Axiomatische Geometrie

Ruben Jakob
Sommersemester 2016
Universität Tübingen

Inhaltsverzeichnis

I Einführung 1

II Hilberts Axiomensystem 1

1 Axiome der Inzidenz 1

2 Axiome des Zwischenseins 3

3 Axiome der Kongruenz von Geradensegmenten 9

4 Axiome der Kongruenz für Winkel 14

5 Hilbert-Ebenen 19

6 Tangenten an Kreise, tangentiale Kreise und Durchschnitte von Geraden und Kreisen 28

Teil I
Einführung

In dieser Vorlesung werden wir Hilberts axiomatische Definition bzw. Konstruktion einer Geometrie besprechen bzw. studieren und insbesondere das System der Gesetze Euklids, also die Gesetze einer Geometrie im Sinne der griechischen Antike (wie aus dem Gymnasialunterricht bekannt), aus Hilberts streng axiomatisch aufgebauter Theorie ableiten. Insbesondere sollen hierbei die klassischen Kongruenzgesetze für Dreiecke und die eindeutige Existenz einer winkel-halbierenden Geraden, einer strecken-halbierenden Geraden, einer Senkrechten auf einer vorgegebenen Geraden durch einen vorgegebenen Punkt und einer Parallelen durch einen vorgegebenen Punkt bewiesen und natürlich auch die Innenwinkel-Summe eines Dreiecks berechnet werden. Ausserdem werden wir verstehen, warum Hilberts allgemeiner Zugang den speziellen Fall der ,,Kartesischen Ebene" über $\mathbb{R}$ – jedoch nicht über jedem Körper – aus der linearen Algebra als Spezialfall enthält.

Teil II
Hilberts Axiomensystem

Wir fixieren eine Menge von Punkten $\mathcal{P}$ und eine Teilmenge $\mathcal{G}$ der Potenzmenge $\mathrm{Pot}(\mathcal{P})$, die wir Geraden oder Linien nennen. Die Punktemenge $\mathcal{P}$ kann aus endlich oder aus unendlich vielen Elementen bestehen, und die Menge $\mathcal{G}$ aller Geraden wird zunächst nicht präziser eingegrenzt als durch die Forderung $\mathcal{G} \subset \mathcal{P}$. Offenbar erhielten wir hiermit Paare $(\mathcal{P}, \mathcal{G})$, die unserer anschaulichen Vorstellung einer ,,Geometrie" überhaupt nicht gerecht würden. Um nun sinnvolle Geometrieen mittels des Paares $(\mathcal{P},\mathcal{G})$ zu erhalten, werden wir Eigenschaften der Elemente von $\mathcal{P}$ und $\mathcal{G}$ und insbesondere Relationen zwischen den Elementen von $\mathcal{P}$ und $\mathcal{G}$ axiomatisch fordern bzw. festlegen.

1 Axiome der Inzidenz

I1) Für zwei beliebige verschiedene Punkte $P_1, P_2 \in \mathcal{P}$ existiert genau eine Gerade $G \in \mathcal{G}$, die P_1 und P_2 enthält.

I2) Jede Gerade $G \in \mathcal{G}$ enthält mindestens zwei Punkte.

I3) Es existieren mindestens drei Punkte P_1, P_2, P_3, für die es kein $G \in \mathcal{G}$ mit $P_1, P_2, P_3 \in G$ gibt.

Definition 1.1 *Wir nennen ein Paar $(\mathcal{P}, \mathcal{G})$ aus einer Punkte- und einer Geradenmenge eine Inzidenz-Geometrie, falls deren Elemente die drei Axiome (I1), (I2), (I3) erfüllen.*

Definition 1.2 *Wir nennen im Folgenden eine Teilmenge $P \subset \mathcal{P}$ kolinear, falls es eine Gerade G mit $P \subset G$ gibt. Falls es zu einer Teilmenge $P \subset \mathcal{P}$ keine solche Gerade aus $\mathcal{G}$ gibt, so nennen wir P nicht-kolinear.*

Proposition 1.1 *Zwei verschiedene Geraden haben höchstens einen Schnittpunkt.*

Beweis:
Seien $g_1, g_2 \in \mathcal{G}$ zwei Geraden, die zwei verschiedene Punkte A, B enthalten, also mit $\sharp(g_1 \cap g_2) > 1$. Nach Axiom (I1) existiert höchstens eine Gerade, die A und B enthält. Somit folgt $g_1 = g_2$ aus $\sharp(g_1 \cap g_2) > 1$, oder äquivalent hierzu: $g_1 \neq g_2 \Rightarrow \sharp(g_1 \cap g_2) \leq 1$.

///

In einer Übungsaufgabe wird nachgeprüft, dass das „Modell" der kartesischen Ebene $F^2 = \{(x, y)|x \in F, y \in F\}$ über jedem Körper F, dessen Geraden die Lösungsmengen linearer Gleichungen

$$ax + by + c = 0 \qquad \textit{für } a, b, c \in F$$

seien, die drei Axiome (I1), (I2), (I3) der Inzidenz erfüllen.

Desweiteren führen wir eine Relation auf $\mathcal{G}$, nämlich den Begriff der Parallelität ein:

Definition 1.3 *Wir nennen zwei verschiedene Geraden $g_1, g_2 \in \mathcal{G}$ parallel, falls $g_1 \cap g_2 = \emptyset$ gilt. Wir schreiben hierfür $g_1 || g_2$. Ausserdem sei jede Gerade g zu sich selbst parallel, d.h. es gilt $g||g$, $\forall g \in \mathcal{G}$.*

In einer Übungsaufgabe wird ebenfalls nachgeprüft, dass das „Modell" F^2 der kartesischen Ebene über jedem Körper F auch die folgenden beiden Varianten des **Parallelen-Axioms** erfüllt:

Definition 1.4 *i) Ein Paar $(\mathcal{P}, \mathcal{G})$ erfülle das Parallelen-Axiom (P), falls es zu jeder Geraden $g \in \mathcal{G}$ und zu jedem Punkt $A \in \mathcal{P}$ höchstens eine Parallele durch A zu g gibt.*
ii) Ein Paar $(\mathcal{P}, \mathcal{G})$ erfülle das strenge Parallelen-Axiom (P'), falls es zu jeder Geraden $g \in \mathcal{G}$ und zu jedem Punkt $A \in \mathcal{P}$ genau eine Parallele durch A zu g gibt.

