir setzen

$$A := Q_0 - \cup_{l\in\mathbb{N}} Q_l,$$

und sehen, daß für jedes $x \in A$ eine Folge $Q_{x,l}$ von Unterwürfeln mit beliebig kleiner Seitenlänge und

$$\fint_{Q_{x,l}} |f| \leq t$$

existiert. Da fast alle x Lebesguepunkte von f sind, folgt

$$|f| \leq t \quad \text{fast überall auf } A. \tag{8.34}$$

Nun zerlegen wir f in zwei Teile. Es sei

$$g(x) := \begin{cases} f(x) & \text{für } x \in A \\ \fint_{Q_l} f & \text{für } x \in Q_l, l \in \mathbb{N}, \end{cases} \tag{8.35}$$

und

$$h := f - g.$$

Mit (8.33) und (8.34) folgt

$$|g| \leq 2^n t \quad \text{fast überall auf } Q_0, \tag{8.36}$$

$$h = 0 \quad \text{auf } A, \tag{8.37}$$

$$\int\limits_{Q_l} h = 0 \quad \text{für } l \in \mathbb{N} \tag{8.38}$$

Weiter gilt

$$\int\limits_{Q_l} |g| = |\int\limits_{Q_l} f| \leq \int\limits_{Q_l} |f|$$

und damit

$$\| g \|_{L^1(Q_0)}, \| h \|_{L^1(Q_0)} \leq 2 \| f \|_{L^1(\Omega)} . \tag{8.39}$$

Da $\partial_{ij} N$ linear ist, gilt

$$|\partial_{ij} N f| \leq |\partial_{ij} N g| + |\partial_{ij} N h|,$$

also

$$\mathcal{L}^n(|\partial_{ij} N f| > t) \leq \mathcal{L}^n(|\partial_{ij} N g| > t/2) + \mathcal{L}^n(|\partial_{ij} N h| > t/2). \tag{8.40}$$

Für den ersten Term auf der rechten Seite sehen wir mit (8.29),(8.36) und (8.39)

$$\mathcal{L}^n(|\partial_{ij} N g| > \frac{t}{2}) \leq \frac{4}{t^2} C_n \| g \|^2_{L^2(Q_0)} \leq C_n \frac{2^{n+2}}{t} \| g \|_{L^1(Q_0)} \leq C_n t^{-1} \| f \|_{L^1(\Omega)} . \tag{8.41}$$

Zur Abschätzung des zweiten Terms schreiben wir

$$h = \sum_{l=1}^{\infty} h_l$$

mit

$$h_l := h \cdot \chi_{Q_l},$$

da $h = 0$ auf A mit (8.37).

Wir erhalten für $x \notin Q_l$

$$\partial_{ij} N h_l(x) = \int\limits_{Q_l} \partial_{ij} \Gamma(x-y) h_l(y) \, \mathrm{d}y = \int\limits_{Q_l} \Big(\partial_{ij}\Gamma(x-y) - \partial_{ij}\Gamma(x-\bar{y})\Big) h_l(y) \, \mathrm{d}y,$$

wobei $\bar{y}$ das Zentrum von Q_l ist, also

$$Q_l = \bar{y} + [-\varrho, \varrho]^n.$$

Da

$$|D^3\Gamma(x)| \leq C_n |x|^{-n-1} \quad \text{für } x \neq 0,$$

folgt

$$|\partial_{ij} N h_l(x)| \leq C_n \sqrt{n} \varrho \cdot d(x, Q_l)^{-n-1} \int\limits_{Q_l} |h_l|.$$

Da für $x \notin B_{2\sqrt{n}\varrho}(\bar{y}) =: B_l$

$$d(x, Q_l) \geq |x - \bar{y}| - \sqrt{n}\varrho \geq \frac{1}{2}|x - \bar{y}|,$$

ergibt sich wegen $\int\limits_{\mathbb{R}^n - B_l} |x - \bar{y}|^{-n-1}\, \mathrm{d}x = n\,\omega_n \int_{2\sqrt{n}\varrho}^{\infty} r^{-2}\, dr = \frac{\sqrt{n}\,\omega_n}{2}\varrho^{-1}$:

$$\int\limits_{Q_0 - B_l} |\partial_{ij} N h_l(x)|\, \mathrm{d}x \leq \int\limits_{\mathbb{R}^n - B_l} C_n \varrho |x - \bar{y}|^{-n-1} \Big(\int\limits_{Q_l} |h_l| \Big)\, \mathrm{d}x \leq C_n \cdot \int\limits_{Q_l} |h_l|.$$

Setzen wir $A^* := Q_0 - \cup_{l \in \mathbb{N}} B_l$, so erhalten wir mit Summation und (8.39)

$$\int\limits_{A^*} |\partial_{ij} N h| \leq C_n \parallel f \parallel_{L^1(\Omega)}$$

und somit

$$\mathcal{L}^n([|\partial_{ij} N h| > \frac{t}{2}] \cap A^*) \leq C_n t^{-1} \parallel f \parallel_{L^1(\Omega)} . \tag{8.42}$$

Andererseits gilt mit (8.33):

$$\mathcal{L}^n(Q_0 - A^*) \leq \sum_{l=1}^{\infty} \mathcal{L}(B_l) \leq C_n \cdot \sum_{l=1}^{\infty} \mathcal{L}^n(Q_l) \leq$$

$$\leq C_n \sum_{l=1}^{\infty} t^{-1} \int\limits_{Q_l} |f| \leq C_n t^{-1} \parallel f \parallel_{L^1(\Omega)} . \tag{8.43}$$

Dann folgt (8.30) aus (8.40), (8.41), (8.42) und (8.43). Wenden wir nun den Interpolationssatz von Marcinkiewicz, Lemma 8.7 unten, an, so ergeben (8.29) und (8.30), daß

$$\partial_{ij} N := L^p(\Omega) \to L^p(\Omega)$$

für $1 < p < 2$ ein stetiger Operator ist, für dessen Operator-Norm

$$\parallel \partial_{ij} N \parallel_{L(L^p(\Omega), L^p(\Omega))} \leq C(n, p)$$

unabhängig von Ω gilt.
Für $2 < p < \infty, f, g \in C_0^{\infty}(\Omega)$ folgt mit Lemma 2.2, der Hölder-Ungleichung und mit (8.26) für $q = \frac{p}{p-1} \in]1, 2[$:

$$| \int\limits_{\Omega} (\partial_{ij} N f) g \,| = | \int\limits_{\Omega} \partial_j (N f) \partial_i g \,| = | \int\limits_{\Omega} \int\limits_{\Omega} \Gamma(x - y) \partial_j f(y) \partial_i g(x)\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}x \,| =$$

$$= | \int\limits_{\Omega} f(\partial_{ij} N g) \,| \leq \parallel f \parallel_{L^p(\Omega)} \parallel \partial_{ij} N g \parallel_{L^q(\Omega)} \leq C(n, q) \parallel f \parallel_{L^p(\Omega)} \parallel g \parallel_{L^q(\Omega)},$$

also

$$\parallel D^2 N(f) \parallel_{L^p(\Omega)} \leq C(n, p) \parallel f \parallel_{L^p(\Omega)}$$

mit Proposition 5.9. Da $Nf : L^p(\Omega) \to L^p(\Omega)$ mit Proposition 2.2 stetig ist, folgt (8.26) wieder mittels Approximation, partieller Integration und Proposition 5.9.

///

Lemma 8.7 (Marcinkiewicz-Interpolationssatz) *Es sei* $\Omega \subset\subset \mathbb{R}^n$ *messbar und beschränkt,* $1 \leq q < p \leq \infty$ *und* T *eine Abbildung von* $L^1(\Omega)$ *in den Raum der* $\mathcal{L}^n-$*meßbaren Funktionen auf* Ω *, die subadditiv ist, d.h. mit*

$$|T(f_1 + f_2)| \leq |Tf_1| + |Tf_2|,$$

und mit

$$\mathcal{L}^n(|Tf| > t) \leq \Big(\frac{T_q \parallel f \parallel_{L^q(\Omega)}}{t}\Big)^q,$$

$$\mathcal{L}^n(|Tf| > t) \leq \Big(\frac{T_p \parallel f \parallel_{L^p(\Omega)}}{t}\Big)^p \quad \text{für } t > 0, p < \infty,$$

$$\parallel Tf \parallel_{L^\infty(\Omega)} \leq T_\infty \parallel f \parallel_{L^\infty(\Omega)} \quad \text{für } p = \infty.$$

Dann gilt für $f \in L^r(\Omega) \subseteq L^1(\Omega)$ *mit* $q < r < p$ *:*

$$\parallel Tf \parallel_{L^r(\Omega)} \leq C(p,q,r)\, T_q^\alpha T_p^{1-\alpha} \parallel f \parallel_{L^r(\Omega)} \tag{8.44}$$

mit

$$\frac{1}{r} = \frac{\alpha}{q} + \frac{1-\alpha}{p}.$$

Beweis :
Für $f \in L^r(\Omega) \subseteq L^q(\Omega)$ und $s > 0$ zerlegen wir

$$f = f_1^s + f_2^s,$$

wobei

$$f_1^s := f \cdot \chi_{[|f|>s]}, \quad f_2^s := f \cdot \chi_{[|f|\leq s]}.$$

Es ist dann $f_1^s \in L^q(\Omega)$ und $f_2^s \in L^p(\Omega)$, und es gilt

$$|Tf| \leq |Tf_1^s| + |Tf_2^s|.$$

Somit folgt für $p < \infty$ aus der Voraussetzung an den Operator T:

$$\mathcal{L}^n(|Tf| > t) \leq \mathcal{L}^n(|Tf_1^s| > t/2) + \mathcal{L}^n(|Tf_2^s| > t/2) \leq$$

$$\leq \Big(\frac{2T_q \parallel f_1^s \parallel_{L^q(\Omega)}}{t}\Big)^q + \Big(\frac{2T_p \parallel f_2^s \parallel_{L^p(\Omega)}}{t}\Big)^p.$$

Für $s = t/A, A > 0$ unten gewählt, folgt zusammen mit der Definition von f_1^s und f_2^s:

$$\int_\Omega |Tf|^r = r \int_0^\infty t^{r-1} \mathcal{L}^n(|Tf| > t)\, \mathrm{d}t \leq$$

$$\leq r(2T_q)^q \int_0^\infty t^{r-1-q} \Big(\int_{[|f|>t/A]} |f|^q\Big)\, \mathrm{d}t + r(2T_p)^p \int_0^\infty t^{r-1-p} \Big(\int_{[|f|\leq t/A]} |f|^p\Big)\, \mathrm{d}t$$

$$= r(2T_q)^q A^{r-q} \int\limits_0^\infty \tau^{r-1-q} \Big(\int\limits_{[|f|>\tau]} |f|^q d\mathcal{L}^n \Big) \,\mathrm{d}\tau$$

$$+ r(2T_p)^p A^{r-p} \int\limits_0^\infty \tau^{r-1-p} \Big(\int\limits_{[|f|\le\tau]} |f|^p d\mathcal{L}^n \Big) \,\mathrm{d}\tau.$$

Da mit dem Satz von Fubini

$$\int\limits_0^\infty \tau^{r-1-q} \Big(\int\limits_{[|f|>\tau]} |f|^q d\mathcal{L}^n \Big) \,\mathrm{d}\tau = \int\limits_\Omega |f|^q \int\limits_0^{|f|} \tau^{r-1-q} \,\mathrm{d}\tau \, d\mathcal{L}^n = \frac{1}{r-q} \int\limits_\Omega |f|^r \, d\mathcal{L}^n$$

und ähnlich

$$\int\limits_0^\infty \tau^{r-1-p} \Big(\int\limits_{[|f|\le\tau]} |f|^p \Big) d\mathcal{L}^n \Big) \,\mathrm{d}\tau = \int\limits_\Omega |f|^p \int\limits_{|f|}^\infty \tau^{r-1-p} \,\mathrm{d}\tau \, d\mathcal{L}^n = \frac{1}{p-r} \int\limits_\Omega |f|^r \, d\mathcal{L}^n$$

gilt, folgt insgesamt

$$\int\limits_\Omega |Tf|^r \le \Big[\frac{r}{r-q} (2T_q)^q A^{r-q} + \frac{r}{p-r} (2T_p)^p A^{r-p} \Big] \int\limits_\Omega |f|^r \, d\mathcal{L}^n. \tag{8.45}$$

Ist $p = \infty$, so gilt $|Tf_2| \le T_\infty s$ per Definition von f_2, und für $s = t/(2T_\infty)$:

$$\mathcal{L}^n(|Tf| > t) \le \mathcal{L}^n(|Tf_1| > t/2) \le \Big(\frac{2T_q \parallel f_1 \parallel_{L^q(\Omega)}}{t} \Big)^q.$$

Für $p < \infty$ wählen wir

$$A = 2T_q^{-\frac{q}{p-q}} \quad T_p^{\frac{p}{p-q}},$$

während für $p = \infty$ und $A = 2T_\infty$ der zweite Term in (8.45) wegfällt. In beiden Fällen erhalten wir

$$\parallel Tf \parallel_{L^r(\Omega)} \le 2\Big(\frac{r}{r-q} + \frac{r}{p-r}\Big)^{\frac{1}{r}} T_q^\alpha T_p^{1-\alpha} \parallel f \parallel_{L^r(\Omega)},$$

und (8.44) folgt mit

$$C(p,q,r) = 2\Big(\frac{r}{r-q} + \frac{r}{p-r}\Big)^{1/r}.$$

///

Nun kommen wir zu den Calderon-Zygmund oder L^p- Abschätzungen. Dabei sei $\Omega \subset\subset \mathbb{R}^n$ offen, L ein linearer, elliptischer Differentialoperator in Nicht-Divergenzform

$$Lu := a_{ij}\partial_{ij}u + b_i\partial_i u + cu \tag{8.46}$$

mit

$$\parallel a_{ij}, b_i, c \parallel_{L^\infty(\Omega)} \le \Lambda, \tag{8.47}$$

$(a_{ij})_{ij}$ symmetrisch und

$$a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq \Lambda^{-1}|\xi|^2 \quad \text{für } \mathcal{L}^n\text{-fast alle } x \in \Omega, \\ \text{für alle } \xi \in \mathbb{R}^n \tag{8.48}$$

für ein $1 \leq \Lambda < \infty$. Weiter seien $0 < \varepsilon, \varrho < 1$ mit

$$osc_{B_\varrho(x)\cap\Omega}(a_{ij}) < \varepsilon \tag{8.49}$$

für alle $x \in \Omega$.

Bemerkung 8.8
Ist a_{ij} stetig auf $\overline{\Omega}$, so existiert zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\varrho > 0$, das (8.49) erfüllt.

□

Satz 8.4 (Calderon-Zygmund-Abschätzungen) *Es sei* $1 < p < \infty$ *und* L *ein linearer, elliptischer Differentialoperator in Nicht-Divergenzform, der (8.46) - (8.49) auf* $\Omega := B_2(0)$ *erfüllt, mit*

$$\epsilon = \epsilon(\Lambda, n, p) > 0$$

und $\varrho(\epsilon) > 0$ *genügend klein. Dann gilt für* $u \in W^{2,p}(B_2(0)), f \in L^p(B_2(0))$ *mit*

$$Lu = f \quad \text{in } B_2(0),$$

daß

$$\| u \|_{W^{2,p}(B_1(0))} \leq C(\Lambda, n, p, \varrho(\epsilon))(\| f \|_{L^p(B_2(0))} + \| u \|_{L^p(B_2(0))}). \tag{8.50}$$

Für $u, \varphi \in W^{2,p}(B_2(0)^+), f \in L^p(B_2(0)^+)$ *mit*

$$Lu = f \quad \text{in } B_2(0)^+,$$

$$u = \varphi \quad \text{auf } \{x_n = 0\} \cap B_2(0),$$

gilt

$$\| u \|_{W^{2,p}(B_1(0)^+)} \leq \\ \leq C(\Lambda, n, p, \varrho(\epsilon))(\| f \|_{L^p(B_2(0)^+)} + \| \varphi \|_{W^{2,p}(B_2(0)^+)} + \| u \|_{L^p(B_2(0)^+)}). \tag{8.51}$$

Beweis:
Seien zunächst $\varrho \in (0,1)$ und $x_0 \in B_1(0)$ beliebig fixiert. Dann ist $B_\varrho(x_0) \subseteq B_2(0)$, und wir betrachten

$$L_0 v := a_{ij}(x_0)\partial_{ij} v \quad \text{für } v \in W^{2,p}(B_\varrho(x_0)).$$

Für $v \in W_0^{2,p}(B_\varrho(x_0)) \subseteq W^{2,p}(\mathbb{R}^n)$ folgt aus Lemma 8.5 nach Anwendung einer linearen Transformation

$$\| D^2 v \|_{L^p(B_\varrho(x_0))} \leq C(\Lambda, n, p) \| L_0 v \|_{L^p(B_\varrho(x_0))} \leq$$

$$\leq C(\Lambda, n, p)(\| a_{ij}\partial_{ij} v \|_{L^p(B_\varrho(x_0))} + \quad \| (a_{ij} - a_{ij}(x_0))\partial_{ij} v \|_{L^p(B_\varrho(x_0))}) \leq$$

$$\leq C(\Lambda, n, p) \| a_{ij}\partial_{ij} v \|_{L^p(B_\varrho(x_0))} + C(\Lambda, n, p) osc_{B_\varrho(x_0)}(a_{ij}) \| D^2 v \|_{L^p(B_\varrho(x_0))} .$$

Für $\epsilon = \epsilon(\Lambda, n, p)$ und $\varrho = \varrho(\Lambda, n, p)$ hinreichend klein folgt nun durch Absorption

$$\| D^2 v \|_{L^p(B_\varrho(x_0))} \leq C(\Lambda, n, p) \| a_{ij}\partial_{ij} v \|_{L^p(B_\varrho(x_0))} . \tag{8.52}$$

Für $0 < \sigma < 1, \sigma' = \frac{1+\sigma}{2}$, wählen wir

$$\begin{gathered} \eta \in C_0^\infty(B_{\sigma'\varrho}(x_0)), \\ \eta \equiv 1 \quad \text{auf } B_{\sigma\varrho}(x_0), \\ |D^k \eta| \leq C_n((1-\sigma)\varrho)^{-k} \quad \text{für } k = 0, 1, 2. \end{gathered}$$

Dann folgt für $v := u\eta \in W_0^{2,p}(B_\varrho(x_0))$ mit (8.52)

$$\begin{gathered} \| D^2 u \|_{L^p(B_{\sigma\varrho}(x_0))} \leq \| D^2 v \|_{L^p(B_\varrho(x_0))} \leq \\ \leq C(\Lambda, n, p) \| \eta a_{ij}\partial_{ij} u + 2a_{ij}\partial_i u \partial_j \eta + u a_{ij}\partial_{ij}\eta \|_{L^p(B_\varrho(x_0))} \leq \\ \leq C(\Lambda, n, p) \Big(\| f \|_{L^p(B_\varrho(x_0))} + \frac{1}{(1-\sigma)\varrho} \| \nabla u \|_{L^p(B_{\sigma'\varrho}(x_0))} + \frac{1}{(1-\sigma)^2\varrho^2} \| u \|_{L^p(B_{\sigma'\varrho}(x_0))} \Big). \end{gathered}$$

Definieren wir

$$S_k := \sup_{0<\sigma<1} (1-\sigma)^k \varrho^k \| D^k u \|_{L^p(B_{\sigma\varrho}(x_0))} \quad k = 0, 1, 2,$$

so erhalten wir

$$S_2 \leq C(\Lambda, n, p)\Big(\varrho^2 \| f \|_{L^p(B_\varrho(x_0))} + S_1 + S_0 \Big). \tag{8.53}$$

Für $1/2 < \sigma < 1, 0 < \delta < 1$ gilt mit dem Interpolationslemma 5.26 mit $\varepsilon = \delta(1-\sigma) < 1$ nach Reskalieren mit $\sigma\varrho$, daß

$$\begin{gathered} (1-\sigma)\varrho \| \nabla u \|_{L^p(B_{\sigma\varrho}(x_0))} \leq \\ \leq \delta\sigma(1-\sigma)^2\varrho^2 \| D^2 u \|_{L^p(B_{\sigma\varrho}(x_0))} + C(n,p)\delta^{-1}\sigma^{-1} \| u \|_{L^p(B_{\sigma\varrho}(x_0))} \leq \\ \leq \delta S_2 + 2\, C(n,p)\delta^{-1} S_0. \end{gathered}$$

Nehmen wir das Supremum über $1/2 < \sigma < 1$, so erhalten wir

$$S_1 \leq 2 \sup_{1/2<\sigma<1} (1-\sigma)\varrho \| \nabla u \|_{L^p(B_{\sigma\varrho}(x_0))} \leq 2\delta S_2 + 4\, C(n,p)\delta^{-1} S_0.$$

Setzen wir dies mit $\delta = \delta(\Lambda, n, p)$ klein in (8.53) ein, so folgt

$$S_2 \leq C(\Lambda, n, p)(\varrho^2 \| f \|_{L^p(B_\varrho(x_0))} + \| u \|_{L^p(B_\varrho(x_0))}).$$

Wählen wir speziell $\sigma = \frac{1}{2}$ in der Definnition von S_2, so erhalten wir

$$\| D^2 u \|_{L^p(B_{\varrho/2}(x_0))} \leq \frac{4\, S_2}{\varrho^2} \leq C(\Lambda, n, p)(\| f \|_{L^p(B_\varrho(x_0))} + \varrho^{-2} \| u \|_{L^p(B_\varrho(x_0))}).$$

Überdecken wir $B_1(0)$ mit endlich vielen Bällen $B_{\varrho/2}(x_0)$ mit $x_0 \in B_1(0)$, so erhalten wir nach Wahl eines hinreichend kleinen $\varrho = \varrho(\Lambda, n, p)$:

$$\| D^2 u \|_{L^p(B_1(0))} \leq C(\Lambda, n, p, \varrho)(\| f \|_{L^p(B_2(0))} + \| u \|_{L^p(B_2(0))}).$$

Schließlich folgt (8.50) aus dem Interpolationslemma 5.26.

Im Fall mit Rand können wir $\varphi = 0$ annehmen, da

$$\| L\varphi \|_{L^p(B_2(0)^+)} \leq C(\Lambda, n, p) \| \varphi \|_{W^{2,p}(B_2(0)^+)} .$$

Zuerst nehmen wir

$$\| a_{ij} - \delta_{ij} \|_{L^\infty(B_2(0)^+)} \leq \varepsilon \tag{8.54}$$

an. Wir setzen u ungerade, also mittels E_- aus (5.28), auf $B_2(0)$ fort, genauer setzen wir für $(y,t) \in B_2(0)^-$:

$$\begin{aligned} u(y,t) &:= -u(y,-t), \\ a_{ij}(y,t) &:= (-1)^{\lfloor \frac{i}{n} \rfloor + \lfloor \frac{j}{n} \rfloor} a_{ij}(y,-t), \\ b_i(y,t) &:= (-1)^{\lfloor \frac{i}{n} \rfloor} b_i(y,-t), \\ c(y,t) &:= c(y,-t), \\ f(y,t) &:= -f(y,-t). \end{aligned}$$

Mit Proposition 5.25 sehen wir

$$\begin{gathered} u \in W^{2,p}(B_2(0)), \\ L \text{ erfüllt } (8.46) - (8.48) \text{ auf } B_2(0), \\ \| a_{ij} - \delta_{ij} \|_{L^\infty(B_2(0))} \leq \varepsilon, \\ \| f \|_{L^p(B_2(0))} \leq 2^{1/p} \| f \|_{L^p(B_2(0)^+)}, \\ Lu = f \text{ auf } B_2(0). \end{gathered}$$

Da L nicht nur die Strukturbedingungen (8.46)-(8.48) sondern auch (8.49) auf $B_2(0)$, für jedes $\varrho \in (0,1)$, erfüllt, folgt aus den bereits bewiesenen inneren Calderon-Zygmund-Abschätzungen (8.50):

$$\begin{aligned} \| u \|_{W^{2,p}(B_1(0))} &\leq C(\Lambda, n, p)(\| f \|_{L^p(B_2(0))} + \| u \|_{L^p(B_2(0))}) \\ &\leq C(\Lambda, n, p)(\| f \|_{L^p(B_2(0)^+)} + \| u \|_{L^p(B_2(0)^+)}). \end{aligned} \tag{8.55}$$

Ohne die Bedingung (8.54) existiert mit (8.49) für beliebiges $x_0 \in \{x_n = 0\} \cap B_1(0)$ zu $\varepsilon > 0$ ein $\varrho > 0$ und ein symmetrisches, elliptisches $(a^0_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit

$$\| (a_{ij}) - (a^0_{ij}) \|_{L^\infty(B_\varrho(x_0))} \leq \varepsilon.$$

Wir nehmen im Folgenden o.B.d.A. $x_0 = 0$ an, da dies durch eine Translation des $\mathbb{R}^n$ erreicht werden kann. Da die Matrix (a^0_{ij}) symmetrisch und elliptisch ist, existiert nach dem Satz von Sylvester eine Matrix $B \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, die gerade $B \cdot (a^0_{ij}) \cdot B^T = (\delta_{ij})$ erfüllt. Definieren wir also die Koeffizienten-Matrix

$$\tilde{a}_{ij}(x) := B \cdot (a_{ij})(B^{-1}\, x) \cdot B^T$$

für x aus einem kleinen Ball $B_{c_0\,\varrho}(x_0)$, so erfüllt diese

$$\begin{aligned}\| \tilde{a}_{ij} - \delta_{ij} \|_{L^\infty(B_{c_0\,\varrho}(x_0))} &\leq \| B \cdot ((a_{ij})(B^{-1}\cdot) - (a^0_{ij})) \cdot B^T \|_{L^\infty(B_{c_0\,\varrho}(x_0))} \\ &\leq \| B \|^2 \| (a_{ij}) - (a^0_{ij}) \|_{L^\infty(B_\varrho(x_0))} \leq \| B \|^2 \ \varepsilon,\end{aligned}$$

für ein hinreichend kleines $c_0 = c_0(x_0) > 0$, für welches $B^{-1}(B_{c_0\,\varrho}(x_0)) \subset B_\varrho(x_0)$ gilt ($x_0 = 0$). Definieren wir nun weiter:
$\tilde{u}(x) := u(B^{-1}x)$, $\tilde{b}_i(x) := B_{ij}b_j(B^{-1}x)$, $\tilde{c}(x) := c(B^{-1}x)$ und $\tilde{f}(x) := f(B^{-1}x)$, für alle $x \in B_{c_0\,\varrho}(x_0)$, so sehen wir zunächst mittels der Kettenregel aus Proposition 5.17:

$$D^2\tilde{u}(x) = (B^{-1})^T \cdot D^2u(B^{-1}x) \cdot B^{-1} \qquad \text{und} \qquad \nabla\tilde{u}(x) = \nabla u(B^{-1}x) \cdot B^{-1} \quad \text{(als Zeile)}$$

und daher

$$\begin{aligned}(\tilde{L}\tilde{u})(x) &= \mathrm{Spur}((\tilde{a}_{ij}) \cdot D^2\tilde{u}))(x) + \langle \tilde{b}, \nabla\tilde{u}\rangle(x) + \tilde{c}\,\tilde{u}(x) \\ &= \mathrm{Spur}(B \cdot (a_{ij})(B^{-1}x) \cdot D^2u(B^{-1}x) \cdot B^{-1}) \\ &\quad + \langle B \cdot b(B^{-1}x), (B^T)^{-1} \cdot \nabla u(B^{-1}x)^T\rangle + (cu)(B^{-1}x) \\ = \mathrm{Spur}((a_{ij})(B^{-1}x) \cdot D^2u(B^{-1}x)) &+ \langle b(B^{-1}x), \nabla u(B^{-1}x)^T\rangle + (cu)(B^{-1}x) \\ &= (Lu)(B^{-1}x) = \tilde{f}(x)\end{aligned}$$

für $x \in B_{c_0\,\varrho}(x_0)$. Da die Matrix $(\tilde{a}_{ij})$ offenbar wieder elliptisch auf $B_{c_0\,\varrho}(x_0)$, mit eventuell kleinerer Elliptizitätskonstante $\tilde{\Lambda}(x_0) > 0$, ist und ausserdem die zusätzliche Bedingung (8.49) auf $B_{c_0\,\varrho}(x_0)$ wegen "$\| \tilde{a}_{ij} - \delta_{ij} \|_{L^\infty(B_{c_0\,\varrho}(x_0))} \leq \| B \|^2 \ \varepsilon$" erfüllt, dürfen wir das obige Zwischenresultat (8.55) auf $\tilde{u}$ auf $B_{\frac{c_0\,\varrho}{2}}(x_0)$ (anstatt auf $B_1(0)$) anwenden und erhalten nach geeigneter Skalierung von $\tilde{u}$:

$$\| \tilde{u} \|_{W^{2,p}(B_{\frac{c_0\,\varrho}{2}}(x_0))} \leq C(\tilde{\Lambda}(x_0), n, p, c_0(x_0), \varrho)(\ \| \tilde{f} \|_{L^p(B_{c_0\,\varrho}(x_0))} + \| \tilde{u} \|_{L^p(B_{c_0\,\varrho}(x_0))}\ ).$$

Da B invertierbar ist, existiert ein $\tilde{\varrho} = \tilde{\varrho}(x_0) > 0$, sodass der Ball $B_{\tilde{\varrho}}(x_0)$ in $B^{-1}(B_{\frac{c_0\,\varrho}{2}}(x_0))$ enthalten ist ($x_0 = 0$), und der Transformationssatz der Lebesgue-Theorie liefert schliesslich zusammen mit den obigen Beziehungen für die (schwachen) Ableitungen zwischen $\tilde{u}$ und u:

$$\| u \|_{W^{2,p}(B_{\tilde{\varrho}(x_0)}(x_0))} \leq C(\Lambda, \tilde{\Lambda}(x_0), n, p, c_0(x_0), \varrho)(\ \| f \|_{L^p(B_2(0)^+)} + \| u \|_{L^p(B_2(0)^+)}\ ).$$

Durch endliche Überdeckung von $\{x_n = 0\} \cap B_1(0)$ durch Bälle $B_{\tilde{\varrho}(x_0)}(x_0)$ folgt hieraus schliesslich die Existenz eines $c_0(\Lambda, \varrho(\epsilon)) > 0$, mit dem die gewünschte Randabschätzung

$$\| u \|_{W^{2,p}(B_1(0)\cap\{0<x_n<c_0(\Lambda,\varrho(\epsilon))\})} \leq C(\Lambda, n, p, \varrho(\epsilon))(\ \| f \|_{L^p(B_2(0)^+)} + \| u \|_{L^p(B_2(0)^+)}\ )$$

folgt. Da mit den inneren Abschätzungen (8.50) sofort

$$\| u \|_{W^{2,p}(B_1(0)\cap\{x_n>c_0(\Lambda,\varrho(\epsilon))\})} \leq C(\Lambda, n, p, \varrho(\epsilon))(\ \| f \|_{L^p(B_2(0)^+)} + \| u \|_{L^p(B_2(0)^+)}\ )$$

folgt, erhalten wir insgesamt also (8.51).

///

Satz 8.5 (Globale Calderon-Zygmund-Abschätzungen) *Es sei* $\Omega \subset\subset \mathbb{R}^n$ *offen mit* $\partial\Omega \in C^{1,1}, 1 < p < \infty$ *, und* L *ein linearer, elliptischer Differentialoperator in Nicht-Divergenzform, der (8.46) - (8.49) auf* Ω *erfüllt, mit* $\varepsilon = \varepsilon(\Omega, \Lambda, n, p) > 0$ *genügend klein. Dann gilt für* $u, \varphi \in W^{2,p}(\Omega), f \in L^p(\Omega)$ *mit*

$$Lu = f \quad \textit{fast überall in } \Omega,$$

$$u = \varphi \quad \textit{auf } \partial\Omega,$$

daß

$$\| u \|_{W^{2,p}(\Omega)} \leq C(\Omega, \Lambda, n, p, \varrho(\varepsilon))(\| f \|_{L^p(\Omega)} + \| \varphi \|_{W^{2,p}(\Omega)} + \| u \|_{L^p(\Omega)}). \tag{8.56}$$

Beweis:
Wir können $\varphi = 0$ annehmen.
Wir betrachten $x_0 \in \partial\Omega$. Da $\partial\Omega \in C^{1,1}$, können wir $\partial\Omega$ in einer Umgebung $U(x_0)$ mit einem $C^{1,1}-$Diffeomorphismus Ψ glattbiegen, und

$$\tilde{u} := u \circ \Psi^{-1} \in W^{2,p}(B_2(0)^+)$$

erfüllt

$$\tilde{u} = 0 \quad \text{auf } \{x_n = 0\} \cap B_2(0).$$

Betrachten wir wie im Beweis von Satz 7.3 den Differentialoperator $\tilde{L}$ mit Koeffizienten

$$\tilde{a}_{kl} := (a_{ij}\partial_i\Psi_k\partial_j\Psi_l) \circ \Psi^{-1},$$
$$\tilde{b}_k := (a_{ij}\partial_{ij}\Psi_k + b_i\partial_i\Psi_k) \circ \Psi^{-1},$$
$$\tilde{c} := c \circ \Psi^{-1} \in L^\infty(B_2(0)^+),$$

und

$$\tilde{f} := f \circ \Psi^{-1} \in L^p(B_2(0)^+),$$

so gilt

$$\tilde{L}\tilde{u} = \tilde{f} \quad \text{in } B_2(0)^+.$$

Weiter erfüllt $\tilde{L}$ (8.46) - (8.49) mit $\Lambda, \varrho, \varepsilon$ ersetzt durch $C(\Lambda, \Psi, n), c_0(\Psi)\varrho, C_0(\Psi, \Lambda)\varepsilon$. Setzen wir

$$V(x_0) := \Psi^{-1}(B_1(0)),$$

so erhalten wir aus den Calderon-Zygmund-Abschätzungen (8.51) am Rand, daß

$$\begin{aligned} \| u \|_{W^{2,p}(V(x_0)\cap\Omega)} &\leq C(\Psi, n, p) \| \tilde{u} \|_{W^{2,p}(B_1(0)^+)} \leq \\ \leq C(\Psi, \Lambda, n, p, \varrho(\varepsilon))(\| \tilde{f} \|_{L^p(B_2(0)^+)} &+ \| \tilde{u} \|_{L^p(B_2(0)^+)}) \leq \\ \leq C(\Psi, \Lambda, n, p, \varrho(\varepsilon))(\| f \|_{L^p(\Omega)} &+ \| u \|_{L^p(\Omega)}). \end{aligned} \tag{8.57}$$

Genauso erhalten wir mit Satz 8.4 für jedes $x_0 \in \Omega$ eine Umgebung $V(x_0) \subseteq \Omega$ mit

$$\| u \|_{W^{2,p}(V(x_0))} \leq C(\Lambda, d(x_0, \partial\Omega), n, p, \varrho(\varepsilon))(\| f \|_{L^p(\Omega)} + \| u \|_{L^p(\Omega)}). \tag{8.58}$$

Da $\overline{\Omega}$ kompakt ist, existieren endlich viele $x_1, \ldots, x_N \in \overline{\Omega}$ mit

$$\overline{\Omega} \subseteq V(x_1) \cap \ldots \cup V(x_N),$$

und (8.56) folgt aus (8.57) und (8.58).