Betrachten wir nun zwei einfache Beispiele für endliches $\mathcal{P}$:

Beispiel 1.1 *1) Es bestehe $\mathcal{P}=\{A, B, C\}$ aus drei Punkten und es sei $\mathcal{G}=\{\{A, B\}, \{A, C\}, \{B, C\}\}$. Man kann sofort die drei Inzidenz-Axiome (I1)-(I3) nachprüfen. Da es zu keiner Geraden g eine (echte) Parallele $g' \neq g$ gibt, ist (P) trivial erfüllt, jedoch nicht (P').*

2) Es bestehe $\mathcal{P}=\{A, B, C, D, E\}$ aus fünf Punkten und $\mathcal{G}$ bestehe aus allen Teilmengen von $\mathcal{P}$, die exakt zwei Elemente enthalten, also aus den $4! = 24$ „Verbindungen" $\{A, B\}, \{A, C\}, \{B, C\}, \ldots$. Man sieht leicht, dass dies eine Inzidenz-Geometrie ist, die jedoch das Parallelen-Axiom (P) (und somit (P')) nicht erfüllt. Insbesondere beweist dieses Beispiel, dass man (P) nicht aus (I1)-(I3) folgern kann !

Als kleine Übungsaufgabe kann man sich überlegen, dass eine Menge der Kardinalität 3, also $\mathcal{P}=\{A, B, C\}$, nur eine einzige Inzidenz-Geometrie zulässt, nämlich diejenige aus Beispiel 1.1 (1). Für $\mathcal{P}=\{A, B, C, D\}$ erhält man bereits 5 verschiedene Inzidenz-Geometrieen $(\mathcal{P}, \mathcal{G}_i)$, $i = 1, \ldots, 5$, von denen eine die 6 Geraden $\{A, B\}$, $\{A, C\}$, $\{A, D\} \ldots$ aus jeweils zwei Punkten enthält und die vier weiteren $\mathcal{G}_2, \ldots, \mathcal{G}_5$ die Form $\{A, B, C\}$, $\{A, D\}$, $\{B, D\}$, $\{C, D\}$ haben, also vier Geraden enthalten. Da man zu je zwei $(\mathcal{P}, \mathcal{G}_i)$, $(\mathcal{P}, \mathcal{G}_j)$, $1 < i \neq j$, dieser zuletzt genannten 4 Geometrieen genau eine Permutation von $\{A, B, C, D\}$ angeben kann, welche die Elemente von $\mathcal{G}_i$ auf die Elemente von $\mathcal{G}_j$ abbildet, erkennt man die 4 Geometrieen $(\mathcal{P}, \mathcal{G}_i)$, $i = 2, \ldots 5$, als ,,beinahe gleich" – oder besser – als ,,zueinander isomorph". Diese spezielle Feststellung führt zu den folgenden beiden allgemeinen Begriffsbildungen, welche die hohe Anzahl aller möglichen Inzidenz-Geometrieen auf einer Punktemenge $\mathcal{P}$ in überschaubare Äquivalenz- bzw. Isomorphieklassen einteilt:

Definition 1.5 *1) Seien $(\mathcal{P}, \mathcal{G})$ und $(\mathcal{P}', \mathcal{G}')$ zwei Inzidenz-Geometrieen. Falls eine bijektive Abbildung Ψ zwischen $\mathcal{P}$ und $\mathcal{P}'$ existiert, die ebenfalls die Mengen $\mathcal{G}$ und $\mathcal{G}'$ aller Linien bijektiv aufeinander abbildet, so nennen wir $(\mathcal{P}, \mathcal{G})$ und $(\mathcal{P}', \mathcal{G}')$ zueinander ,,isomorph" und Ψ einen Isomorphismus zwischen $(\mathcal{P}, \mathcal{G})$ und $(\mathcal{P}', \mathcal{G}')$.*

2) Im Spezialfall $(\mathcal{P}', \mathcal{G}') = (\mathcal{P}, \mathcal{G})$ nennen wir solch eine Abbildung einen ,,Automorphismus" von $(\mathcal{P}, \mathcal{G})$.

Die Menge aller Automorphismen, zusammen mit deren Komposition als Verknüpfung, bildet offenbar eine Gruppe. Im Fall endlicher Kardinalität von $\mathcal{P}$, also im Falle $\sharp(\mathcal{P}) \in \mathbb{N}$, ist diese Gruppe offenbar eine Untergruppe der $\mathcal{S}_n$, der Gruppe aller Permutationen einer n-elementigen Menge.

2 Axiome des Zwischenseins

Zur Einführung anschaulicher Begriffe wie Liniensegment, Dreieck, Halbstrahl, Halbebene, Winkel, Inneres eines Winkels, Inneres eines Dreiecks usw... muss zunächst geklärt werden, was wir präzise darunter verstehen wollen, dass ein Punkt $B \in \mathcal{P}$ auf einer Geraden $G \in \mathcal{G}$,,zwischen" zwei anderen Punkten A und C liegt. Dieser Begriff wird nun durch weitere 4 Axiome, durch die sogenannten ,,Zwischen-" oder ,,Betweenness-"Axiome konkretisiert. Es sei grundsätzlich eine Inzidenz-Geometrie $(\mathcal{P}, \mathcal{G})$ beliebig fixiert.

B1) Falls B zwischen A und C liegt, geschrieben ,,$A * B * C$", so sind A, B, C drei <u>verschiedene</u> Punkte auf einer Geraden G. Es sei $A * B * C$ zu $C * B * A$ äquivalent.

B2) Zu zwei verschiedenen Punkten $A \neq B$ auf einer Geraden G existiert ein weiterer Punkt $C \in G$, der $A * B * C$ erfüllt.

B3) Seien A, B, C drei verschiedene Punkte auf einer Geraden G, so liegt genau einer zwischen den beiden anderen, d.h. präziser: Genau eine der drei (nicht zueinander äquivalenten) Möglichkeiten $A * B * C$, $B * A * C$, $A * C * B$ muss für das Tripel $\{A, B, C\}$ zutreffen, es kann jedoch <u>nicht</u> keine oder mehrere dieser Möglichkeiten wahr sein.