$///$

Die Eindeutigkeit von starken Lösungen aus $W^{2,p}$ für das Dirichletproblem mit $c \leq 0$ folgt für $p \geq n$ aus dem Eindeutigkeitsatz 8.2, bzw. dem Alexandroff'schen Maximumprinzip, Satz 8.1. Für $1 < p < n$ brauchen wir zuerst ein Regularitätsresultat.

Satz 8.6 *Es sei* $\Omega \subset\subset \mathbb{R}^n$ *offen,* $1 < p, q < \infty$ *, und* L *ein linearer, elliptischer Differentialoperator in Nicht-Divergenzform, der (8.46) - (8.49) auf* Ω *erfüllt, mit* $\varepsilon = \varepsilon(\Lambda, n, p, q) > 0$ *und* $f \in L^p(\Omega)$ *.*

Für eine starke Lösung $u \in W^{2,q}(\Omega)$ *von*

$$Lu = f \quad in\ \Omega$$

folgt dann $u \in W^{2,p}_{loc}(\Omega)$ *. Ist weiter* $\partial\Omega \in C^{1,1}, \varepsilon = \varepsilon(\Omega, \Lambda, n, p, q) > 0$ *und*

$$u = \varphi \quad auf\ \partial\Omega$$

für ein $\varphi \in W^{2,p}(\Omega)$ *, so folgt* $u \in W^{2,p}(\Omega)$ *.*

Bweis:
Es genügt $p > q$ zu betrachten. Wir betrachten $x_0 \in \Omega$ und

$$B_{\varrho_0}(x_0) \subset\subset \Omega$$

mit $0 < \varrho_0 < \varrho$. Also existiert mit (8.49) ein symmetrisches, elliptisches $(a^0_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit

$$\| a_{ij} - a^0_{ij} \|_{L^\infty(B_{\varrho_0}(x_0))} \leq \varepsilon.$$

Wir wählen $\eta \in C^\infty_0(B_{\varrho_0}(x_0))$ mit $\eta \equiv 1$ auf $B_{\varrho_0/2}(x_0)$. Wir setzen

$$v := u\eta \in W^{2,q}_0(B_{\varrho_0}(x_0))$$

und sehen

$$L_0 v := a^0_{ij}\partial_{ij} v = (a^0_{ij} - a_{ij})\partial_{ij} v + g \quad \text{in } \mathbb{R}^n, \tag{8.59}$$

wobei

$$\begin{aligned} g := a_{ij}\,\partial_{ij} v = L(v) - b_i\,\partial_i v - cv \\ = \eta L(u) + 2a_{ij}\,\partial_i u\,\partial_j \eta + u\,a_{ij}\partial_{ij}\eta + u\,b_i\partial_i\eta - b_i\,\eta\partial_i u - b_i\,\partial_i\eta\,u - cu\eta \\ = \eta f - \eta\,b_i\,\partial_i u - \eta c u + 2a_{ij}\partial_i u\,\partial_j\eta + u\,a_{ij}\partial_{ij}\eta. \end{aligned} \tag{8.60}$$

Aus $u \in W^{2,q}(\Omega)$ folgt mit dem Sobolev-Einbettungssatz, Satz 5.3:

$$u \in W^{1,nq/(n-1)}_{loc}(\Omega),$$

also zusammen mit (8.47) $g \in L^r(B_{\varrho_0}(x_0))$ für

$$r := \min(p, nq/(n-1)) \in]q, p]. \tag{8.61}$$

Wie im Beweis der Rand-Abschätzungen (8.51) in Satz 8.4 können wir anhand einer Translation, die x_0 auf 0 verschiebt, und anhand einer linearen, invertierbaren Transformation B des $\mathbb{R}^n$, die gerade $B \cdot (a^0_{ij}) \cdot B^T = (\delta_{ij})$ erfüllt, o.B.d.A. $x_0 = 0$ und

$$\begin{aligned} a^0_{ij} &= \delta_{ij}, \\ v &\in W^{2,q}_0(B_{\varrho(\Lambda)}(0)), \\ \| a_{ij} - \delta_{ij} \|_{L^\infty(B_{\varrho(\Lambda)}(0))} &\leq C(\Lambda)\varepsilon \end{aligned} \tag{8.62}$$

für ein hinreichend kleines $\varrho(\Lambda) > 0$ annehmen. Approximiert man $v \in W^{2,q}_0(B_{\varrho(\Lambda)})$ mittels einer Funktionen-Folge $\{v_j\} \subset C^\infty_0(B_{\varrho(\Lambda)})$ in der $W^{2,q}(B_{\varrho(\Lambda)})-$Norm, so liefert die Green'sche Darstellungsformel (2.10): $N(\triangle v_j) = v_j$ auf $B_{\varrho(\Lambda)}$ und somit im Limes: $N(\triangle v) = v$ auf $B_{\varrho(\Lambda)}$ anhand der Stetigkeit des Newton-Potentials $N : L^q(B_{\varrho(\Lambda)}) \to L^q(B_{\varrho(\Lambda)})$, nach Lemma 2.2. Mittels (8.59) folgt also anhand von $a^0_{ij} = \delta_{ij}$:

$$v = N(\triangle v) = N(L_0(v)) = N((\delta_{ij} - a_{ij})\partial_{ij} v) + N(g). \tag{8.63}$$

Nach Lemmata 2.2, 5.26 und 8.6 ist

$$N : L^s(B_{\varrho(\Lambda)}) \to W^{2,s}(B_{\varrho(\Lambda)}) \tag{8.64}$$

eine stetige, lineare Abbildung für alle $1 < s < \infty$, insbesondere ist

$$Ng \in W^{2,r}(B_{\varrho(\Lambda)}) \subseteq W^{2,q}(B_{\varrho(\Lambda)}). \tag{8.65}$$

Wir definieren den nach Lemma 8.6 linearen, stetigen Operator $T : W^{2,s}(B_{\varrho(\Lambda)}) \to W^{2,s}(B_{\varrho(\Lambda)})$ durch

$$Tw := N((\delta_{ij} - a_{ij})\partial_{ij} w),$$

und (8.63) schreibt sich als Fixpunktgleichung

$$v = Tv + Ng. \tag{8.66}$$

Für $s = q, r$ erhalten wir mit (8.62) und (8.64)

$$\begin{aligned} \| Tw \|_{W^{2,s}(B_{\varrho(\Lambda)})} &\leq \| N \|_{L(L^s(B_{\varrho(\Lambda)}), W^{2,s}(B_{\varrho(\Lambda)}))} \| (a_{ij} - \delta_{ij})\partial_{ij} w \|_{L^s(B_{\varrho(\Lambda)})} \leq \\ &\leq C(\Lambda, n, s) \| (a_{ij} - \delta_{ij})\partial_{ij} w \|_{L^s(B_{\varrho(\Lambda)})} \leq C(\Lambda, n, p, q)\varepsilon \| w \|_{W^{2,s}(B_{\varrho(\Lambda)})}, \end{aligned}$$

und für $\varepsilon = \varepsilon(\Lambda, n, p, q)$ genügend klein

$$\| T \| \leq \frac{1}{2}.$$

Wegen (8.65) hat die Abbildung $w \to T(w) + N(g)$ nach dem Banachschen Fixpunktsatz einen eindeutigen Fixpunkt in $W^{2,s}(B_{\varrho(\Lambda)})$ für $s = q, r$, d.h. (8.66) hat jeweils eine eindeutige Lösung v_s in $W^{2,s}(B_{\varrho(\Lambda)})$, für $s = q, r$. Da $v \in W^{2,q}(B_{\varrho(\Lambda)})$ (8.66) erfüllt, folgt aus der Eindeutigkeit des Fixpunktes v_q in $W^{2,q}(B_{\varrho(\Lambda)})$:

$$v = v_q.$$

Da andererseits $v_r \in W^{2,r}(B_{\varrho(\Lambda)})$ auch (8.66) erfüllt und $W^{2,r}(B_{\varrho(\Lambda)})$ in $W^{2,q}(B_{\varrho(\Lambda)})$ enthalten ist, folgt wieder aus der Eindeutigkeit der Lösung von (8.66) in $W^{2,q}(B_{\varrho(\Lambda)})$:

$$v = v_q = v_r \in W^{2,r}(B_{\varrho(\Lambda)}).$$

Anhand der Definition von r folgt hieraus wie oben mit dem Sobolev-Einbettungssatz, Satz 5.3, mit $\frac{n}{n-1}\,q$ anstatt q: $v \in W^{1,\left(\frac{n}{n-1}\right)^2 q}(B_{\varrho(\Lambda)})$ und somit $u \in W^{1,\left(\frac{n}{n-1}\right)^2 q}(B_{\varrho_0/2}(x_0))$ und $g \in L^{r_2}(B_{\varrho_0/2}(x_0))$ wegen (8.60), mit

$$r_2 := \min(p, (\frac{n}{n-1})^2\, q).$$

Obige Argumentation kann somit mittels

$$r_l := \min(p, (\frac{n}{n-1})^l\, q)$$

beliebig häufig wiederholt werden, bis nach endlich vielen, also $N \in \mathbb{N}$, Schritten $r_N = p$ erreicht ist. Hieraus folgt:

$$u \in W^{2,p}(B_{\frac{\varrho_0}{2^N}}(x_0))$$

und somit

$$u \in W^{2,p}_{loc}(\Omega). \tag{8.67}$$

Im Fall mit Rand können wir, da $\partial\Omega \in C^{1,1}$, für $x_0 \in \partial\Omega$ lokal die Situation

$$\Omega \cap B_2(0) = B_2(0)^+,$$

$$\| a_{ij} - \delta_{ij} \|_{L^\infty(B_2(0)^+)} \leq \varepsilon$$

und $\varphi = 0$ annehmen, also

$$Lu = f \quad \text{in } B_2(0)^+,$$

$$u = 0 \quad \text{auf } \{x_n = 0\} \cap B_2(0).$$

Wir setzen u ungerade, also mittels E_- aus (5.28), auf $B_2(0)$ fort, genauer setzen wir für $(y,t) \in B_2(0)^-$:

$$u(y,t) := -u(y,-t),$$

$$a_{ij}(y,t) := (-1)^{\lfloor \frac{i}{n} \rfloor + \lfloor \frac{j}{n} \rfloor} a_{ij}(y,-t),$$

$$b_i(y,t) := (-1)^{\lfloor \frac{i}{n} \rfloor} b_i(y,-t),$$

$$c(y,t) := c(y,-t),$$

$$f(y,t) := -f(y,-t).$$

Mit Proposition 5.25 sehen wir:

$$u \in W^{2,q}(B_2(0)),$$

$$L \text{ erfüllt } (8.46) - (8.48) \text{ in } B_2(0),$$

$$\| a_{ij} - \delta_{ij} \|_{L^\infty(B_2(0))} \leq \varepsilon,$$

$$f \in L^p(B_2(0)),$$

$$Lu = f \quad \text{auf } B_2(0).$$

Mit dem bereits bewiesenen Resultat folgt $u \in W^{2,p}(B_1(0))$, also insgesamt $u \in W^{2,p}(\Omega)$.

///

Mit den globalen Calderon-Zygmund-Abschätzungen erhalten wir nun Existenz starker Lösungen für das Dirichletproblem.

Satz 8.7 (Existenz starker Lösungen für das Dirichletproblem) *Es sei* $\Omega \subset\subset \mathbb{R}^n$ *offen mit* $\partial\Omega \in C^{1,1}, 1 < p < \infty$ *, und* L *ein linearer, elliptischer Differentialoperator in Nicht-Divergenzform, der (8.46) - (8.48) auf* Ω *erfüllt, und* $a_{ij} \in C^0(\overline{\Omega})$ *und* $c \leq 0$ *. Dann existiert für* $\varphi \in W^{2,p}(\Omega)$ *und* $f \in L^p(\Omega)$ *genau eine starke Lösung* $u \in W^{2,p}(\Omega)$ *des Dirichletproblems*

$$\begin{aligned} Lu = f \quad &\textit{fast überall in } \Omega, \\ u = \varphi \quad &\textit{auf } \partial\Omega. \end{aligned} \tag{8.68}$$

Weiter gilt

$$\| u \|_{W^{2,p}(\Omega)} \leq C(\Omega, \Lambda, p, \omega)(\| f \|_{L^p(\Omega)} + \| \varphi \|_{W^{2,p}(\Omega)}), \tag{8.69}$$

wobei ω *ein Stetigkeitsmodul für* (a_{ij}) *ist.*

Beweis:
Seien $u_1, u_2 \in W^{2,p}(\Omega)$ zwei Lösungen von (8.68), so erfüllt $u := u_2 - u_1 \in W^{2,p}(\Omega)$

$$\begin{aligned} Lu = 0 \quad &\text{fast überall in } \Omega, \\ u = 0 \quad &\text{auf } \partial\Omega. \end{aligned}$$

Mit Satz 8.6 und Bemerkung 8.8 folgt

$$u \in W^{2,n}(\Omega),$$

mit Einbettungssatz in Hölderräume, Satz 5.4, $u \in C^0(\overline{\Omega})$ und mit Proposition 5.20

$$u = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega$$

klassisch. Da $c \leq 0$, folgt mit dem Eindeutigkeitssatz Satz 8.2, daß $u = 0$, also $u_1 = u_2$, und es gibt höchstens eine Lösung von (8.68).
Zur Existenz können wir $\varphi = 0$ annehmen. Zuerst zeigen wir (8.69). Angenommen (8.69) gilt nicht, so gibt es L_m , die (8.46) - (8.48) erfüllen und ω ein Stetigkeitsmodul für $a_{ij,m}$, und $u_m \in W^{2,p}(\Omega)$ mit $u_m = 0$ auf $\partial\Omega$ und

$$\| L_m u_m \|_{L^p(\Omega)} < \frac{1}{m} \| u_m \|_{W^{2,p}(\Omega)} .$$

Mit den globalen Calderon-Zygmund-Abschätzungen, Satz 8.5, folgt

$$\| u_m \|_{W^{2,p}(\Omega)} \leq C(\Omega, \Lambda, n, p, \omega)(\| L_m u_m \|_{L^p(\Omega)} + \| u_m \|_{L^p(\Omega)}),$$

also für $m \geq 2C(\Omega, \Lambda, n, p, \omega)$

$$\| u_m \|_{W^{2,p}(\Omega)} \leq C(\Omega, \Lambda, n, p, \omega) \| u_m \|_{L^p(\Omega)} .$$

Nehmen wir zusätzlich $\| u_m \|_{L^p(\Omega)} = 1$ an, so folgt

$$\| L_m u_m \|_{L^p(\Omega)} \to 0, \tag{8.70}$$

und u_m ist beschränkt in $W^{2,p}(\Omega)$. Für eine Teilfolge $m \to \infty$ konvergiert

$$u_m \to u \quad \text{schwach in } W^{2,p}(\Omega), \text{ stark in } W^{1,p}(\Omega),$$

insbesondere

$$\| u \|_{L^p(\Omega)} = 1 \quad \text{und} \quad u = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega. \tag{8.71}$$

Da $a_{ij,m}$ einen gemeinsamen Stetigkeitsmodul haben, konvergiert für eine weitere Teilfolge $m \to \infty$

$$a_{ij,m} \to a_{ij} \quad \text{stark in } C^0(\overline{\Omega}),$$

$$b_{i,m}, c_m \to b_i, c \quad \text{schwach in } L^q(\Omega) \text{ für alle } 1 \leq q < \infty.$$

Damit erfüllt L mit Koeffizienten a_{ij}, b_i, c (8.46) - (8.48), und $a_{ij} \in C^0(\overline{\Omega})$.
Aus (8.70) folgt $Lu = 0$ fast überall in Ω , und mit dem Eindeutigkeitsresultat folgt $u \equiv 0$ im Widerspruch zu (8.71), und somit ist (8.69) bewiesen.
Zur Existenz nehmen wir zuerst $L, f \in C^\infty(\overline{\Omega})$ an und schreiben in Divergenzform

$$L_d v = \partial_i(a_{ij}\partial_j v) + (b_i - \partial_j a_{ji})\partial_i v + cv = a_{ij}\partial_{ij} v + b_i \partial_i v + cv = Lv.$$

Da $c \leq 0$, existiert mit Satz 6.2 eine schwache Lösung $u \in W^{1,2}(\Omega)$ von

$$L_d u = f \quad \text{in } \Omega,$$
$$u = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega.$$

Da $f \in L^2(\Omega)$ und $\partial\Omega \in C^{1,1}$, folgt mit dem Satz von Friedrichs 6.4, daß

$$u \in W^{2,2}(\Omega)$$

ist, und mit (6.33) ist u eine starke Lösung von (8.68). Da $f \in L^p(\Omega), \partial\Omega \in C^{1,1}$, folgt mit Satz 8.6 auch $u \in W^{2,p}(\Omega)$.
Allgemeines L, f approximieren wir mit $L^m, f^m \in C^\infty(\overline{\Omega})$ mit

$$\begin{aligned} a_{ij}^m &\to a_{ij} \quad \text{stark in } C^0(\overline{\Omega}), \\ b_i^m, c^m &\to b_i, c \quad \text{stark in } L^q(\Omega) \text{ für alle } 1 \leq q < \infty, \\ f^m &\to f \quad \text{stark in } L^p(\Omega), \end{aligned} \tag{8.72}$$

und L^m erfüllt (8.46) - (8.48) für 2Λ , und a_{ij}^m, a_{ij} haben einen gemeinsamen Stetigkeitsmodul ω_0 . Nach dem oben Bewiesenen existieren $u^m \in W^{2,p}(\Omega)$ mit

$$L^m(u^m) = f^m \quad \text{fast überall in } \Omega,$$
$$u^m = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega,$$

und mit (8.69) gilt

$$\| u^m \|_{W^{2,p}(\Omega)} \leq C(\Omega, \Lambda, n, p, \omega_0) \| f^m \|_{L^p(\Omega)},$$

für jedes m. Für eine Teilfolge $m \to \infty$ konvergiert somit

$$u^m \to u \quad \text{schwach in } W^{2,p}(\Omega), \text{ stark in } W^{1,p}(\Omega),$$

woraus insbesondere $u \equiv 0$ auf $\partial\Omega$ folgt. Zusammen mit den Konvergenzen in (8.72) folgt:

$$L^m(u^m) \to L(u) \quad \text{schwach in } L^1(\Omega).$$

Testen wir hierbei mit Funktionen aus $C_0^\infty(\Omega)$, so folgt hieraus mittels des Fundamentallemmas der Variationsrechnung:

$$Lu = f \quad \text{fast überall in } \Omega,$$

und $u \in W^{2,p}(\Omega)$ ist eine starke Lösung von (8.68).