B4) Seien A, B, C drei <u>nicht-kolineare</u> Punkte und G eine Gerade, welche diese Punkte nicht enthalte. Falls diese Gerade einen Punkt D zwischen A und B enthält, so muss G ebenfalls entweder einen Punkt zwischen A und C oder einen Punkt zwischen B und C enthalten.

Im letzten Axiom (B4) ist nur eine der beiden Möglichkeiten erlaubt, d.h. das ,,entweder...oder" ist kein ,,oder....auch"; und (B4) besagt anschaulich, dass eine Gerade nicht in ein Dreieck durch eine seiner Seiten eindringen kann, ohne dieses anschliessend durch <u>genau</u> eine gegenüberliegende Seite wieder zu verlassen.

Definition 2.1 *1) Wir definieren zu zwei verschiedenen Punkten $A \neq B$ das* Geraden-Segment $\overline{AB}$ *durch*

$$\overline{AB} := \{C \in \mathcal{P} | A * C * B\} \cup \{A, B\}.$$

2) Für drei verschiedene, nicht-kolineare Punkte A, B, C definieren wir ein Dreieck $\overline{ABC}$ als Vereinigung der drei Geraden-Segmente $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ und $\overline{AC}$. Wir nennen $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{AC}$ die drei ,,Seiten" von $\overline{ABC}$ und A, B, C seine drei ,,Ecken".

Bemerkung 2.1 *Man beachte, dass die Aufgaben 8 und 9 garantieren, dass ein Dreieck seine drei Seiten und Ecken bis auf Permutation eindeutig festlegt, d.h. sind $\{A, B, C\}$ und $\{A', B', C'\}$ zwei Tripel aus $\mathcal{P}$ mit $\overline{ABC} = \overline{A'B'C'}$, d.h. mit $\overline{AB} \cup \overline{BC} \cup \overline{CA} = \overline{A'B'} \cup \overline{B'C'} \cup \overline{C'A'}$, so folgt hieraus $\{\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CA}\} = \{\overline{A'B'}, \overline{B'C'}, \overline{C'A'}\}$ und damit auch $\{A, B, C\} = \{A', B', C'\}$.*

Aus den Axiomen (I1)-(I3) und (B1)-(B4) schliessen wir nun die fundamentale

Proposition 2.2 *[Ebenen-Teilung] Sei l eine Gerade in einer Geometrie $(\mathcal{P}, \mathcal{G})$ mit (I1)-(I3) und (B1)-(B4). Dann kann die Menge $\mathcal{P} \setminus l$ in genau zwei nicht-leere Teilmengen, sogenannte Halbebenen, aufgeteilt werden, sodass gilt: Zwei verschiedene Punkte $A, B \in \mathcal{P} \setminus l$ gehören genau dann zu derselben Halbebene, wenn $\overline{AB}$ die Gerade l nicht schneidet.*

Beweis:
Wir führen zunächst eine naheliegende Relation auf $\mathcal{P} \setminus l$ ein:

$$A \sim B \qquad \Longleftrightarrow \qquad \text{Entweder} \quad A = B \quad \text{oder} \quad \overline{AB} \cap l = \emptyset.$$

Wir zeigen, dass ,,$\sim$" eine Äquivalenzrelation ist. $A \sim A$ folgt aus $A = A$. $A \sim B$ impliziert $B \sim A$, da $\overline{AB} = \overline{BA}$ aus (B1) folgt.
Gelte nun $A \sim B$ und $B \sim C$.
Fall 1: A, B, C liegen nicht auf einer Geraden. Per Definition der Relation $\sim$ wissen wir, dass die Gerade l die Segmente $\overline{AB}$ und $\overline{BC}$ nicht schneidet. Betrachten wir also das Dreieck $\overline{ABC}$, so folgt aus (B4), dass die Gerade l demnach auch $\overline{AC}$ nicht schneiden kann, also dass $A \sim C$ gilt.
Fall 2: A, B, C liegen auf einer Geraden m. Wegen $A \notin l$, gilt $m \neq l$. Nach Proposition 1.1 haben die Geraden l und m höchstens einen Schnittpunkt. Nach (I2) besitzt l mindestens 2 Punkte. Somit folgt die Existenz eines Punktes $D \in l$, der auch $D \notin m$ erfüllt. Nach (B2) existiert ein Punkt E, der $D * A * E$ erfüllt. Aus $A \notin l$ und (I1) folgt $E \notin l$. Desweiteren gilt $\overline{EA} \cap l = \emptyset$, denn falls $\overline{EA} \cap l \neq \emptyset$ gälte, so wäre

$$\sharp(\overline{EA} \cap l) = \sharp(EA \cap l) = 1$$

nach Proposition 1.1. Da $D \in EA$ und $D \in l$ gilt, folgte hieraus: $\{D\} = EA \cap l = \overline{EA} \cap l$ und somit $E * D * A$, was wegen (B3) im Widerspruch zu $D * A * E$ steht. Somit haben wir

$$A \sim E$$

gezeigt. Desweiteren gilt $E \notin m$, denn aus $E \in m$ und (I1) folgte $EA = m$ und somit $D \in m$ im Widerspruch zur Wahl von D. Wegen A, B, $C \in m$ sind somit $\{E, A, B\}$, $\{E, B, C\}$

und $\{E, A, C\}$ nicht-kolineare Mengen. Wenden wir nun sukzessive den behandelten Fall 1 auf diese drei Tripel an und beachten $A \sim E$, so erhalten wir: $A \sim E \wedge A \sim B \Rightarrow E \sim B$, $E \sim B \wedge B \sim C \Rightarrow E \sim C$, $E \sim C \wedge A \sim E \Rightarrow A \sim C$, wie erwünscht.
Wir haben somit nur noch zu zeigen, dass es exakt zwei Äquivalenzklassen gibt, die wir dann als die gesuchten Halbebenen S_1, S_2 bezeichnen. Nach (I3) existiert ein Punkt, der nicht auf l liegt. Somit existiert mindestens eine Äquivalenzklasse S_1. Wir wählen $A \in S_1$ und einen Punkt $D \in l$. Nach (B2) existiert ein weiterer Punkt C, der $A * D * C$ und somit $\overline{AC} \cap l \neq \emptyset$ erfüllt. Per Definition bedeutet dies: $A \not\sim C$, sodass mindestens zwei Äquivalenzklassen existieren. Wir zeigen, dass es aber auch nicht mehr gibt, indem wir schliessen:

$$A \not\sim C \wedge B \not\sim C \Rightarrow A \sim B.$$

Fall 1: A, B, C nicht kolinear. Per Voraussetzung gilt $\overline{AC} \cap l \neq \emptyset$ und $\overline{BC} \cap l \neq \emptyset$. Wenden wir (B4) auf das Dreieck $\overline{ABC}$ an, so folgt hieraus: $\overline{AB} \cap l = \emptyset$, also $A \sim B$, wie erwünscht.
Fall 2: A, B, C seien in einer Geraden m enthalten. Wie in Fall 2 des ersten Teils des Beweises können wir einen Punkt $D \in l$ mit $D \notin m$ und anschliessend einen Punkt E mit $D * A * E$ wählen, für den wir $A \sim E$ zeigten. Zusammen mit $A \not\sim C$ erhalten wir zuerst: $C \not\sim E$. Die Punkte B, C, E sind nicht kolinear, wie wir oben zeigten, und erfüllen $E \not\sim C$ und $B \not\sim C$. Somit folgt aus dem soeben behandelten Fall 1: $E \sim B$. Da wir auch $A \sim E$ wissen, folgt nun $A \sim B$, wie behauptet.

///

Bemerkung 2.3 *Die obige Charakterisierung der beiden Halbebenen kann auch in der folgenden Form äquivalent umformuliert werden: Zwei Punkte $A, B \in \mathcal{P} \setminus l$ gehören genau dann zu zwei verschiedenen Halbebenen, wenn $\overline{AB}$ die Gerade l schneidet.*

Proposition 2.4 *[Geraden-Teilung] Sei A ein Punkt auf einer Geraden G in einer Geometrie $(\mathcal{P}, \mathcal{G})$ mit (I1)-(I3) und (B1)-(B4). Dann kann die Menge $G \setminus \{A\}$ in genau zwei nicht-leere Teilmengen, sogenannte Strahlen S'_1, S'_2, aufgeteilt werden, sodass gilt: Zwei Punkte $B, C \in G \setminus \{A\}$ gehören genau dann zu demselben Strahl, wenn $\overline{BC}$ den Punkt A nicht enthält.*

Beweis:
Wir wählen mit (I3) einen Punkt $E \notin G$ und die eindeutige Gerade l durch A und E. Nach Proposition 2.2 kann die Menge $\mathcal{P} \setminus l$ in genau zwei Halbebenen, S_1, S_2, aufgeteilt werden, für die gilt: Zwei verschiedene Punkte $B, C \in \mathcal{P} \setminus l$ gehören genau dann zu derselben „Halbebene", wenn $\overline{BC}$ die Gerade l nicht schneidet, d.h. falls $\overline{BC} \cap l = \emptyset$. Wegen $G \cap l = \{A\}$ nach (I1) und $\overline{BC} \subset G$ gilt $\overline{BC} \cap l \subset \{A\}$, sodass $\overline{BC} \cap l = \emptyset$ zu $A \notin \overline{BC}$ äquivalent ist. Für die beiden Durchschnitte $S'_i := S_i \cap G$, $i = 1, 2$, folgt somit:

1) $G \setminus \{A\} = S'_1 \cup S'_2$,

2) $B \sim C \iff A \notin \overline{BC}$,

3) $S'_i \neq \emptyset$, $i = 1, 2$, denn zu A existieren mit (I2) und (B2) Punkte $B, D \in G$ mit $B * A * D$, also mit $A \in \overline{BD}$, d.h. mit $B \not\sim D$.

///

Definition 2.2 *1) Zu zwei Punkten $A \neq B \in \mathcal{P}$ definieren wir den ,,Strahl" $\overrightarrow{AB}$ als*

$$\overrightarrow{AB} := \{C \in AB \setminus \{A\} | C \sim B\} \cup \{A\},$$

wobei AB die nach (I1) eindeutig bestimmte Gerade durch A und B sei, und wir nennen A die ,,Spitze" des Strahls $\overrightarrow{AB}$.

2) Zu drei nicht-kolinearen Punkten $B, A, C \in \mathcal{P}$ definieren wir den ,,Winkel" am Punkt A, notiert $\angle BAC$, als die Vereinigung der beiden Strahlen $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$.

3) Zu drei nicht-kolinearen Punkten $A, B, C \in \mathcal{P}$ definieren wir das Innere eines ,,Winkels" am Punkt A, notiert $I(\angle BAC)$, als die Menge aller Punkte D, für die gilt:

a) D und C liegen auf einer Seite der Geraden AB, und

b) B und D liegen auf einer Seite der Geraden AC.

4) Zu drei nicht-kolinearen Punkten A, B, C definieren wir ,,das Innere" des Dreiecks $\overline{ABC}$, notiert $I(ABC)$, durch

$$I(ABC) := I(\angle BAC) \cap I(\angle ACB).$$

Bemerkung 2.5 *Man beachte bei der obigen Definition eines Winkels $\angle BAC$, dass dieser weder der Nullwinkel noch der ,,180 Grad"-Winkel sein kann und dass ausserdem $\angle BAC = \angle CAB$ gilt.*

Proposition 2.6 (Crossbar-Theorem) *Sei $\angle BAC$ ein Winkel und D ein Punkt in $I(\angle BAC)$. Dann gilt $\overrightarrow{AD} \cap \overline{BC} \neq \emptyset$.*

Beweis:
Wir benennen $l := AB$, $m := AC$ und $n := AD$. Mit (B2) existiert ein Punkt E auf m, der $E * A * C$ erfüllt. Da $\{A, B, C\}$ nicht-kolinear ist, gilt insbesondere $E \notin l$. Für n gilt:

a) n enthält weder B noch C noch E, wegen $A \in n \cap l$ bzw. $A \in m \cap l$, Axiom (I1) und $n \neq l$, $n \neq m$.

b) $A = n \cap \overline{EC} = m$, wegen $E * A * C$, Axiom (I1) und $n \neq m$. Und wie wir nun zeigen werden:

c) $n \cap \overline{BE} = \emptyset$.

Angenommen, das Segment $\overline{EB} \setminus \{B\}$ läge nicht auf derselben Seite von l wie der Punkt E. Dann folgte aus Proposition 2.2 und Proposition 1.1, dass $EB = AB \equiv l$. Da $\{A, B, C\}$ nicht kolinear sind, gilt $l \cap m = \{A\}$ und somit $\{E\} = EB \cap m = l \cap m = \{A\}$. Dies widerspricht jedoch $E * A * C$. Somit liegt $\overline{EB} \setminus \{B\}$ auf derselben Seite von l wie der Punkt E, z.B. in S_1. Wieder aus $E * A * C$, $A \in l$ und Proposition 2.4 folgt $C \in S_2$ (bzgl. l). Desweiteren folgt aus der Voraussetzung ,,$D \in I(\angle BAC)$", dass D und somit alle Punkte von $\overrightarrow{AD} \setminus \{A\}$ auf derselben Seite bzgl. l wie C liegen, also $\overrightarrow{AD} \setminus \{A\} \subset S_2$. Insgesamt folgt somit aus Proposition 2.2 und Eigenschaft (a) von n:

$$\overrightarrow{AD} \cap \overline{BE} = \emptyset. \tag{2.1}$$

Ähnlich folgt aus $B \notin m$ und „$D \in I(\angle BAC)$", dass m die Ebene $\mathcal{P}$ in zwei Halbebenen S_1, S_2 unterteilt, z.B mit $B \in S_1$, für die dann einerseits $(\overline{EB} \setminus \{E\}) \cup (\overrightarrow{AD} \setminus \{A\}) \subset S_1$ und andererseits wegen Eigenschaft (b) von n und wegen Proposition 2.4 $\overrightarrow{AD}^c \subset S_2$ gilt. Insgesamt folgt hieraus: $\overrightarrow{AD}^c \cap \overline{EB} = \emptyset$. Zusammen mit (2.1) folgt hieraus die Behauptung (c).

Kombinieren wir nun die Punkte (a), (b) und (c), so erhalten wir aus Axiom (B4): $n \cap \overline{BC} \neq \emptyset$. In einer Übungsaufgabe wird schliesslich bewiesen, dass für den ermittelten Schnittpunkt $F = n \cap \overline{BC}$ in der Tat $F \in \overrightarrow{AD}$ und somit die Behauptung $\overrightarrow{AD} \cap \overline{BC} \neq \emptyset$ gilt.

///

Beispiel 2.1 *Wir betrachten, wie in Übungsaufgabe 2, die kartesische Ebene, hier über $\mathbb{R}$. Wir wissen aus dieser Aufgabe, dass dieses Modell eine affine Ebene ist, und werden nun sehen, dass es auch den Axiomen (B1)–(B4) genügt, falls wir den Begriff des „Zwischenseins" in diesem speziellen Modell intelligent einführen. Zunächst sei daran erinnert, dass $(\mathbb{R}, \leq)$ eine vollgeordnete Menge ist, d.h. es gilt für beliebige $a, b, c \in \mathbb{R}$:*

$$a \leq a \qquad a \leq b \wedge b \leq a \Rightarrow a = b \qquad a \leq b \wedge b \leq c \Rightarrow a \leq c \tag{2.2}$$

und ausserdem:

$$a \leq b \vee b \leq a. \tag{2.3}$$

Desweiteren definieren wir $a < b$ durch $a \leq b \wedge a \neq b$. Schliesslich sei daran erinnert, dass $(\mathbb{R}, \leq)$ ordnungsvollständig ist, d.h. dass jede nicht-leere, nach oben bzw. nach unten beschränkte Teilmenge von $\mathbb{R}$ ein Supremum bzw. ein Infimum besitzt. Da die Teilmenge $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$ weder ein Supremum noch ein Infimum besitzt, folgt hieraus, dass $\mathbb{Z}$ weder eine obere noch eine untere Schranke in $\mathbb{R}$ besitzt. Wir betrachten nun eine beliebige Gerade g in $\mathbb{R}^2$ und drei verschiedene Punkte $A = (a_1, a_2), B = (b_1, b_2), C = (c_1, c_2)$ auf g. Wir führen die „B-Relation" auf $\mathbb{R}^2$ ein, indem wir definieren:

$$A * B * C,$$

falls entweder

$$a_1 < b_1 < c_1 \vee a_2 < b_2 < c_2$$

oder

$$c_1 < b_1 < a_1 \vee c_2 < b_2 < a_2$$

gilt. Wir prüfen nun nach:

a) *(B1) ist erfüllt, denn falls B zwischen A und C liegt, so gilt per Definition OBDA „$c_2 < b_2 < a_2$". Falls $A = B$ oder $B = C$ wäre, so folgte $a_2 = b_2$ oder $b_2 = c_2$. Falls $A = C$ wäre, so folgte $c_2 < b_2 < c_2$ und damit wieder $b_2 = c_2$. In jedem Fall erhalten wir einen Widerspruch zur Definition von „$<$". Ausserdem ist $A * B * C$ per Definition zu $C * B * A$ äquivalent.*

b) *(B2) ist erfüllt, da $\mathbb{Z}$ weder eine obere noch eine untere Schranke in $\mathbb{R}$ besitzt.*

c) *(B3) ist erfüllt, denn: Anhand von (2.2) und (2.3) müssen zwei Elemente a, b aus $(\mathbb{R}, \leq)$ genau eine der drei Möglichkeiten erfüllen: $a < b$, $a = b$ oder $b < a$. Somit* *müssen drei verschiedene Elemente a, b, c aus $(\mathbb{R}, \leq)$ genau eine der sechs Möglichkeiten*

$$a < b < c,\ a < c < b,\ b < c < a,\ b < a < c,\ c < a < b,\ c < b < a$$

erfüllen. Hieraus folgt in der Tat, dass ein beliebiges Tripel verschiedener, kolinearer Punkte A, B, C aus $\mathbb{R}^2$ genau einer der drei Möglichkeiten $A * B * C$, $B * A * C$ oder $A * C * B$ genügen muss, insbesondere dass jede konkrete Realisierung der Annahmen

$$A * B * C \wedge B * A * C,\ A * B * C \wedge A * C * B,\ B * A * C \wedge A * C * B$$

einen Widerspruch zu einer der beiden soeben gemachten Aussagen über Paare bzw. Tripel reeller Zahlen liefert.