///

Schließlich zeigen wir, daß starke Lösungen so regulär sind wie die Daten.

Satz 8.8 *Es sei* $\Omega \subset\subset \mathbb{R}^n$ *offen,* $1 < p < \infty$ *, und* L *ein linearer, elliptischer Differentialoperator in Nicht-Divergenzform, der (8.46), (8.48) auf* Ω *erfüllt,* $k \geq 1$ *und*

$$\| a_{ij}, b_i, c \|_{C^{k-1,1}(\Omega)} \leq \Lambda \tag{8.73}$$

und $f \in W^{k,p}(\Omega)$ *.*

Für eine starke Lösung $u \in W^{2,q}(\Omega), 1 < q < \infty$ *von*

$$Lu = f \quad \textit{fast überall in } \Omega$$

gilt dann $u \in W^{k+2,p}_{loc}(\Omega)$ *und für* $\Omega' \subset\subset \Omega$

$$\| u \|_{W^{k+2,p}(\Omega')} \leq C(\Omega, \Omega', \Lambda, n, p, k)(\| f \|_{W^{k,p}(\Omega)} + \| u \|_{L^p(\Omega)}) \tag{8.74}$$

Ist weiter $\partial\Omega \in C^{k+1,1}$ *und*

$$u = \varphi \quad \textit{auf } \partial\Omega$$

mit $\varphi \in W^{k+2,p}(\Omega)$ *, so gilt* $u \in W^{k+2,p}(\Omega)$ *und*

$$\begin{aligned} &\| u \|_{W^{k+2,p}(\Omega)} \leq \\ &\leq C(\Omega, \Lambda, n, p, k)(\| f \|_{W^{k,p}(\Omega)} + \| \varphi \|_{W^{k+2,p}(\Omega)} + \| u \|_{L^p(\Omega)}). \end{aligned} \tag{8.75}$$

Beweis:
Wieder können wir $\varphi = 0$ annehmen. Für $k = 0$ mit $C^{-1,1}(\Omega)$ ersetzt durch $C^0(\overline{\Omega})$ für a_{ij} und durch $L^\infty(\Omega)$ für b_i, c ist die die Regularitätsaussage wie in Satz 8.6, und die Abschätzungen folgen aus den Calderon-Zygmund-Abschätzungen, Sätze 8.4, 8.5, und der Bemerkung 8.8.

Wir nehmen an, daß obige Aussage für $0, \ldots, k-1$ bereits gelten. Daher erhalten wir $u \in W^{k+1,p}_{loc}(\Omega)$ und für $\Omega' \subset\subset \Omega'' \subset\subset \Omega''' \subset\subset \Omega$

$$\| u \|_{W^{k+1,p}(\Omega''')} \leq C(\Omega, \Omega''', \Lambda, n, p, k)(\| f \|_{W^{k-1,p}(\Omega)} + \| u \|_{L^p(\Omega)}), \tag{8.76}$$

bzw. im Fall mit Rand $u \in W^{k+1,p}(\Omega)$ und

$$\| u \|_{W^{k+1,p}(\Omega)} \leq C(\Omega, \Lambda, n, p, k)(\| f \|_{W^{k-1,p}(\Omega)} + \| u \|_{L^p(\Omega)}). \tag{8.77}$$

Dabei beachten wir, daß der Stetigkeitsmodul von a_{ij} bereits für $k = 1$ durch die Annahme

$$\| a_{ij} \|_{C^{0,1}(\Omega)} \leq \Lambda$$

gegeben ist.
Wie im Beweis von Satz 6.5 vereinfachen wir die Differentialgleichung zu

$$L_0 u := a_{ij}\partial_{ij} u = f - b_i \partial_i u - cu =: \hat{f} \quad \text{fast überall in } \Omega. \tag{8.78}$$

Wir sehen, dass aus (8.73) und (8.76) $\hat{f} \in W^{k,p}(\Omega''')$ mit

$$\begin{aligned} \| \hat{f} \|_{W^{k,p}(\Omega''')} &\leq C(\Lambda, n, p, k)(\| f \|_{W^{k,p}(\Omega''')} + \| u \|_{W^{k+1,p}(\Omega''')}) \leq \\ &\leq C(\Omega, \Omega''', \Lambda, n, p, k)(\| f \|_{W^{k,p}(\Omega)} + \| u \|_{L^p(\Omega)}), \end{aligned} \tag{8.79}$$

folgt, bzw. dass im Fall mit Rand aus (8.73) und (8.77) $\hat{f} \in W^{k,p}(\Omega)$ mit

$$\| \hat{f} \|_{W^{k,p}(\Omega)} \leq C(\Omega, \Lambda, n, p, k)(\| f \|_{W^{k,p}(\Omega)} + \| u \|_{L^p(\Omega)}) \tag{8.80}$$

folgt. Wir fixieren $l = 1, \ldots, n$ und $h \in \mathbb{R}$ mit $0 < |h| < d(\Omega'', \partial\Omega''')$, definieren $\bar{u}(x) := u(x + he_l)$ und die endliche Differenz $\partial_l^h u$ wie in (5.11) und rechnen:

$$L_0(\partial_l^h u) = \partial_l^h \hat{f} - (\partial_l^h a_{ij})\partial_{ij}\bar{u} =: f_l^h \quad \text{fast überall in } \Omega''. \tag{8.81}$$

Mit (8.73), (8.76) und (8.79) gilt

$$\begin{aligned} \| f_l^h \|_{W^{k-1,p}(\Omega'')} &\leq \| \hat{f} \|_{W^{k,p}(\Omega''')} + C_n \| \partial_l^h a_{ij} \|_{W^{k-1,\infty}(\Omega)} \| u \|_{W^{k+1,p}(\Omega''')} \leq \\ &\leq C(\Omega, \Omega''', \Lambda, n, p, k)(\| f \|_{W^{k,p}(\Omega)} + \| u \|_{L^p(\Omega)}). \end{aligned} \tag{8.82}$$

Aus (8.81) folgt mit (8.74) für $k-1$ und (8.76), (8.82), daß $\partial_l^h u \in W^{k+1,p}_{loc}(\Omega'')$ und

$$\begin{aligned} \| \partial_l^h u \|_{W^{k+1,p}(\Omega')} &\leq C(\Omega'', \Omega', \Lambda, n, p, k)(\| f_l^h \|_{W^{k-1,p}(\Omega'')} + \| \partial_l^h u \|_{L^p(\Omega'')}) \leq \\ &\leq C(\Omega, \Omega', \Lambda, n, p, k)(\| f \|_{W^{k,p}(\Omega)} + \| u \|_{L^p(\Omega)}). \end{aligned} \tag{8.83}$$

Da wir $u \in W^{k+1,p}_{loc}(\Omega) \subseteq W^{k+1,p}(\Omega''')$ bereits wissen, konvergiert $\partial_l^h u \to \partial_l u$ stark in $W^{k,p}(\Omega')$ für $h \to 0$ nach (5.13). Dann folgt mit (8.83) $\partial_l u \in W^{k+1,p}_{loc}(\Omega)$, also $u \in W^{k+2,p}_{loc}(\Omega)$, und auch die behauptete innere A-priori-Abschätzung (8.74) für k .

Im Fall mit Rand können wir den Rand mit einem $C^{k+1,1}-$Diffeomorphismus Ψ glattbiegen, und, da

$$\| v \|_{W^{k+2,p}(V)} \asymp \| v \circ \Psi^{-1} \|_{W^{k+2,p}(\Psi(V))}$$

mit einer von Ψ, n, p und k abhängigen Konstanten, genügt es lokal

$$\Omega \cap B_2(0) = B_2(0)^+$$

zu betrachten.
Da wir $u \in W^{k+2,p}_{loc}(\Omega) \cap W^{k+1,p}(\Omega)$ bereits wissen, folgt aus (8.78) für $l = 1, \dots, n$

$$L_0(\partial_l u) = \partial_l \hat{f} - (\partial_l a_{ij}) \partial_{ij} u =: f_l \quad \text{fast überall in } B_2(0)^+ \tag{8.84}$$

und mit (8.77) und (8.80)

$$\begin{gathered} \| f_l \|_{W^{k-1,p}(B_2(0)^+)} \leq \| \hat{f} \|_{W^{k,p}(\Omega)} + C_n \| \partial_l a_{ij} \|_{W^{k-1,\infty}(\Omega)} \| u \|_{W^{k+1,p}(\Omega)} \leq \\ \leq C(\Omega, \Lambda, n, p, k)(\| f \|_{W^{k,p}(\Omega)} + \| u \|_{L^p(\Omega)}). \end{gathered} \tag{8.85}$$

Wir wählen

$$B_{4/3}(0)^+ \subseteq \Omega_0 \subseteq B_{5/3}(0)^+$$

mit $\partial\Omega_0 \in C^\infty$ und $\eta \in C_0^\infty(B_{4/3}(0))$ mit $\eta \equiv 1$ auf $B_1(0)$. Mit Proposition 5.24 und Definition 5.5 folgt $\eta \partial_l u \in W_0^{1,p}(\Omega_0)$ für $l = 1, \dots, n-1$ und mit (8.84), da $u \in W^{k+2,p}_{loc}(B_2(0)^+), a_{ij} \in C^{k-1,1}(B_2(0)^+) = W^{k,\infty}(B_2(0)^+)$,

$$\begin{gathered} L_0(\eta \partial_l u) = a_{ij} \partial_{ij} (\eta \partial_l u) = \\ = \eta f_l + 2 a_{ij} \partial_i \eta \partial_{jl} u + a_{ij} \partial_{ij} \eta \partial_l u =: f_{l,\eta} \quad \text{fast überall in } B_2(0)^+, \end{gathered} \tag{8.86}$$

wobei

$$\| f_{l,\eta} \|_{W^{k-1,p}(B_2(0)^+)} \leq C(\Omega, \Lambda, n, p, k)(\| f \|_{W^{k,p}(\Omega)} + \| u \|_{L^p(\Omega)})$$

mit (8.77) und (8.85). Bei Beachtung von $\eta \partial_l u \in W_0^{1,p}(\Omega_0)$ folgt aus (8.86) und (8.75) für $k-1$ und (8.77), daß $\eta \partial_l u \in W^{k+1,p}(\Omega_0)$ und

$$\begin{gathered} \| \partial_l u \|_{W^{k+1,p}(B_1(0)^+)} \leq \| \eta \partial_l u \|_{W^{k+1,p}(\Omega_0)} \leq \\ \leq C(\Lambda, n, p, k)(\| f_{l,\eta} \|_{W^{k-1,p}(\Omega_0)} + \| \eta \partial_l u \|_{L^p(\Omega_0)}) \leq \\ \leq C(\Omega, \Lambda, n, p, k)(\| f \|_{W^{k,p}(\Omega)} + \| u \|_{L^p(\Omega)}), \end{gathered}$$

insbesondere

$$\| \partial_{ij} u \|_{W^{k,p}(B_1(0)^+)} \leq C(\Omega, \Lambda, n, p, k)(\| f \|_{W^{k,p}(\Omega)} + \| u \|_{L^p(\Omega)}) \quad \text{für } (i,j) \neq (n,n), \tag{8.87}$$

da wir $u \in W^{k+2,p}_{loc}(\Omega)$ bereits wissen. Schließlich erhalten wir mittels (6.23) aus Satz 6.3, hier angewandt auf (8.78), daß

$$\partial_{nn} u = a_{nn}^{-1}(- \sum_{(i,j) \neq (n,n)} a_{ij} \partial_{ij} u + \hat{f}) \quad \text{in } B_2(0)^+,$$

also zusammen mit $\| a_{ij} \|_{C^{k-1,1}(\Omega)} \leq \Lambda$, der Elliptizitäts-Voraussetzung (8.48), (8.80) und (8.87):

$$\| \partial_{nn} u \|_{W^{k,p}(B_1(0)^+)} \leq C(\Omega, \Lambda, n, p, k)(\| f \|_{W^{k,p}(\Omega)} + \| u \|_{L^p(\Omega)}).$$

Zusammen mit (8.87) und (8.77) folgt $u \in W^{k+2,p}(B_1(0)^+)$ und

$$\| u \|_{W^{k+2,p}(B_1(0)^+)} \leq C(\Omega, \Lambda, n, k)(\| f \|_{W^{k,p}(\Omega)} + \| u \|_{L^p(\Omega)}). \tag{8.88}$$

Überdeckt man $\partial\Omega$ mit endlich vielen Bällen, so folgt $u \in W^{k+2,p}(\Omega)$, und (8.75) (für k) folgt aus (8.74) und (8.88).

///

Teil III
Harnack-Ungleichung

9 Harnack-Ungleichung für Gleichungen in Divergenzform

Die Harnack-Ungleichung wurde 1961 von Moser für Gleichungen der Form

$$\partial_i(a_{ij}\partial_j u) = 0$$

bewiesen. Dies wurde 1964 von Serrin und 1967 von Trudinger auf allgemeinere Gleichungen in Divergenzform erweitert. Wir beweisen die Harnack-Ungleichung hier nur für lineare Gleichungen und folgen der Darstellung [GT] in §8, in der der Beweis in die schwache Harnack-Ungleichung und lokale Maximum-Abschätzungen zerlegt wird.

Wir betrachten die lineare, elliptische Differentialgleichung in Divergenzform auf $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen

$$Lu := \partial_i(a_{ij}\partial_j u + b_i u) + c_i \partial_i u + du = f + div\ g \tag{9.1}$$

mit

$$\begin{aligned} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq \Lambda^{-1}|\xi|^2 \quad & \text{für } \mathcal{L}^n\text{-fast alle } x \in \Omega, \\ & \text{für alle } \xi \in \mathbb{R}^n, \end{aligned} \tag{9.2}$$

$a_{ij}, b_i, c_i, d \in L^\infty(\Omega)$

$$\begin{aligned} \| a_{ij} \|_{L^\infty(\Omega)} &\leq \Lambda, \\ \| |b_i| + |c_i| + |d|^{1/2} \|_{L^\infty(\Omega)} &\leq \Gamma, \end{aligned} \tag{9.3}$$

für ein $1 \leq \Lambda, \Gamma < \infty$ und $g \in L^q(\Omega), f \in L^{q/2}(\Omega)$ für ein $q > n, 2$ und $\delta := 1 - n/q > 0$.

Für Lösungen, Ober- und Unterlösungen u von (9.1) werden die essentiellen Suprema bzw. Infima, im folgenden kurz mit $\sup u$ und $\inf u$ bezeichnet, gegen unterschiedliche L^p-Normen abgeschätzt, wie die folgenden 3 Sätze aussagen.

Satz 9.1 (Harnack-Ungleichung) *$u \in W^{1,2}(B_{2\varrho}(0))$ sei eine nicht-negative, schwache Lösung von (9.1)*

$$\partial_i(a_{ij}\partial_j u + b_i u) + c_i \partial_i u + du = f + div\ g \quad \text{in } B_{2\varrho}(0),$$

mit (9.2), (9.3). Dann gilt

$$\sup_{B_\varrho(0)} u \leq C\Big(\inf_{B_\varrho(0)} u + \varrho^{2\delta} \| f \|_{L^{q/2}(B_{2\varrho}(0))} + \varrho^\delta \| g \|_{L^q(B_{2\varrho}(0))}\Big) \tag{9.4}$$

mit $C = C(n, \Lambda, \Gamma\varrho, q)$.

□

Satz 9.2 (Schwache Harnack-Ungleichung) *$u \in W^{1,2}(B_{2\varrho}(0))$ sei eine nicht-negative, schwache Oberlösung von (9.1)*

$$\partial_i(a_{ij}\partial_j u + b_i u) + c_i \partial_i u + du \leq f + div\ g \quad \text{in } B_{2\varrho}(0),$$

mit (9.2), (9.3). Dann gilt

$$\varrho^{-n/p} \parallel u \parallel_{L^p(B_\varrho(0))} \leq C\Big(\inf_{B_\varrho(0)} u + \varrho^{2\delta} \parallel f \parallel_{L^{q/2}(B_{2\varrho}(0))} + \varrho^\delta \parallel g \parallel_{L^q(B_{2\varrho}(0))} \Big) \tag{9.5}$$

für $1 \leq p < n/(n-2)$ *und* $C = C(n, \Lambda, \Gamma\varrho, q, p)$.