d) Um (B4) nachzuprüfen, wählen wir eine Gerade g und drei nicht-kolineare Punkte A, B, C, die alle nicht auf g liegen mögen. Die Gerade g ist durch eine lineare Gleichung der Form

$$ax + by + c = 0 \qquad a, b, c \in \mathbb{R}$$

definiert. Daher betrachten wir die Abbildung $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definiert durch

$$\phi(x, y) := a\,x + b\,y + c.$$

Wegen $A, B, C \notin g$ gilt $\phi(A) \neq 0$, $\phi(B) \neq 0$ und $\phi(C) \neq 0$. Das Segment $\overline{AB}$ schneidet g genau dann, wenn $\phi(A) \cdot \phi(B) < 0$ gilt. Sei dies nun erfüllt, und OBDA $\phi(A) > 0$. Für C gibt es wegen $\phi(C) \neq 0$ genau zwei Möglichkeiten: $\phi(C) > 0$ oder $\phi(C) < 0$. Im ersten Fall gilt $\phi(A) \cdot \phi(C) > 0$ und im zweiten Fall $\phi(A) \cdot \phi(C) < 0$, beide Möglichkeiten simultan sind jedoch unmöglich. Wegen $\phi(A) \cdot \phi(B) < 0$ gilt im ersten Fall $\phi(B) \cdot \phi(C) < 0$, und im zweiten Fall $\phi(B) \cdot \phi(C) > 0$. Somit folgen aus den beiden Voraussetzungen $\overline{AB} \cap g \neq \emptyset$ und $\phi(A) > 0$ genau zwei Möglichkeiten:

a) g schneidet das Segment $\overline{BC}$, jedoch nicht das Segment $\overline{AC}$.

b) g schneidet das Segment $\overline{AC}$, jedoch nicht das Segment $\overline{BC}$.

Somit ist Axiom (B4) in der Tat erfüllt.

Proposition 2.7 (Vereinigung und Durchschnitte von Segmenten) *Seien $A * C * B$ drei verschiedene Punkte auf einer Geraden l. Dann gelten folgende Aussagen:*

a) $\overline{AB} = \overline{AC} \cup \overline{CB}$ und $\overline{AC} \cap \overline{CB} = \{C\}$.

b) $\overrightarrow{AB} \cup \overrightarrow{BA} = l$ und $\overrightarrow{AB} \cap \overrightarrow{BA} = \overline{AB}$.

Beweis:

a) Wir zeigen zuerst: $\overline{AB} \supset \overline{AC} \cup \overline{CB}$: Wir wählen einen Punkt $D \in \overline{AC}$, d.h. es gelte entweder $A * D * C$ oder $D \in \{A, C\}$. Im ersten Fall „verdrehen" wir unsere beiden Voraussetzungen zu $B * C * A$ und $C * D * A$, um aus Aufgabe 6 (2) $B * D * A$, also $D \in \overline{AB}$ zu erhalten. Falls $D = A$, so folgt die Behauptung trivial, und falls $D = C$, so erhalten wir sofort $A * D * B$ nach Voraussetzung, und daher $D \in \overline{AB}$. Ähnlich schliessen wir beispielsweise für einen Punkt $D \in \overline{CB}$ mit $C * D * B$:

$$A * C * B \wedge C * D * B \Longrightarrow A * D * B$$

wieder wegen Aufgabe 6 (2), also $D \in \overline{AB}$.
Wir zeigen nun: $\overline{AB} \subset \overline{AC} \cup \overline{CB}$. Wir wählen einen Punkt $D \in \overline{AB}$ und unterscheiden die Fälle $A*D*B$, $D = A$, $D = B$. Im ersten Fall teilen wir die Gerade l im Punkt A in die beiden Strahlen $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AB}^c := l \setminus \overrightarrow{AB}$ auf und sehen zusammen mit $A*C*B$: $C, B, D \in \overrightarrow{AB}$. Wir nehmen nun $D \notin \overline{AC}$ an. Dies bedeutet nach Proposition 2.4: entweder $D*A*C$ oder $A*C*D$. Die erste Option widerspricht jedoch $C \sim D$ bzgl. A, sodass nur $A*C*D$ gelten kann. Kombinieren wir dies mit $A*D*B$, so erhalten wir $C * D * B$ mittels Aufgabe 6 (2), also $D \in \overline{CB}$, wie erwünscht. Falls $D \in \overline{AC}$, so gibt es nichts zu beweisen. Die Fälle $D = A$ oder $D = B$ liefern die Behauptung ebenfalls sofort.
Per Definition gilt $\overline{AC} \cap \overline{CB} \supset \{C\}$. Wir können mit Proposition 2.4 die Gerade l im Punkt C in die beiden Strahlen $\overrightarrow{CA}$ und $\overrightarrow{CB}$ aufteilen, für die exakt

$$\overrightarrow{CA} \cap \overrightarrow{CB} = \{C\} \tag{2.4}$$

(nach Proposition 2.4) gilt. Aus Proposition 2.4 folgt insbesondere: $\overline{CA} \subset \overrightarrow{CA}$ und $\overline{CB} \subset \overrightarrow{CB}$. Somit folgt aus (2.4):

$$\{C\} \subset \overline{AC} \cap \overline{CB} \subset \overrightarrow{CA} \cap \overrightarrow{CB} = \{C\}$$

und damit die letzte Behauptung von Teil (a).

b) Wir können mit Proposition 2.4 die Gerade l im Punkt B in die beiden Strahlen $\overrightarrow{BA}$ und $\overrightarrow{BA}^c := l \setminus \overrightarrow{BA}$ aufteilen. Nach Teil (a) gilt ausserdem

$$\overrightarrow{AB} = \overline{AB} \cup \overrightarrow{BA}^c \tag{2.5}$$

und dass diese Vereinigung disjunkt ist. Somit folgt

$$l = \overrightarrow{BA} \cup \overrightarrow{BA}^c \subset \overrightarrow{BA} \cup \overrightarrow{AB} \subset l.$$

Ausserdem folgt aus der disjunkten Vereinigung (2.5) und wegen $\overline{BA} \subset \overrightarrow{BA}$ (direkt nach Proposition 2.4):

$$\overrightarrow{AB} \cap \overrightarrow{BA} = (\overline{AB} \cup \overrightarrow{BA}^c) \cap \overrightarrow{BA} = \overline{AB} \cap \overrightarrow{BA} = \overline{BA} \cap \overrightarrow{BA} = \overline{BA}.$$

///

3 Axiome der Kongruenz von Geradensegmenten

Wir fixieren eine Geometrie $(\mathcal{P}, \mathcal{G})$, bezeichnen mit $\mathcal{S}$ die Menge aller Geradensegmente in $(\mathcal{P}, \mathcal{G})$ und führen im Folgenden eine Relation $\cong$ auf $\mathcal{S}$ ein, d.h. wir wählen aus dem Produkt $\mathcal{S} \times \mathcal{S}$ eine bestimmte Teilmenge „$\cong$" aus, die durch die folgenden drei Axiome festgelegt werde:

C1) Sei $\overline{AB} \in \mathcal{S}$ ein Geradensegment und r ein beliebiger Strahl mit Spitze C. Wir fordern die eindeutige Existenz eines Punktes $D \in r$, für den $\overline{AB} \cong \overline{CD}$ gilt.

C2) Aus $\overline{AB} \cong \overline{CD}$ und $\overline{AB} \cong \overline{EF}$ folgt $\overline{CD} \cong \overline{EF}$, und ausserdem gelte $\overline{AB} \cong \overline{AB}$, $\forall \overline{AB}, \overline{EF}, \overline{CD} \in \mathcal{S}$.

C3) Es seien zwei Tripel $\{A, B, C\}$, $\{D, E, F\}$ verschiedener Punkte auf zwei Geraden G, G' mit $A * B * C$ und $D * E * F$, und mit $\overline{AB} \cong \overline{DE}$ und $\overline{BC} \cong \overline{EF}$ gegeben. Dann gilt $\overline{AC} \cong \overline{DF}$.

Man erkennt schnell, dass diese Axiome zur „Konstruktion eines Zirkels" verwandt werden sollen, d.h. zur Konstruktion eines mathematischen Begriffs, mit welchem sich sogenannte „Längen" von Geradensegmenten messen bzw. vergleichen und ausserdem miteinander „addieren" lassen. Um mittels dieses Zirkels die Menge $\mathcal{S}$ in Äquivalenzklassen einteilen zu können, müssen wir zunächst beweisen, dass „$\cong$" tatsächlich eine Äquivalenzrelation ist:

Proposition 3.1 *„$\cong$" ist eine Äquivalenzrelation auf $\mathcal{S}$.*

Beweis:
Reflexivität folgt sofort aus (C2), und Symmetrie ebenfalls, wenn wir in (C2) $\overline{EF} := \overline{AB}$ wählen. Nun seien Segmente $\overline{AB}, \overline{CD}$ und $\overline{EF}$ mit $\overline{AB} \cong \overline{CD}$ und $\overline{CD} \cong \overline{EF}$ gegeben. Wir verwenden Symmetrie, um zuerst $\overline{CD} \cong \overline{AB}$ zu erhalten, und kombinieren dies dann mit $\overline{CD} \cong \overline{EF}$, um $\overline{AB} \cong \overline{EF}$ zu erhalten.

///

Definition 3.1 *Seien $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$ zwei Geraden-Segmente. Wir wählen eine Reihenfolge (A, B) der Eckpunkte von $\overline{AB}$ und definieren r als denjenigen Strahl auf der Geraden $l = AB$, der aus B und allen Punkten auf l besteht, die auf derjenigen Seite von B liegen, die den Punkt A nicht enthält. Sei nun E der nach (C1) eindeutige Punkt auf r, der $\overline{BE} \cong \overline{CD}$ erfüllt. Wir definieren die Summe $\overline{AB} + \overline{CD}$, in Abhängigkeit von (A, B), durch $\overline{AE}$.*

Bemerkung 3.2 *Man beachte, dass diese Definition nicht nur von den beiden Segmenten $\overline{AB}$, $\overline{CD}$, sondern auch von der Reihenfolge (A, B) der Randpunkte von $\overline{AB}$ abhängt. Entscheiden wir uns nämlich für die andere Reihenfolge (B, A), so liefert die obige Definition $\overline{BA} + \overline{CD} = \overline{BE^*}$, wobei $E^* \in l$ der nach (C1) eindeutige Punkt mit $\overline{AE^*} \cong \overline{CD}$ sei, welcher ausserdem auf dem Strahl $r^* \subset l = AB$ mit Spitze A und $B \notin r^*$ liege. Offenbar sind r, r^* zwei verschiedene, sogar disjunkte Strahlen, E, E^* unterschiedliche Punkte und $\overline{AE}$, $\overline{BE^*}$ unterschiedliche Segmente, woraus insbesondere*

$$\overline{AB} + \overline{CD} := \overline{AE} \neq \overline{BE^*} =: \overline{BA} + \overline{CD}$$

folgt, obwohl $\overline{AB} = \overline{BA}$ gilt. Wir wählten jedoch E und E^* mit den Eigenschaften $\overline{BE} \cong \overline{CD}$, $\overline{AE^*} \cong \overline{CD}$, $A * B * E$ und $B * A * E^*$. Aus (C2) folgt zunächst $\overline{BE} \cong \overline{AE^*}$, und aus (C2) und (C3) zusammen mit $\overline{AB} = \overline{BA}$:

$$\overline{AE} \cong \overline{BE^*}.$$

Somit ist zumindest die Kongruenzklasse der oben eingeführten Summe $\overline{AB}+\overline{CD}$ zweier Segmente unabhängig von der Reihenfolge der Punkte A, B. D.h. die Zuordnung

$$\oplus : \mathcal{S} \times \mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{S}/\cong \quad \text{definiert durch } (\overline{\mathcal{AB}}, \overline{\mathcal{CD}}) \mapsto \overline{\mathcal{AB}} \oplus \overline{\mathcal{CD}} := [\overline{\mathcal{AE}}]$$

hängt von keiner weiteren Wahl ab, ist also eine wohldefinierte Funktion von $\mathcal{S} \times \mathcal{S}$ nach $\mathcal{S}/\cong$.