□

Satz 9.3 (Lokale Maximum-Abschätzung) $u \in W^{1,2}(B_{2\varrho}(0))$ *sei eine schwache Unterlösung von (9.1)*

$$\partial_i(a_{ij}\partial_j u + b_i u) + c_i\partial_i u + du \geq f + div\ g \quad in\ B_{2\varrho}(0),$$

mit (9.2), (9.3). Dann gilt

$$\sup_{B_\varrho(0)} u_+ \leq C\Big(\varrho^{-n/p} \parallel u_+ \parallel_{L^p(B_{2\varrho}(0))} + \varrho^{2\delta} \parallel f \parallel_{L^{q/2}(B_{2\varrho}(0))} + \varrho^\delta \parallel g \parallel_{L^q(B_{2\varrho}(0))} \Big) \tag{9.6}$$

für $p > 1$ *und* $C = C(n, \Lambda, \Gamma\varrho, q, p)$.

□

Beweis der Sätze 9.1 - 9.3:
Es genügt $\varrho = 1$ zu betrachten. Wir schreiben (9.1) als quasi-lineare, elliptische Differentialgleichung in Divergenzform

$$div(A(., u, \nabla u)) + B(., u, \nabla u) \leq (\geq) 0 \tag{9.7}$$

je nachdem, ob u eine Unter- oder Oberlösung von (9.1) ist, und mit

$$A_i(x, z, p) := a_{ij}(x)p_j + b_i(x)z - g_i(x),$$
$$B(x, z, p) := c_i(x)p_i + d(x)z - f(x).$$

Für $\mu > \parallel f \parallel_{L^{q/2}(B_2(0))} + \parallel g \parallel_{L^q(B_2(0))}$ sehen wir für $z \geq 0, \bar{z} := z + \mu, \bar{b} := |b| + \mu^{-1}|g|, \bar{c} := |c|, \bar{d} := |d| + \mu^{-1}|f|$

$$\begin{aligned} |A(x, z, p)| &\leq \Lambda|p| + \bar{b}\bar{z}, \\ p \cdot A(x, z, p) &\geq (2\Lambda)^{-1}|p|^2 - \Lambda\bar{b}^2\bar{z}^2, \\ |B(x, z, p)| &\leq \bar{c}|p| + \bar{d}\bar{z}, \\ \parallel \bar{b}^2 + \bar{c}^2 + \bar{d} \parallel_{L^{q/2}(B_2(0))} &\leq C(n, \Gamma). \end{aligned} \tag{9.8}$$

Wir setzen $\bar{u} := u_+ + \mu \geq \mu > 0$ und betrachten für $1, \mu \leq K < \infty$ die Funktion $\varphi_K \in C^1([0, \infty[)$ für $\beta > 1$ definiert durch

$$\varphi_K(z) := \begin{cases} z^\beta - \mu^\beta & \text{für } 0 \leq z \leq K, \\ \beta K^{\beta-1}z - (\beta - 1)K^\beta - \mu^\beta & \text{für } z \geq K, \end{cases}$$

und $\varphi_K \in C^0([0,\infty[) \cap C^1(]0,\infty[)$ für $0 < \beta \le 1$ definiert durch

$$\varphi_K(z) := \varphi(z) := z^\beta - \mu^\beta$$

und für $\beta < 0$ definiert durch

$$\varphi_K(z) := \varphi(z) := z^\beta.$$

In allen Fällen gilt

$$0 \le \operatorname{sgn}(\beta)\varphi_K'(z) \le |\beta| \max(\mu^{\beta-1}, K^{\beta-1}) < \infty \quad \text{für } z \ge \mu, \tag{9.9}$$

$$0 \le \varphi_K(z) \le (1+|\beta|^{-1})|\varphi_K'(z)|z \quad \text{für } z \ge \mu, \tag{9.10}$$

und für $\beta > 0$ gilt

$$\varphi_K(\bar{u}) = 0 \quad \text{auf } [u \le 0]. \tag{9.11}$$

Für $\eta \in C_0^1(B_2(0)), \eta \ge 0$, setzen wir $v_K := \eta^2 \varphi_K(\bar{u})$ und sehen mit (9.9) und $\bar{u} := u_+ + \mu \ge \mu > 0$ anhand der Kettenregel aus Proposition 5.15, daß $v_K \in W_0^{1,2}(B_2(0))$, und weiter mit der Produkt- und der Kettenregel aus den Propositionen 5.14, 5.15:

$$\nabla v_K = \eta^2 \varphi_K'(\bar{u}) \nabla \bar{u} + 2\eta \nabla \eta \; \varphi_K(\bar{u}).$$

Nach Einsetzen in die Differentialgleichung (9.1) erhalten wir

$$\int \eta^2 \varphi_K'(\bar{u}) A_i(.,u,\nabla u) \partial_i \bar{u} \le (\ge) \tag{9.12}$$

$$\le (\ge) -2 \int \eta \varphi_K(\bar{u}) A_i(.,u,\nabla u) \partial_i \eta + \int \eta^2 \varphi_K(\bar{u}) B(.,u,\nabla u),$$

je nachdem ob u eine Unter- oder Oberlösung von (9.1) ist. Dabei sei $\beta > 0$ für Unterlösungen und $\beta < 0$ für Oberlösungen.
Zusammen mit (9.8), (9.9), (9.11) und

$$\nabla \bar{u} = \begin{cases} \nabla u & \text{auf } [u > 0], \\ 0 & \text{auf } [u \le 0] \end{cases}$$

ergibt sich aus (9.12) für jedes $\beta \neq 0$:

$$(2\Lambda)^{-1} \int \eta^2 |\varphi_K'(\bar{u})| \, |\nabla \bar{u}|^2 \le \tag{9.13}$$

$$\le \Lambda \int \eta^2 \bar{b}^2 |\varphi_K'(\bar{u})| \bar{u}^2 + 2 \int \eta |\nabla \eta| (\Lambda |\nabla u| + \bar{b}\bar{u}) \varphi_K(\bar{u}) + \int \eta^2 (\bar{c}|\nabla u| + \bar{d}\bar{u}) \varphi_K(\bar{u}).$$

Mit (9.10) und (9.11) können wir in den letzten beiden Integralen ∇u durch $\nabla \bar{u}$ ersetzen und anschliessend $\varphi_K(\bar{u})$ durch $(1+|\beta|^{-1})|\varphi_K'(\bar{u})|\bar{u}$ nach oben abschätzen. Dies ergibt durch mehrmalige Anwendung der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung für jedes $\beta \neq 0$:

$$\int \eta^2 |\varphi_K'(\bar{u})| \, |\nabla \bar{u}|^2 \le \frac{1}{2} \int \eta^2 |\varphi_K'(\bar{u})| \, |\nabla \bar{u}|^2 +$$

$$+ C(\Lambda)(1+|\beta|^{-1})^2 \int \Big(\eta^2 (\bar{b}^2 + \bar{c}^2 + \bar{d}) + |\nabla \eta|^2 \Big) |\varphi_K'(\bar{u})| \bar{u}^2.$$

Da $\int \eta^2 |\varphi_K'(\bar{u})| |\nabla \bar{u}|^2 < \infty$, erhalten wir für $\nu^2 := \bar{b}^2 + \bar{c}^2 + \bar{d}, |\beta| \ge \beta_0 > 0$, mittels Absorption:

$$\int \eta^2|\varphi_K'(\bar u)||\nabla \bar u|^2 \le C(\Lambda,\beta_0)\Big(\int \nu^2\eta^2|\varphi_K'(\bar u)|\bar u^2 + \int |\nabla\eta|^2|\varphi_K'(\bar u)|\bar u^2\Big). \tag{9.14}$$

Setzen wir nun

$$w := \begin{cases} \bar u^{(\beta+1)/2} & \text{für jedes } \beta \neq -1, \\ \log \bar u & \text{für } \beta = -1, \end{cases}$$

und $\gamma := \beta+1$, und beachten wir $\varphi_K'(z) = \beta z^{\beta-1}$ für $\beta \le 1$, so schreibt sich (9.14) als

$$\int |\eta\nabla w|^2 \le \begin{cases} C(\Lambda,\beta_0)\gamma^2 \int(\nu^2|\eta w|^2 + |w\nabla\eta|^2) & \text{für } \beta \neq -1, \beta \le 1, \\ C(\Lambda)\int(\nu^2\eta^2 + |\nabla\eta|^2) & \text{für } \beta = -1, \end{cases} \tag{9.15}$$

für $\beta \le 1$. Für $\beta > 1$ setzen wir

$$\Phi_K(z) := \frac{\beta+1}{2\beta^{1/2}}\int_0^z |\varphi_K'|^{1/2} = \begin{cases} z^{(\beta+1)/2} & \text{für } 0 \le z \le K, \\ K^{(\beta+1)/2} + \frac{\beta+1}{2}K^{(\beta-1)/2}(z-K) & \text{für } z \ge K, \end{cases}$$

und sehen

$$\Phi_K(z) \ge \beta^{-1/2} z|\varphi_K'(z)|^{1/2}, \text{ für alle } z \ge 0, \tag{9.16}$$

$0 \le \Phi_K(z) \le C_{\beta,K,\mu}|z|$, $\Phi_K(z) \le z^{(\beta+1)/2}$, und insbesondere $\Phi_K(\bar u) \in W^{1,2}(B_2(0))$. Setzen wir nun $w_K := w$ für $\beta \le 1$ und $w_K := \Phi_K(\bar u)$ für $\beta > 1$, so erhalten wir mit (9.14) und (9.16) für $\beta > 1$ bzw. aus (9.15) für $\beta \le 1$ direkt:

$$\int |\eta\nabla w_K|^2 \le C(\Lambda,\beta_0)\gamma^2 \int(\nu^2|\eta w_K|^2 + |w_K\nabla\eta|^2) \quad \text{für } \beta \neq -1. \tag{9.17}$$

Wir setzen nun $\chi := q/(q-2) > 1$ und sehen $2/q + 1/\chi = 1$ und $1 - n/2 > -n/(2\chi)$ wegen $q > n$. Wählen wir $\tilde\chi > \chi$ mit $1 - n/2 > -n/(2\tilde\chi)$, so erhalten wir mit der Poincaré-Ungleichung, Satz 5.2, und dem Sobolev-Einbettungssatz 5.3

$$\begin{aligned} \| \eta w_K \|^2_{L^{2\tilde\chi}(B_2(0))} &\le C_n \| \eta w_K \|^2_{W^{1,2}(B_2(0))} \le \\ &\le C_n \| \nabla(\eta w_K) \|^2_{L^2(B_2(0))} \le C_n \int (|\eta\nabla w_K|^2 + |w_K\nabla\eta|^2). \end{aligned} \tag{9.18}$$

Wegen $\tilde\chi > \chi$ existiert genau ein $\alpha \in (0,1)$, welches $\alpha/(2\tilde\chi) + (1-\alpha)/2 = 1/(2\chi)$ erfüllt. Somit folgt weiter mit der Hölderschen Ungleichung, (9.8), der Youngschen Ungleichung und (9.18) mit $\sigma := \alpha/(1-\alpha) > 0$ und jedem $\tau > 0$:

$$\begin{aligned} \int \nu^2|\eta w_K|^2 &\le \| \nu^2 \|_{L^{q/2}} \| \eta w_K \|^2_{L^{2\chi}} \le C(n,\Gamma) \| \eta w_K \|^{2\alpha}_{L^{2\tilde\chi}(B_2(0))} \| \eta w_K \|^{2(1-\alpha)}_{L^2(B_2(0))} \le \\ &\le \tau \int (|\eta\nabla w_K|^2 + |w_K\nabla\eta|^2) + C(n,\Lambda,\Gamma)\tau^{-\sigma} \| \eta w_K \|^2_{L^2(B_2(0))} . \end{aligned} \tag{9.19}$$

Wählen wir also $\tau > 0$ gerade so, dass $C(\Lambda,\beta_0)\gamma^2\tau = 1/2$ gilt, so folgt mittels (9.17), (9.19) und Absorption:

$$\int |\eta\nabla w_K|^2 \le C(n,\Lambda,\Gamma,\beta_0)(1+\gamma^2)^{\sigma+1}\int(\eta^2 + |\nabla\eta|^2)|w_K|^2,$$

für jedes $\beta \neq -1$, und somit auch noch wegen (9.18) und $\tilde{\chi} > \chi$:

$$\| \eta w_K \|_{L^{2\chi}(B_2(0))} \leq C(n, \Lambda, \Gamma, \beta_0)\,(1 + |\gamma|)^{\sigma+1} \,\| (\eta + |\nabla \eta|) w_K \|_{L^2(B_2(0))},$$

für jedes $\beta \neq -1$. Lassen wir $K \nearrow \infty$ und beachten $w_K \nearrow w$ per Konstruktion von Φ_K (für $\beta > 1$), so erhalten wir aus dem Satz über monotone Konvergenz:

$$\| \eta w \|_{L^{2\chi}(B_2(0))} \leq C(n, \Lambda, \Gamma, \beta_0)(1 + |\gamma|)^{\sigma+1} \,\| (\eta + |\nabla \eta|) w \|_{L^2(B_2(0))} \tag{9.20}$$

für jedes $\beta \neq -1$. Nun wählen wir für $1 \leq \varrho_1 < \varrho_2 \leq 2$ die Abschneidefunktion η mit $0 \leq \eta \leq 1, \eta = 1$ in $B_{\varrho_1}(0), supp\ \eta \subseteq B_{\varrho_2}(0)$ und $|\nabla \eta| \leq C/(\varrho_2 - \varrho_1)$ und erhalten aus (9.20):

$$\| w \|_{L^{2\chi}(B_{\varrho_1}(0))} \leq C(n, \Lambda, \Gamma, \beta_0)(1 + |\gamma|)^{\sigma+1}(\varrho_2 - \varrho_1)^{-1} \,\| w \|_{L^2(B_{\varrho_2}(0))}\,. \tag{9.21}$$

Wir setzen für $p \neq 0$ und $0 < \varrho \leq 2$

$$\Phi(p, \varrho) := \Big(\int\limits_{B_\varrho(0)} |\bar{u}|^p \Big)^{1/p}.$$

Beachten wir $\chi\, \gamma = \chi\, (\beta + 1) = \frac{\beta+1}{2}\, 2\chi$, so erhalten wir aus (9.21) gerade

$$\Phi(\chi\gamma, \varrho_1) \leq \Big(C(n, \Lambda, \Gamma, \beta_0)(1 + |\gamma|)^{\sigma+1}(\varrho_2 - \varrho_1)^{-1} \Big)^{2/\gamma} \Phi(\gamma, \varrho_2) \quad \text{für } \gamma > 0, \gamma \neq 1, \tag{9.22}$$

$$\Phi(\gamma, \varrho_2) \leq \Big(C(n, \Lambda, \Gamma, \beta_0)(1 + |\gamma|)^{\sigma+1}(\varrho_2 - \varrho_1)^{-1} \Big)^{2/|\gamma|} \Phi(\chi\gamma, \varrho_1) \quad \text{für } \gamma < 0. \tag{9.23}$$

Diese Ungleichungen iterieren wir nun.

Im Fall einer Unterlösung, also falls $\gamma > 1$, betrachten wir $p > 1$, wählen $m \in \mathbb{N}$, und definieren die Exponenten $\gamma_j = \chi^{m-j} p > 1$ und die wachsenden Radien $\varrho_j = 1 + 2^{-m-1+j}$, für $j = 1, \ldots, m$. Aus $m-$facher Anwendung der ersten obigen Ungleichung (9.22) erhalten wir:

$$\Phi(\chi^m p, 1) \leq (C(n, \Lambda, \Gamma, \beta_0)\chi)^{\frac{2}{p}\,(1+\sigma) \sum_{j=1}^m (j\chi^{-j})}\, \Phi(p, 2) \leq C(n, \Lambda, \Gamma, \beta_0, \chi, \sigma)\, \Phi(p, 2),$$

wenn wir beachten, dass die Reihe $\sum_{j=1}^\infty j\chi^{-j}$ wegen $\chi > 1$ konvergiert. Lassen wir $m \to \infty$ streben und beachten wir $\Phi(p, 1) \to \sup_{B_1(0)} \bar{u}$ für $p \to \infty$, so erhalten wir hieraus:

$$\begin{aligned} \sup_{B_1(0)} u_+ \leq \sup_{B_1(0)} \bar{u} &\leq C(n, \Lambda, \Gamma, \beta_0, \chi, \sigma)\ \| \bar{u} \|_{L^p(B_2(0))} \\ &\leq C(n, \Lambda, \Gamma, \beta_0, \chi, \sigma)\,(\| u_+ \|_{L^p(B_2(0))} + \mu), \end{aligned}$$

und Satz 9.3 folgt für $\mu \searrow \| f \|_{L^{q/2}(B_2(0))} + \| g \|_{L^q(B_2(0))}$.

Zum Beweis von Satz 9.2 liegt uns eine nicht-negative schwache Oberlösung u vor, sodass $\gamma < 1$ gewählt werden muss. Wir wählen ein $1 \leq p < n/(n-2)$ und können $q > n$ soweit verkleinern, dass noch $p < \chi = q/(q-2)$ gilt. Wir wählen ein beliebiges $m \in \mathbb{N}$, definieren $p_0 := \chi^{-m-1}\, p \in (0, 1)$ und wenden die erste Ungleichung (9.22) sukzessive auf die positiven Exponenten $\gamma_j = \chi^{-j} p \in (0,1)$ und auf die Folge wachsender Radien $\varrho_j = 1 + 2^{-m-2+j}$, für $j = 1, \dots, m+1$, an und erhalten

$$\Phi(p,1) \le C^{\frac{2}{p} \sum_{j=1}^{m+1} \chi^j} \, 2^{[\frac{2}{p}(\sigma+m+2) \sum_{j=1}^{m+1} \chi^j]} \, \Phi(p_0, 3/2). \tag{9.24}$$

Wir versuchen nun, $\Phi(-p_0, 3/2)$ für ein beliebig fixiertes $p_0 \in (0,1)$ mittels der zweiten Ungleichung (9.23) abzuschätzen. Wir wählen zu $p_0 \in (0,1)$ die Folge negativer Exponenten $\gamma_j := -\chi^{j-1} p_0$ und die Folge abnehmender Radien $\varrho_j = 1 + 2^{-j} \searrow 1$, $j \ge 1$. Für jedes hinreichend grosse m, sodass $\chi^m p_0 >> 1$ gilt, erhält man nach $(m+1)-$facher Anwendung der zweiten Ungleichung (9.23):

$$\Phi(-p_0, 3/2) \le (C \, p_0^{\sigma+1})^{\frac{2}{p_0} \sum_{j=0}^{m} \chi^{-j}} \, 2^{\frac{2}{p_0} \sum_{j=0}^{m} [(\sigma+3+j)\chi^{-j}]} \chi^{\frac{2}{p_0}(\sigma+1) \sum_{j=1}^{m} j \, \chi^{-j}} \\ \Phi(-\chi^{m+1} p_0, \varrho_{m+2}).$$

Beachten wir die Konvergenzen der Reihen $\sum_{j=0}^{\infty}[(\sigma+3+j)\chi^{-j}]$, $\sum_{j=1}^{\infty} j \, \chi^{-j}$ und $\sum_{j=0}^{\infty} \chi^{-j} = \frac{1}{1-1/\chi}$, und dass $\Phi(p, \varrho) \to \inf_{B_1(0)} \bar{u}$ für $p \to -\infty$ und $\varrho \searrow 1$ gilt, so folgt hieraus für $m \to \infty$:

$$\Phi(-p_0, 3/2) \le C(n, \Lambda, \Gamma, \beta_0, \chi, \sigma, p_0) \, \Phi(-\infty, 1) = C(n, \Lambda, \Gamma, \beta_0, \chi, \sigma, p_0) \inf_{B_1(0)} \bar{u}. \tag{9.25}$$

Satz 9.2 folgt also, wenn wir

$$\Phi(p_0, 3/2) \le C(n, \Lambda, \Gamma) \; \Phi(-p_0, 3/2) \tag{9.26}$$

für ein $p_0 \in (0,1)$ zeigen können.

Wählen wir einen beliebigen Ball $B_{2\varrho} \subseteq B_2(0)$ und ein $\eta \in C_0^1(B_{2\varrho})$ mit $0 \le \eta \le 1, \eta = 1$ in $B_\varrho, |\nabla \eta| \le C \, \varrho^{-1}$, so können wir aus der zweiten Ungleichung von (9.15) zusammen mit (9.8) für $w = \log \bar{u}$ schliessen:

$$\int_{B_\varrho} |\nabla w| \le \omega_n^{1/2} \, \varrho^{n/2} \Big(\int_{B_{2\varrho}} |\eta \, \nabla w|^2 \Big)^{1/2} \le \omega_n^{1/2} \, \varrho^{n/2} \, C(\Lambda) \Big(\int_{B_{2\varrho}} (\nu^2 \eta^2 + |\nabla \eta|^2) \Big)^{1/2} \le C(\Lambda, n, \Gamma) \, \varrho^{n-1}.$$

Wenden wir den Satz von John-Nirenberg, Satz 5.5, auf die Funktion $w = \log(\bar{u})$ auf $\Omega := B_{3/2}(0)$ an, so erhalten wir hier die Existenz eines $\sigma_n > 0$, sodass

$$\int_{B_{3/2}(0)} \exp(p_0 \, |w - \bar{w}_0|) \le C_n 3^n,$$

mit den Bezeichnungen $\bar{w}_0 := \fint_{B_{3/2}(0)} w$ und $p_0 := \frac{\sigma_n}{C(\Lambda, n, \Gamma)} \in (0,1)$ gilt. Dies impliziert sowohl

$$\int_{B_{3/2}(0)} \exp(p_0 \, \log \bar{u}) \, d\mathcal{L}^n \, e^{-p_0 \bar{w}_0} \le C_n 3^n$$

als auch

$$\int_{B_{3/2}(0)} \exp(-p_0 \, \log \bar{u}) \, d\mathcal{L}^n \, e^{p_0 \, \bar{w}_0} \le C_n 3^n$$

und Multiplikation beider Ungleichungen:

$$\int\limits_{B_{3/2}(0)} (\bar{u})^{p_0}\, d\mathcal{L}^n \int\limits_{B_{3/2}(0)} (\bar{u})^{-p_0}\, d\mathcal{L}^n \leq C_n 9^n.$$

Daraus folgt sofort (9.26) und zusammen mit (9.24) und (9.25):

$$\| u \|_{L^p(B_1(0))} \leq \Phi(p,1) \leq C(n,\Lambda,\Gamma,q,p) \inf_{B_1(0)} (u+\mu),$$

also Satz 9.2, wenn wir $\mu \searrow \| f \|_{L^{q/2}(B_2(0))} + \| g \|_{L^q(B_2(0))}$ fallen lassen.

Schließlich folgt Satz 9.1 aus Kombination der Sätze 9.2 und 9.3.

///

Mit der schwachen Harnack-Ungleichung können wir das folgende starke Maximumprinzip beweisen, das Satz 6.1 verschärft.

Satz 9.4 (Starkes Maximumprinzip für Operatoren in Divergenzform) *Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und zusammenhängend, L ein linearer, elliptischer Differentialoperator in Divergenzform, der (6.1) - (6.3), (6.8) in Ω erfüllt, und $u \in W^{1,2}(\Omega)$ sei eine schwache Unterlösung von*

$$Lu \geq 0 \quad \textit{schwach in } \Omega.$$

Nimmt u sein nichtnegatives Maximum im Inneren von Ω in dem Sinne an, daß

$$0 \leq \sup_B u = \sup_\Omega u < \infty$$

für einen Ball $B \subset\subset \Omega$, so ist u konstant.

Beweis:
Es sei $M := \sup_\Omega u \in [0,\infty[$. Dann gilt $v := M - u \geq 0$ in $\Omega, \inf_B v = 0$ und mit (6.8), da $M \geq 0$,

$$Lv \leq 0.$$

Für einen Ball $B_{2\varrho}(x) \subseteq \Omega$ mit

$$\inf_{B_\varrho(x)} v = 0$$

folgt aus der schwachen Harnack-Ungleichung, Satz 9.2,

$$\| v \|_{L^1(B_\varrho(x))} \leq C \inf_{B_\varrho(x)} v = 0,$$

also

$$v \equiv 0 \quad \text{in } B_\varrho(x)$$

und insbesondere $v \equiv 0$ in B. Da Ω zusammenhängend ist können beliebige Punkte über eine Kette paarweise nicht disjunkter Bälle verbunden werden, und es folgt $v \equiv 0$ bzw. $u \equiv M$.

///

Am Rand haben wir folgende Versionen der schwachen Harnack-Ungleichung und der lokalen Maximum-Abschätzungen.

Satz 9.5 (Schwache Harnack-Ungleichung am Rand) *Es sei* $\Omega \subset\subset \mathbb{R}^n$ *offen, mit* $0 \in \partial\Omega$ *und sodass* $\partial\Omega \cap B_{2\varrho}(0)$ *ein Lipschitz-Rand ist. Desweiteren sei* $u \in W^{1,2}(\Omega)$ *eine nicht-negative, schwache Oberlösung von (9.1) mit (9.2), (9.3), d.h. es gilt:*

$$\partial_i(a_{ij}\partial_j u + b_i u) + c_i \partial_i u + du \leq f + div\ g \quad in\ \Omega.$$

Setzen wir

$$\begin{aligned} m &:= \inf_{\partial\Omega\cap B_{2\varrho}(0)} u = \\ &:= \sup\{\ t \in \mathbb{R} \mid (u-t)_- = 0\ auf\ \partial\Omega \cap B_{2\varrho}(0)\ gemäß\ Definition\ 5.5\ \}, \end{aligned} \tag{9.27}$$

$$u_-^m := \begin{cases} \min(u, m) & auf\ \ B_{2\varrho}(0) \cap \Omega\ , \\ m & auf\ \ B_{2\varrho}(0) - \Omega\ , \end{cases}$$

so gilt

$$\varrho^{-n/p} \parallel u_-^m \parallel_{L^p(B_\varrho(0))} \leq C\Big(\inf_{B_\varrho(0)} u_-^m + \varrho^{2\delta} \parallel f \parallel_{L^{q/2}(B_{2\varrho}(0))} + \varrho^\delta \parallel g \parallel_{L^q(B_{2\varrho}(0))} \Big) \tag{9.28}$$

für $1 \leq p < n/(n-2)$ *und* $C = C(n, \Lambda, \Gamma\varrho, q, p)$, *wenn wir* f *und* g *identisch Null auf* $B_{2\varrho}(0) \setminus \Omega$ *fortsetzen.*

□

Satz 9.6 (Lokale Maximum-Abschätzung am Rand) *Es sei* $\Omega \subset\subset \mathbb{R}^n$ *offen, mit* $0 \in \partial\Omega$ *und sodass* $\partial\Omega \cap B_{2\varrho}(0)$ *ein Lipschitz-Rand ist. Desweiteren sei* $u \in W^{1,2}(\Omega)$ *eine schwache Unterlösung von (9.1) mit (9.2), (9.3), d.h. es gilt:*

$$\partial_i(a_{ij}\partial_j u + b_i u) + c_i \partial_i u + du \geq f + div\ g \quad in\ \Omega.$$

Setzen wir

$$\begin{aligned} M &:= \sup_{\partial\Omega\cap B_{2\varrho}(0)} u_+ = \\ &:= \inf\{\ t \in \mathbb{R} \mid (u_+-t)_+ = 0\ auf\ \partial\Omega \cap B_{2\varrho}(0)\ gemäß\ Definition\ 5.5\ \}, \end{aligned} \tag{9.29}$$

$$u_+^M := \begin{cases} \max(u, M) & auf\ \ B_{2\varrho}(0) \cap \Omega\ , \\ M & auf\ \ B_{2\varrho}(0) - \Omega\ , \end{cases}$$

so gilt

$$\sup_{B_\varrho(0)} u_+^M \leq C\Big(\varrho^{-n/p} \parallel u_+^M \parallel_{L^p(B_{2\varrho}(0))} + \varrho^{2\delta} \parallel f \parallel_{L^{q/2}(B_{2\varrho}(0))} + \varrho^\delta \parallel g \parallel_{L^q(B_{2\varrho}(0))} \Big) \tag{9.30}$$

für $p > 1$ *und* $C = C(n, \Lambda, \Gamma\varrho, q, p)$, *wenn wir* f *und* g *identisch Null auf* $B_{2\varrho}(0) \setminus \Omega$ *fortsetzen.*

□

Beweis der Sätze 9.5 und 9.6:
Wir adaptieren den Beweis der Sätze 9.1 - 9.3. OBDA sei wieder $\varrho = 1$. Wir wählen ein $\mu > \| f \|_{L^{q/2}(\Omega\cap B_2(0))} + \| g \|_{L^q(\Omega\cap B_2(0))}$ und setzen die Matrix (a_{ij}) in jeden Punkt aus $B_2(0) \setminus \Omega$ als elliptische Matrix beliebig fort, sodass diese Fortsetzung sowohl die Elliptizitätsbedingung (9.2) auf ganz $B_2(0)$, als auch die Bedingung $\| a_{ij} \|_{L^\infty(B_2(0))} \leq \Lambda$ erfüllt. Desweiteren setzen wir sowohl die übrigen Koeffizienten b_i, c_i, d als auch f und g identisch Null auf $B_2(0) \setminus \Omega$ fort. Hieraus folgt dann insbesondere für die Fortsetzungen von $\bar{b} := |b| + \mu^{-1}|g|$, $\bar{c} := |c|$ und $\bar{d} := |d| + \mu^{-1}|f|$:

$$\bar{b} = \bar{c} = \bar{d} \equiv 0 \qquad \text{auf} \quad B_2(0) \setminus \Omega, \tag{9.31}$$

und für $z \geq 0, \bar{z} := z + \mu$ erhalten wir ausserdem wieder die Abschätzungen

$$\begin{gathered} |A(x,z,p)| \leq \Lambda |p| + \bar{b}\bar{z}, \\ p \cdot A(x,z,p) \geq (2\Lambda)^{-1}|p|^2 - \Lambda \bar{b}^2 \bar{z}^2, \\ |B(x,z,p)| \leq \bar{c}|p| + \bar{d}\bar{z}, \\ \| \bar{b}^2 + \bar{c}^2 + \bar{d} \|_{L^{q/2}(B_2(0))} \leq C(n,\Gamma) \end{gathered} \tag{9.32}$$

in $\mathcal{L}^n-$fast jedem $x \in B_2(0)$, wobei wir wieder

$$\begin{aligned} A_i(x,z,p) &:= a_{ij}(x)p_j + b_i(x)z - g_i(x) \qquad \text{und} \\ B(x,z,p) &:= c_i(x)p_i + d(x)z - f(x) \end{aligned}$$

setzen. Desweiteren setzen wir für beliebiges $K \geq \max\{m, M\} + \mu$ zuerst für Oberlösungen:

$$\begin{aligned} \bar{u} &:= u_-^m + \mu, \\ \varphi_K(z) &:= z^\beta - (m+\mu)^\beta \quad \text{für } 0 \leq z \leq m + \mu \end{aligned}$$

mit $\beta < 0$, und anschliessend für Unterlösungen:

$$\begin{aligned} \bar{u} &:= u_+^M + \mu, \\ \varphi_K(z) &:= z^\beta - (M+\mu)^\beta \quad \text{für } 0 \leq z \leq K, \\ \varphi_K(z) &:= \beta K^{\beta-1} z - (\beta - 1)K^\beta - (M+\mu)^\beta \quad \text{für } z \geq K \end{aligned}$$

mit $\beta > 0$. Man prüft zunächst leicht nach, dass φ_K

$$0 \leq -\varphi_K' \leq |\beta|\, \mu^{\beta-1} < \infty \qquad \text{für } \mu \leq z \leq m + \mu, \tag{9.33}$$

$$0 \leq \varphi_K(z) \leq (1 + |\beta|^{-1})|z|\; |\varphi_K'(z)| \qquad \text{für } \mu \leq z \leq m + \mu, \tag{9.34}$$

für jedes $\beta < 0$ und

$$0 \leq \varphi_K' \leq \beta \max\{(M+\mu)^{\beta-1}, K^{\beta-1}\} < \infty \qquad \text{für } z \geq M + \mu, \tag{9.35}$$

$$0 \leq \varphi_K(z) \leq (1 + |\beta|^{-1})|z|\; |\varphi_K'(z)| \qquad \text{für } z \geq M + \mu, \tag{9.36}$$

für jedes $\beta > 0$ erfüllt. Wegen Proposition 5.16 sind ausserdem u_-^m und u_+^M aus $W^{1,2}(\Omega \cap B_2(0))$, und per Konstruktion von φ_K und per Definition von $\bar{u}$ gilt $\varphi_K(\bar{u}) \equiv 0$ auf $\partial\Omega \cap B_2(0)$. Somit folgt per Definition 5.5, dass

$$v_K := \eta^2 \varphi_K(\bar{u}) \in W_0^{1,2}(\Omega \cap B_2(0))$$

für jedes $\eta \in C_0^1(B_2(0))$ und für jedes $\beta \neq 0$ gilt, also dass v_K für jedes $\beta \neq 0$ eine zulässige Testfunktion für die Differential-Ungleichungen in (9.7) ist. Desweiteren folgt aus Proposition 5.16 im Fall einer Unterlösung u für $\bar{u} = u_+^M + \mu$:

$$\nabla \bar{u} = \begin{cases} \nabla u & \text{auf } [u > M], \\ 0 & \text{auf } [u \leq M], \end{cases}$$

und im Fall einer nicht-negativen Oberlösung u gilt für $\bar{u} = u_-^m + \mu$:

$$\nabla \bar{u} = \begin{cases} \nabla u & \text{auf } [u < m], \\ 0 & \text{auf } [u \geq m]. \end{cases}$$

Dementsprechend gilt für Unterlösungen

$$\varphi_K(\bar{u}) = 0 \quad \text{auf } [u \leq M], \tag{9.37}$$

und für Oberlösungen

$$\varphi_K(\bar{u}) = 0 \quad \text{auf } [u \geq m]. \tag{9.38}$$

Setzen wir nun v_K in (9.7) ein, so erhalten wir wieder zuerst für jedes $\beta \neq 0$

$$\int_{\Omega \cap B_2(0)} \eta^2 \varphi_K'(\bar{u}) A_i(., u, \nabla u) \partial_i \bar{u} \leq (\geq) \tag{9.39}$$

$$\leq (\geq) -2 \int_{\Omega \cap B_2(0)} \eta \varphi_K(\bar{u}) A_i(., u, \nabla u) \partial_i \eta + \int_{\Omega \cap B_2(0)} \eta^2 \varphi_K(\bar{u}) B(., u, \nabla u),$$

je nachdem ob u eine Unter- oder Oberlösung von (9.1) ist, und anhand von (9.32), (9.33) bzw. (9.35), (9.37) und (9.38):

$$(2\Lambda)^{-1} \int_{\Omega \cap B_2(0)} \eta^2 |\varphi_K'(\bar{u})| \, |\nabla \bar{u}|^2 \leq \tag{9.40}$$

$$\leq \Lambda \int_{\Omega \cap B_2(0)} \eta^2 \bar{b}^2 |\varphi_K'(\bar{u})| \bar{u}^2 + 2 \int_{\Omega \cap B_2(0)} \eta |\nabla \eta| (\Lambda |\nabla u| + \bar{b}\bar{u}) \varphi_K(\bar{u})$$
$$+ \int_{\Omega \cap B_2(0)} \eta^2 (\bar{c} |\nabla u| + \bar{d}\bar{u}) \varphi_K(\bar{u}).$$

Anschliessend können wir wegen (9.31), (9.34) bzw. (9.36), (9.37) und (9.38) alle Integrale auf ganz $B_2(0)$ ausdehnen, ∇u durch $\nabla \bar{u}$ ersetzen und schliesslich in den letzten beiden Integralen $\varphi_K(\bar{u})$ durch $(1 + |\beta|^{-1}) |\varphi_K'(\bar{u})| \bar{u}$ nach oben abschätzen. Dies ergibt wie im Beweis der Sätze 9.1 - 9.3 durch mehrmalige Anwendung der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung für jedes $\beta \neq 0$:

$$\int_{B_2(0)} \eta^2 |\varphi_K'(\bar{u})| \, |\nabla \bar{u}|^2 \leq \frac{1}{2} \int_{B_2(0)} \eta^2 |\varphi_K'(\bar{u})| \, |\nabla \bar{u}|^2 +$$

$$+C(\Lambda)(1+|\beta|^{-1})^2 \int_{B_2(0)} \Big(\eta^2(\bar{b}^2+\bar{c}^2+\bar{d})+|\nabla\eta|^2\Big)|\varphi_K'(\bar{u})|\bar{u}^2.$$

Da $\int_{B_2(0)} \eta^2|\varphi_K'(\bar{u})||\nabla\bar{u}|^2 < \infty$ ist, erhalten wir für $\nu^2 := \bar{b}^2+\bar{c}^2+\bar{d}, |\beta| \geq \beta_0 > 0$ mittels Absorption wieder die Abschätzung (9.14), und der Rest des Beweises kann ab hier analog übernommen werden.

///

Bemerkung 9.1 *Wir sehen sofort:* $\sup\limits_{B_1(0)} u_+^M = \sup\limits_{B_1(0)\cap\Omega} u_+$, $\inf\limits_{B_1(0)} u_-^m = \inf\limits_{B_1(0)\cap\Omega} u$, *und für nicht-negatives* u *gilt*

$$\| u_+^M \|_{L^p(B_1(0)\cap\Omega)} \geq \| u \|_{L^p(B_1(0)\cap\Omega)} \geq \| u_-^m \|_{L^p(B_1(0)\cap\Omega)}$$

und $\| u_+^M \|_{L^p(B_1(0))} > \| u_-^m \|_{L^p(B_1(0))}$, *falls* u *nicht (f.ü.) konstant auf* $B_1(0)\cap\Omega$ *ist. Dies zeigt, dass die Abschätzungen der Sätze 9.5 und 9.6 im Vergleich zu den inneren Abschätzungen der Sätze 9.1 - 9.3 bescheiden sind, sodass die Übernahme des Beweises der Sätze 9.1 - 9.3 zum Beweis der Sätze 9.5 und 9.6 nicht erstaunlich ist, und dass man ausserdem die Sätze 9.5 und 9.6 auf keinen Fall zu einer Harnack-Ungleichung am Rand kombinieren kann.*

10 Hölder-Regularität schwacher Lösungen

Mit der Harnack-Ungleichung zeigen wir in diesem Paragraphen, daß Lösungen der Gleichungen (9.1) hölder-stetig sind. Dies wurde 1957 von de Giorgi und 1958 von Nash für Gleichungen der Form

$$\partial_i(a_{ij}\partial_j u) = 0$$

bewiesen, als die Harnack-Ungleichung noch nicht zur Verfügung stand.

Es sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n, n \geq 2$. Wir betrachten schwache Ober- und Unterlösungen $u \in W^{1,2}(\Omega)$ linearer, elliptischer Differentialgleichungen in Divergenzform

$$\begin{aligned} &\partial_i(a_{ij}\partial_j u + b_i u) + c_i\partial_i u + du \leq f + div\ g \quad \text{schwach in } \Omega, \\ &\partial_i(\tilde{a}_{ij}\partial_j u + \tilde{b}_i u) + \tilde{c}_i\partial_i u + \tilde{d}u \geq \tilde{f} + div\ \tilde{g} \quad \text{schwach in } \Omega, \end{aligned} \tag{10.1}$$

mit

$$\begin{aligned} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j, \tilde{a}_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq \Lambda^{-1}|\xi|^2 \quad &\text{für } \mathcal{L}^n\text{-fast alle } x \in \Omega, \\ &\text{für alle } \xi \in \mathbb{R}^n, \end{aligned} \tag{10.2}$$

$a_{ij}, b_i, c_i, d, \tilde{a}_{ij}, \tilde{b}_i, \tilde{c}_i, \tilde{d} \in L^\infty(\Omega)$,

$$\| a_{ij}, b_i, c_i, d, \tilde{a}_{ij}, \tilde{b}_i, \tilde{c}_i, \tilde{d} \|_{L^\infty(\Omega)} \leq \Lambda, \tag{10.3}$$

für ein $1 \leq \Lambda < \infty$ und $f, \tilde{f} \in L^{q/2}(\Omega), g, \tilde{g} \in L^q(\Omega)$ für ein $q > n$.

Satz 10.1 *u sei wie in (10.1) - (10.3). Dann gilt $u \in C^{0,\alpha}_{loc}(\Omega)$, und für $\Omega' \subset\subset \Omega$ gilt*

$$\| u \|_{C^{0,\alpha}(\Omega')} \leq C(\| f, \tilde{f} \|_{L^{q/2}(\Omega)} + \| g, \tilde{g} \|_{L^q(\Omega)} + \| u \|_{L^2(\Omega)}), \tag{10.4}$$

wobei $C = C(\Omega, \Omega', \Lambda, n, q) < \infty$ und $\alpha = \alpha(\Lambda, n, q) > 0$.

Beweis:
Wir betrachten $B_{\varrho_0}(x_0) \subset\subset \Omega, 0 < \varrho \leq \varrho_0 \leq 1$ und setzen

$$M_\varrho := \sup_{B_\varrho(x_0)} u, \quad m_\varrho := \inf_{B_\varrho(x_0)} u.$$

Für $0 < \varrho \leq \varrho_0/2$ sind $M_{2\varrho} - u, u - m_{2\varrho} \geq 0$ auf $B_{2\varrho}(0)$ Oberlösungen geeigneter linearer, elliptischer Differentialgleichungen wie in (10.1) mit rechten Seiten $\hat{f}, \hat{g}$ und

$$\mu(\varrho) := \varrho^{2\delta} \| \hat{f} \|_{L^{q/2}(B_{2\varrho}(x_0))} + \varrho^\delta \| \hat{g} \|_{L^q(B_{2\varrho}(x_0))} \leq$$

$$\leq C\,\varrho^\delta(\Lambda \| u \|_{L^\infty(B_{\varrho_0}(x_0))} + \| f, \tilde{f} \|_{L^{q/2}(B_{\varrho_0}(x_0))} + \| g, \tilde{g} \|_{L^q(B_{\varrho_0}(x_0))})$$

für $\delta = 1 - n/q > 0$ erfüllen.

Damit folgt mit der schwachen Harnack-Ungleichung, Satz 9.2,

$$\begin{aligned} \varrho^{-n/p} \| M_{2\varrho} - u \|_{L^p(B_\varrho(x_0))} &\leq C(M_{2\varrho} - M_\varrho + \mu(\varrho)), \\ \varrho^{-n/p} \| u - m_{2\varrho} \|_{L^p(B_\varrho(x_0))} &\leq C(m_\varrho - m_{2\varrho} + \mu(\varrho)) \end{aligned}$$

für $p = 1$.

Dies ergibt zusammen mit der Minkowski-Ungleichung:

$$M_{2\varrho} - m_{2\varrho} = \frac{1}{\omega_n\, \varrho^n} \int_{B_\varrho(x_0)} (M_{2\varrho} - u) + (u - m_{2\varrho})\, d\mathcal{L}^n \le C\,(M_{2\varrho} - m_{2\varrho} - (M_\varrho - m_\varrho) + 2\,\mu(\varrho)),$$

also

$$osc_{B_\varrho(x_0)} u \le \sigma osc_{B_{2\varrho}(x_0)} u + 2\,\mu(\varrho)$$

mit $\sigma := 1 - 1/C < 1$. Iterieren wir diese Ungleichung mit dem folgenden Lemma, mit $\beta = \frac{1}{2}$, so erhalten wir

$$osc_{B_\varrho(x_0)} u \le$$

$$\le C\,(\varrho/\varrho_0)^\alpha osc_{B_{\varrho_0}(x_0)} u + C\,(\varrho\,\varrho_0)^{\frac{\delta}{2}} \Big(\parallel u \parallel_{L^\infty(B_{\varrho_0}(x_0))} + \parallel f, \tilde{f} \parallel_{L^{q/2}(B_{\varrho_0}(x_0))} + \parallel g, \tilde{g} \parallel_{L^q(B_{\varrho_0}(x_0))}\Big).$$

Beachten wir noch, dass hier wegen $C >> 1$

$$\alpha = (1-\beta)\,\frac{\log(\sigma)}{\log(\tau)} = \frac{1}{2}\,\frac{\log\left(1 - \frac{1}{C}\right)}{-\log(2)} < \frac{1 - \frac{n}{q}}{2} = \frac{\delta}{2}$$

angenommen werden kann, so erhalten wir

$$osc_{B_\varrho(x_0)} u \le$$

$$\le C\,\varrho^\alpha \Big(\parallel u \parallel_{L^\infty(B_{\varrho_0}(x_0))} + \parallel f, \tilde{f} \parallel_{L^{q/2}(B_{\varrho_0}(x_0))} + \parallel g, \tilde{g} \parallel_{L^q(B_{\varrho_0}(x_0))}\Big),$$

für $\varrho \le \varrho_0/2$. Durch geeignete Überdeckung von $\Omega' \subset\subset \Omega'' \subset\subset \Omega$ folgt daraus

$$\parallel u \parallel_{C^{0,\alpha}(\Omega')} \le C(\parallel f, \tilde{f} \parallel_{L^{q/2}(\Omega)} + \parallel g, \tilde{g} \parallel_{L^q(\Omega)} + \parallel u \parallel_{L^\infty(\Omega'')}).$$

Kombinieren wir dies mit den lokalen Maximum-Abschätzungen, Satz 9.3, für u und $-u$ in (10.1) und $p = 2$, so folgt die Behauptung.

///

Lemma 10.1 $\omega, \mu :]0, \varrho_0] \to \mathbb{R}_+$ *seien monoton nicht-fallende Funktionen mit*

$$\omega(\tau\varrho) \le \sigma\omega(\varrho) + \mu(\varrho) \quad \textit{für } 0 < \varrho \le \varrho_0$$

für geeignete $0 < \tau, \sigma < 1$.

Dann gilt

$$\omega(\varrho) \le C(\sigma)\Big(\Big(\frac{\varrho}{\varrho_0}\Big)^\alpha \omega(\varrho_0) + \mu(\varrho^\beta \varrho_0^{1-\beta})\Big) \quad \textit{für } 0 < \varrho \le \varrho_0,$$

wobei $\beta \in [0, 1)$ *beliebig sei und* $\alpha = \alpha(\sigma, \tau, \beta) = (1 - \beta)\frac{\log(\sigma)}{\log(\tau)} > 0$.

Beweis:

Für $0 < \varrho \le \varrho_1 \le \varrho_0$ gilt

$$\omega(\tau\varrho) \le \sigma\omega(\varrho) + \mu(\varrho_1),$$

da μ nicht-fallend ist. Iterieren wir dies für $\tau^k \varrho_1$, so erhalten wir

$$\omega(\tau^k \varrho_1) \le \sigma^k \omega(\varrho_1) + \mu(\varrho_1) \sum_{i=0}^{k-1} \sigma^i \le \sigma^k \omega(\varrho_0) + (1-\sigma)^{-1} \mu(\varrho_1).$$

Für $0 < \varrho \le \varrho_1$ wählen wir $k \in \mathbb{N}$ mit

$$\tau^k \varrho_1 < \varrho \le \tau^{k-1} \varrho_1$$

und sehen

$$\begin{aligned} \omega(\varrho) \le \omega(\tau^{k-1}\varrho_1) \le \sigma^{k-1}\omega(\varrho_0) + (1-\sigma)^{-1}\mu(\varrho_1) \le \\ \le \sigma^{-1}\Big(\frac{\varrho}{\varrho_1}\Big)^{\log(\sigma)/\log(\tau)} \omega(\varrho_0) + (1-\sigma)^{-1}\mu(\varrho_1). \end{aligned}$$

Wählen wir $\varrho_1 := \varrho^\beta \varrho_0^{1-\beta} \ge \varrho$, für ein beliebiges $\beta \in [0,1)$, so folgt

$$\omega(\varrho) \le \sigma^{-1}\Big(\frac{\varrho}{\varrho_0}\Big)^{(1-\beta)\log(\sigma)/\log(\tau)} \omega(\varrho_0) + (1-\sigma)^{-1}\mu(\varrho^\beta \varrho_0^{1-\beta}).$$

///

Mit der Harnack-Ungleichung am Rand, Satz 9.5, erweitern wir die innere Hölderstetigkeit einer schwachen Lösung aus Satz 10.1 bis zum Rand.

Satz 10.2 *Auf* $\Omega \subset\subset \mathbb{R}^n$ *sei* $u \in W^{1,2}(\Omega)$ *eine schwache Lösung einer (einzigen) elliptischen Gleichung aus (10.1), mit den Bedingungen (10.2) und (10.3),* $\partial\Omega$ *enthalte den Ursprung* 0 *und erfülle in diesem eine äußere Kegelbedingung, d.h. es gebe einen Kegel*

$$V := \{x \in B_{\varrho_0}(0) \mid |x| \le \theta \langle x, e\rangle \}$$

mit $e \in \partial B_1(0)$, $\varrho_0 \in (0,1]$ *und* $1 < \theta < \infty$ *, welcher*

$$V \cap \Omega = \emptyset$$

erfülle. Desweiteren definieren wir

$$\kappa(\varrho) := osc_{\partial\Omega \cap B_\varrho(0)} u := \sup_{\partial\Omega\cap B_\varrho(0)} u - \inf_{\partial\Omega\cap B_\varrho(0)} u,$$

ähnlich wie in (9.27) und (9.29). Dann gilt für $0 < \varrho \le \frac{\varrho_0}{2}$ *:*

$$\begin{aligned} osc_{\Omega\cap B_\varrho(0)} u \le \qquad (10.5) \\ \le C\,\varrho^\alpha \Big(\| u \|_{L^\infty(B_{\varrho_0}(0)\cap\Omega)} + \| f \|_{L^{q/2}(\Omega)} + \| g \|_{L^q(\Omega)} \Big) + C\,\kappa(2\varrho^{1/2}\varrho_0^{1/2}), \end{aligned}$$

wobei $C = C(\Lambda, n, q, \varrho_0, \theta) < \infty$ *und* $\alpha = \alpha(\Lambda, n, q, \varrho_0, \theta) > 0$ *.*

Beweis:
Wir folgen dem Beweis von Satz 10.1 und setzen für $\varrho > 0$

$$M_\varrho := \sup_{\Omega\cap B_\varrho(0)} u, \quad m_\varrho := \inf_{\Omega\cap B_\varrho(0)} u,$$

$$\partial M_\varrho := \sup_{\partial\Omega\cap B_\varrho(0)} u, \quad \partial m_\varrho := \inf_{\partial\Omega\cap B_\varrho(0)} u.$$

Für $\varrho \leq \varrho_0/2$ erhalten wir hier für das $\mu(\varrho)$ aus dem Beweis von Satz 10.1:

$$\mu(\varrho) \leq C\,\varrho^{\delta}\,(\|\, f\,\|_{L^{q/2}(B_{\varrho_0}(0))} + \|\, g\,\|_{L^q(B_{\varrho_0}(0))} + \Lambda \,\|\, u\,\|_{L^\infty(B_{\varrho_0}(0)\cap\Omega)}).$$

Wegen $(M_{2\varrho}-u)_-^{M_{2\varrho}-\partial M_{2\varrho}} = M_{2\varrho}-\partial M_{2\varrho}$ und $(u-m_{2\varrho})_-^{\partial m_{2\varrho}-m_{2\varrho}} = \partial m_{2\varrho}-m_{2\varrho}$ auf $B_{2\varrho}(0)-\Omega$ per Definition dieser Funktionen in (9.27) erhalten wir aus der schwachen Harnack-Ungleichung am Rand, Satz 9.5, angewandt auf $M_{2\varrho}-u$ und $u-m_{2\varrho}$:

$$(M_{2\varrho}-\partial M_{2\varrho})\Big(\varrho^{-n}\mathcal{L}^n(B_\varrho(0)-\Omega)\Big)^{1/p} \leq \varrho^{-n/p}\,\|\,(M_{2\varrho}-u)_-^{M_{2\varrho}-\partial M_{2\varrho}}\,\|_{L^p(B_\varrho(0))} \leq$$
$$\leq C(M_{2\varrho}-M_\varrho+\mu(\varrho)),$$

$$(\partial m_{2\varrho}-m_{2\varrho})\Big(\varrho^{-n}\mathcal{L}^n(B_\varrho(0)-\Omega)\Big)^{1/p} \leq \varrho^{-n/p}\,\|\,(u-m_{2\varrho})_-^{\partial m_{2\varrho}-m_{2\varrho}}\,\|_{L^p(B_\varrho(0))} \leq$$
$$\leq C(m_\varrho-m_{2\varrho}+\mu(\varrho))$$

hier für $p=1$. Aus der äußeren Kegelbedingung ergibt sich insbesondere

$$\varrho^{-n}\,\mathcal{L}^n(B_\varrho(0)-\Omega) \geq \varrho^{-n}\,\mathcal{L}^n(B_\varrho(0)\cap V) > \mathrm{Const}(\theta,n).$$

Somit folgt aus Addition beider obiger Ungleichungen:

$$M_{2\varrho}-m_{2\varrho}-(\partial M_{2\varrho}-\partial m_{2\varrho}) \leq C\,(M_{2\varrho}-m_{2\varrho}-(M_\varrho-m_\varrho)+2\,\mu(\varrho)),$$

also

$$osc_{\Omega\cap B_\varrho(0)}u \leq \sigma osc_{\Omega\cap B_{2\varrho}(0)}u + 2\,\mu(\varrho) + \frac{1}{C}\,\kappa(2\varrho)$$

mit $\sigma := 1-1/C < 1$. Zusammen mit Lemma 10.1, mit $\beta = 1/2$, folgt:

$$osc_{\Omega\cap B_\varrho(0)}u \leq$$

$$\leq C\,(\varrho/\varrho_0)^\alpha osc_{\Omega\cap B_{\varrho_0}(0)}u + C\,(\varrho\,\varrho_0)^{\frac{\delta}{2}}\Big(\,\|\,u\,\|_{L^\infty(B_{\varrho_0}(0)\cap\Omega)} + \|\,f\,\|_{L^{q/2}(B_{\varrho_0}(0))} + \|\,g\,\|_{L^q(B_{\varrho_0}(0))}\,\Big)$$
$$+C\,\kappa(2\,(\varrho\varrho_0)^{\frac{1}{2}}),$$

für $0 < \varrho \leq \frac{\varrho_0}{2}$. Da auch hier wegen $C >> 1$

$$\alpha = (1-\beta)\,\frac{\log(\sigma)}{\log(\tau)} = \frac{1}{2}\,\frac{\log\Big(1-\frac{1}{C}\Big)}{-\log(2)} < \frac{1-\frac{n}{q}}{2} = \frac{\delta}{2}$$

angenommen werden kann, erhalten wir

$$osc_{\Omega\cap B_\varrho(0)}u \leq C\,\varrho^\alpha\Big(\,\|\,f\,\|_{L^{q/2}(\Omega)} + \|\,g\,\|_{L^q(\Omega)} + \|\,u\,\|_{L^\infty(B_{\varrho_0}(0)\cap\Omega)}\Big)$$
$$+C\,\kappa(2(\varrho\,\varrho_0)^{\frac{1}{2}})$$

und somit die Behauptung des Satzes.

///

Korollar 10.3 *$u \in W^{1,2}(\Omega)$ sei eine schwache Lösung einer (einzigen) elliptischen Gleichung aus (10.1), mit den Bedingungen (10.2), (10.3), und $\Omega \subset\subset \mathbb{R}^n$ erfülle eine gleichmäßige äußere Kegelbedingung, d.h. Ω erfülle eine äußere Kegelbedingung wie in Satz 10.2 in jedem $x_0 \in \partial\Omega$ und mit von x_0 unabhängigen Kegeldaten $\varrho_0 \in (0,1]$ und $\theta \in (1,\infty)$. Falls*

$$\sup_{\partial\Omega}|u| \leq K, \quad \kappa(\varrho) := \sup_{x_0\in\partial\Omega} osc_{\partial\Omega\cap B_\varrho(x_0)} u \leq K\varrho^\beta$$

für ein $\beta > 0$ und $K < \infty$, so gilt $u \in C^{0,\alpha}(\Omega)$ und

$$\| u \|_{C^{0,\alpha}(\Omega)} \leq C(\| f \|_{L^{q/2}(\Omega)} + \| g \|_{L^q(\Omega)} + K + \| u \|_{L^2(\Omega)}),$$

wobei $C = C(\Omega, \Lambda, n, q, \varrho_0, \theta, \beta) < \infty$ und $\alpha = \alpha(\Lambda, n, q, \varrho_0, \theta, \beta) > 0$.

□

Beweis:
Wenden wir die lokalen Maximums-Abschätzungen am Rand, Satz 9.6, sowohl auf u als auch auf $-u$, mit $p = 2$, an, so erhalten wir wegen $\sup_{\partial\Omega}|u| \leq K$:

$$\| u \|_{L^\infty(\Omega\cap B_\varrho(x_0))} \leq \max\{ \sup_{B_\varrho(x_0)} (u_+^M), \sup_{B_\varrho(x_0)} ((-u)_+^M)\} \tag{10.6}$$

$$\leq C\Big(\varrho^{-n/2}(\| u \|_{L^2(\Omega\cap B_{2\varrho}(x_0))} + K) + \varrho^{2\delta} \| f \|_{L^{q/2}(\Omega\cap B_{2\varrho}(x_0))} + \varrho^\delta \| g \|_{L^q(\Omega\cap B_{2\varrho}(x_0))} \Big)$$

für eine Konstante $C = C(n, \Lambda, q, 2)$, für jedes $x_0 \in \partial\Omega$ und für jedes $\varrho \leq \varrho_0$. Kombinieren wir dies, in $\varrho = \varrho_0$, mit Abschätzung (10.5), so erhalten wir um jeden Randpunkt x_0:

$$osc_{\Omega\cap B_\varrho(x_0)} u \leq \tag{10.7}$$

$$\leq C\,\varrho^\alpha \Big(\| u \|_{L^2(\Omega\cap B_{2\varrho_0}(x_0))} + K + \| f \|_{L^{q/2}(\Omega)} + \| g \|_{L^q(\Omega)} \Big) + C\,K\,\varrho^{\beta/2},$$

mit $C = C(\Lambda, n, q, \varrho_0, \theta) < \infty$ und $\alpha = \alpha(\Lambda, n, q, \varrho_0, \theta) > 0$, jedoch unabhängig von x_0, und für jedes $0 < \varrho \leq \frac{\varrho_0}{2}$. Überdecken wir $\partial\Omega$ durch endlich viele, hinreichend kleine Bälle und kombinieren wir alle resultierenden Rand-Abschätzungen (10.6) und (10.7) mit der inneren a-priori-Abschätzung aus Satz 10.1, so erhalten wir die Behauptung des Korollars.

///

Für Nichtdivergenzform-Gleichungen in zwei Dimensionen erhalten wir ohne weitere Annahmen an die Koeffizienten Abschätzungen für Hölder-Konstanten der Gradienten schwacher Lösungen.

Satz 10.4 *Es sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ offen und $u \in W^{2,2}(\Omega), f \in L^p(\Omega), p > 2$, mit*

$$Lu := a_{ij}\partial_{ij}u = f \quad \textit{fast überall in } \Omega,$$

mit $a_{ij} = a_{ji} : \Omega \to \mathbb{R}$ und

$$\Lambda^{-1} \leq (a_{ij}) \leq \Lambda$$

für ein $1 \leq \Lambda < \infty$.

Dann gilt $u \in C^{1,\alpha}_{loc}(\Omega)$ und für $\Omega' \subset\subset \Omega$ gilt

$$\| u \|_{C^{1,\alpha}(\Omega')} \leq C(\| f \|_{L^p(\Omega)} + \| u \|_{L^2(\Omega)}),$$

wobei $C = C(\Omega, \Omega', \Lambda, p) < \infty$ und $\alpha = \alpha(\Lambda, p) > 0$.

Beweis:
Da $a_{12} = a_{21}, a_{22} > 0$, erhalten wir:

$$\frac{a_{11}}{a_{22}}\partial_{11}u + 2\frac{a_{12}}{a_{22}}\partial_{12}u + \partial_{22}u = \frac{f}{a_{22}} \quad \text{in } \Omega.$$

Multiplizieren wir mit $\partial_1\eta$, für beliebiges $\eta \in C_0^\infty(\Omega)$, so erhalten wir für $w = \partial_1 u \in W^{1,2}(\Omega)$ mittels doppelter partieller Integration:

$$\int\limits_\Omega \frac{f}{a_{22}}\partial_1\eta = \int\limits_\Omega \Big(\frac{a_{11}}{a_{22}}\partial_{11}u + 2\frac{a_{12}}{a_{22}}\partial_{12}u\Big)\partial_1\eta + \partial_{22}u\partial_1\eta =$$

$$= \int\limits_\Omega \Big(\frac{a_{11}}{a_{22}}\partial_1 w + 2\frac{a_{12}}{a_{22}}\partial_2 w\Big)\partial_1\eta + \partial_2 w\partial_2\eta,$$

also

$$\partial_i(\tilde{a}_{ij}\partial_j w) = \operatorname{div}(g) \quad \text{schwach in } \Omega$$

mit

$$\tilde{a}_{11} := \frac{a_{11}}{a_{22}},\ \tilde{a}_{12} := 2\frac{a_{12}}{a_{22}},\ \tilde{a}_{21} := 0,\ \tilde{a}_{22} := 1,\ g := \Big(\frac{f}{a_{22}}, 0\Big).$$

Da $(\tilde{a}_{ij})$ wieder eine beschränkte und gleichmässig elliptische Matrix auf Ω ist, folgt mit Satz 10.1, dass $w \in C^{0,\alpha}_{loc}(\Omega)$ ist, also mit Symmetrie in den Ableitungen: $u \in C^{1,\alpha}_{loc}(\Omega)$. Für $\Omega' \subset\subset \Omega'' \subset\subset \Omega$, mit $\partial\Omega'' \in C^{0,1}$, rechnen wir zuerst mit der Abschätzung (10.4) aus Satz 10.1 und anschliessend mit dem Ehrling Lemma, Lemma 4.1, und Proposition 5.4, angewandt auf die Einbettungen $C^{1,\alpha}(\Omega'') \hookrightarrow W^{1,2}(\Omega'') \hookrightarrow L^2(\Omega'')$:

$$\| \nabla u \|_{C^{0,\alpha}(\Omega')} \leq C(\| f \|_{L^p(\Omega'')} + \| \nabla u \|_{L^2(\Omega'')}) \leq$$

$$\leq C\varepsilon \| u \|_{C^{1,\alpha}(\Omega'')} + C \| f \|_{L^p(\Omega'')} + C_\varepsilon \| u \|_{L^2(\Omega'')},$$

für ein $\varepsilon > 0$. Beachten wir nun mit den Propositionen 5.13 und 5.3 die Einbettung $W^{1,\infty}(\Omega'') = C^{0,1}(\Omega'') \hookrightarrow C^{0,\alpha}(\Omega'')$ und wenden wir erneut das Ehrling Lemma, Lemma 4.1, auf die Einbettungen $C^{0,\alpha}(\Omega'') \hookrightarrow L^\infty(\Omega'') \hookrightarrow L^2(\Omega'')$ an, so erhalten wir mit Absorption:

$$\begin{aligned} \| u \|_{C^{0,\alpha}(\Omega'')} &\leq C(\| \nabla u \|_{L^\infty(\Omega'')} + \| u \|_{L^\infty(\Omega'')}) \leq \\ &\leq C(\| \nabla u \|_{L^\infty(\Omega'')} + \| u \|_{L^2(\Omega'')}), \end{aligned} \tag{10.8}$$

und damit

$$\| \nabla u \|_{C^{0,\alpha}(\Omega')} \leq C\varepsilon \| \nabla u \|_{C^{0,\alpha}(\Omega'')} + C \| f \|_{L^p(\Omega'')} + C_\varepsilon \| u \|_{L^2(\Omega'')} . \tag{10.9}$$

Für $B_\varrho(x_0) \subset\subset \Omega$ setzen wir $u_\varrho(x) := u(x_0 + \varrho x), f_\varrho(x) := \varrho^2 f(x_0 + \varrho x), a_{\varrho,ij}(x) := a_{ij}(x_0 + \varrho x)$ und sehen $a_{\varrho,ij}\partial_{ij}u_\varrho = f_\varrho$ auf $B_1(0)$. Damit erhalten wir mit (10.9):

$$\varrho \| \nabla u \|_{L^\infty(B_{\varrho/2}(x_0))} + \varrho^{1+\alpha} h\ddot{o}l_{\alpha,B_{\varrho/2}(x_0)}\nabla u = \| \nabla u_\varrho \|_{C^{0,\alpha}(B_{1/2}(0))} \leq$$

$$\leq C\varepsilon \| \nabla u_\varrho \|_{C^{0,\alpha}(B_1(0))} + C \| f_\varrho \|_{L^p(B_1(0))} + C_\varepsilon \| u_\varrho \|_{L^2(B_1(0))} =$$

$$= C\varepsilon\Big(\varrho \| \nabla u \|_{L^\infty(B_\varrho(x_0))} + \varrho^{1+\alpha} h\ddot{o}l_{\alpha,B_\varrho(x_0)}\nabla u\Big) +$$

$$+C\varrho^{2-2/p} \parallel f \parallel_{L^p(B_\varrho(x_0))} + C_\varepsilon \varrho^{-1} \parallel u \parallel_{L^2(B_\varrho(x_0))} . \tag{10.10}$$

Für $x \in \Omega$ setzen wir $\varrho_x := \min(d(x, \partial\Omega)/2, 1)$ und

$$\parallel h \parallel^{(2)}_{0,\alpha,\Omega} := \sup_{x\in\Omega} \Big(\varrho_x^2 \parallel h \parallel_{L^\infty(B_{\varrho_x}(x))} + \varrho_x^{2+\alpha} höl_{\alpha, B_{\varrho_x}(x)} h \Big).$$

Wir überdecken $\overline{B_{\varrho_x}(x)} \subseteq \cup_{l=1}^L B_{\varrho_x/4}(x_l)$ mit $x_l \in \overline{B_{\varrho_x}(x)}$ und einer festen Zahl $L \in \mathbb{N}$. Wir sehen $\varrho_{x_l} \geq \varrho_x - |x - x_l|/2 \geq \varrho_x/2$, insbesondere $B_{\varrho_x/2}(x_l) \subset\subset \Omega$. Mit (10.10) erhalten wir

$$\varrho_x^2 \parallel \nabla u \parallel_{L^\infty(B_{\varrho_x}(x))} + \varrho_x^{2+\alpha} höl_{\alpha, B_{\varrho_x}(x)} \nabla u \leq$$

$$\leq C\varrho_x \sum_{l=1}^L \Big(\varrho_x \parallel \nabla u \parallel_{L^\infty(B_{\varrho_x/4}(x_l))} + \varrho_x^{1+\alpha} höl_{\alpha, B_{\varrho_x/4}(x_l)} \nabla u \Big) \leq$$

$$\leq \sum_{l=1}^L \Bigg(C\,\varepsilon \Big(\varrho_x^2 \parallel \nabla u \parallel_{L^\infty(B_{\varrho_x/2}(x_l))} + \varrho_x^{2+\alpha} höl_{\alpha, B_{\varrho_x/2}(x_l)} \nabla u \Big) +$$

$$+ C\,\varrho_x^{3-2/p} \parallel f \parallel_{L^p(B_{\varrho_x/2}(x_l))} + C_\varepsilon \parallel u \parallel_{L^2(B_{\varrho_x/2}(x_l))} \Bigg) \leq$$

$$\leq C\varepsilon \parallel \nabla u \parallel^{(2)}_{0,\alpha,\Omega} + C \parallel f \parallel_{L^p(\Omega)} + C_\varepsilon \parallel u \parallel_{L^2(\Omega)},$$

und nehmen wir das Supremum über $x \in \Omega$ auf der linken Seite, so folgt:

$$\parallel \nabla u \parallel^{(2)}_{0,\alpha,\Omega} \leq C\varepsilon \parallel \nabla u \parallel^{(2)}_{0,\alpha,\Omega} + C \parallel f \parallel_{L^p(\Omega)} + C_\varepsilon \parallel u \parallel_{L^2(\Omega)} .$$

Diese Abschätzung gilt ebenso auf beliebigem $\Omega'' \subset\subset \Omega$ anstatt auf Ω. Beachten wir nun, dass $\parallel \nabla u \parallel^{(2)}_{0,\alpha,\Omega''} \leq \parallel \nabla u \parallel_{C^{0,\alpha}(\Omega'')} < \infty$ wegen $u \in C^{1,\alpha}_{loc}(\Omega)$ gilt, so erhalten wir bei hinreichend kleiner Wahl von $\varepsilon > 0$ zunächst mit Absorption:

$$\parallel \nabla u \parallel^{(2)}_{0,\alpha,\Omega''} \leq C \Big(\parallel f \parallel_{L^p(\Omega)} + \parallel u \parallel_{L^2(\Omega)} \Big).$$

Für eine beliebige Wahl von Gebieten $\Omega' \subset\subset \Omega'' \subset\subset \Omega$, mit $\partial\Omega' \in C^{0,1}$, folgt also:

$$\parallel \nabla u \parallel_{C^{0,\alpha}(\Omega')} \leq (\min(d(\partial\Omega', \partial\Omega'')/2, 1))^{-2-\alpha} \parallel \nabla u \parallel^{(2)}_{0,\alpha,\Omega''} \leq C \Big(\parallel f \parallel_{L^p(\Omega)} + \parallel u \parallel_{L^2(\Omega)} \Big).$$

Kombinieren wir dies noch mit (10.8), für Ω' anstatt Ω'', so folgt die Behauptung.

///

Literatur

[A] Alt, H.W., (1999) Lineare Funktionalanalysis, Springer Verlag, Berlin - Heidelberg - New York.

[E] Evans, L.C., (1998) Partial differential equations, Providence : American Math. Society, Graduate studies in mathematics 19.

[GT] Gilbarg, D., Trudinger, N.S., (1998) Elliptic Partial Differential Equations of Second Order, Springer Verlag, 3.Auflage, Berlin - Heidelberg - New York - Tokyo.

[LU] Ladyzenskaja, O.A., Uralceva, N.N., (1968) Linear and Quasilinear Elliptic Equations, Academic Press, New York and London.

[Ru] Rudin, W.T., (1973) Functional analysis, McGraw-Hill, New York.

[S97] Simon, L., (1997) Schauder estimates by scaling, Calculus of Variations and Partial Differential Equations, **5**, No. 5, pp. 391-407.