Dies legt folgende Definition der Summe

$$+ : (\mathcal{S}/\cong) \times (\mathcal{S}/\cong) \longrightarrow \mathcal{S}/\cong$$

nahe:

Definition 3.2 *Sind $[\overline{AB}]$ und $[\overline{CD}]$ zwei Kongruenzklassen von Segmenten in $(\mathcal{P}, \mathcal{G})$, so definieren wir deren Summe in $\mathcal{S}/\cong$ durch*

$$[\overline{AB}] + [\overline{CD}] := \overline{AB} \oplus \overline{CD}.$$

Dass auch diese Definition sinnvoll ist, zeigt

Proposition 3.3 *Seien $\overline{AB}$, $\overline{A'B'}$, $\overline{CD}$ und $\overline{C'D'}$ Segmente mit $\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$ und $\overline{CD} \cong \overline{C'D'}$. Dann gilt: $\overline{AB} \oplus \overline{CD} = \overline{A'B'} \oplus \overline{C'D'}$.*

Beweis:
Wir wählen die Punkte E, E' aus Definition 3.1 bzw. Bemerkung 3.2, welche die Eigenschaften

$$A * B * E, \quad A' * B' * E' \quad \text{und} \quad [\overline{BE}] = [\overline{CD}],\ [\overline{B'E'}] = [\overline{C'D'}]$$

haben. Aus Proposition 3.1 und per Voraussetzung folgt hieraus zunächst: $[\overline{BE}] = [\overline{B'E'}]$ und $[\overline{AB}] = [\overline{A'B'}]$. Insgesamt sehen wir, dass die Voraussetzungen von (C3) erfüllt sind, woraus $[\overline{AE}] = [\overline{A'E'}]$ folgt. Zusammen mit $[\overline{AE}] = \overline{AB} \oplus \overline{CD}$ und $[\overline{A'E'}] = \overline{A'B'} \oplus \overline{C'D'}$ zeigt dies $\overline{AB} \oplus \overline{CD} = \overline{A'B'} \oplus \overline{C'D'}$, wie erwünscht.

///

Wir kommen nun zu einer Proposition, deren Aussage es ermöglicht, Kongruenzklassen von Segmenten – zumindest in speziellen Situationen – voneinander subtrahieren zu können:

Proposition 3.4 *Seien A, B, C Punkte auf einer Geraden mit $A * B * C$, und seien E, F Punkte auf einem Strahl mit Spitze D, welche $[\overline{AB}] = [\overline{DE}]$ und $[\overline{AC}] = [\overline{DF}]$ erfüllen. Dann gilt $D * E * F$ und $[\overline{BC}] = [\overline{EF}]$.*

Beweis:
Wir teilen die Gerade DF im Punkt E in zwei Strahlen S_1, S_2 auf, OBDA mit $D \in S_2$. Mit (C1) können wir einen eindeutigen Punkt $F' \in S_1$ bestimmen, der $\overline{EF'} \cong \overline{BC}$ erfüllt. Zusammen mit $[\overline{AB}] = [\overline{DE}]$ und $A*B*C$, $D*E*F'$ folgern wir aus (C3): $[\overline{AC}] = [\overline{DF'}]$. Nun zeigen wir, dass F und F' auf derselben Seite von D liegen. Falls dies falsch sein sollte, so gälte $D \in \overline{F'F}$, also $F * D * F'$ und auch $D * E * F'$ nach Wahl von F'. Aus Aufgabe 6 erhielten wir hieraus $F*D*E$. Dies widerspricht jedoch der Voraussetzung an E und F auf demselben Strahl mit Spitze D zu liegen. Da wir auch $[\overline{DF}] = [\overline{AC}] = [\overline{DF'}]$ wissen, ergibt sich aus Axiom (C1): $F = F'$. Zusammen mit $D * E * F'$ und $\overline{EF'} \cong \overline{BC}$ erhalten wir sofort beide Behauptungen der Proposition.

///

Bemerkung 3.5 *Man beachte, dass aus obiger Proposition und (C2) insbesondere folgt, dass wir in Summen – wie gewohnt – kürzen dürfen, d.h. es gilt für beliebige Segmente* $\overline{AB}, \overline{CD}, \overline{EF}$*:*

$$[\overline{EF}] + [\overline{AB}] = [\overline{EF}] + [\overline{CD}] \implies [\overline{AB}] = [\overline{CD}].$$

Wegen der Kommutativität der Summe nach Aufgabe 14 können wir hieraus ebenfalls die Kürzungsregel

$$[\overline{AB}] + [\overline{EF}] = [\overline{CD}] + [\overline{EF}] \implies [\overline{AB}] = [\overline{CD}]$$

ableiten.

Definition 3.3 *Seien* $\overline{AB}$ *und* $\overline{CD}$ *vorgegebene Segmente. Wir definieren die Relationen „$<$" und „$>$" auf der Menge* $\mathcal{S}$ *aller Segmente in* $\mathcal{P}$ *durch*

$$\overline{AB} < \overline{CD} \Leftrightarrow \overline{CD} > \overline{AB},$$

falls ein Punkt $E \in \overline{CD}$ *mit*

$$C * E * D \qquad \text{und} \qquad \overline{AB} \cong \overline{CE}$$

existiert.

Proposition 3.6 *1) Seien* $\overline{AB}, \overline{A'B'}$ *und* $\overline{CD}$*,* $\overline{C'D'}$ *Segmente, die* $\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$ *und* $\overline{CD} \cong \overline{C'D'}$ *erfüllen. Dann gilt:*

$$\overline{AB} < \overline{CD} \Leftrightarrow \overline{A'B'} < \overline{C'D'}.$$

D.h. wir können die Relationen „$[\overline{AB}] < [\overline{DE}]$" und „$[\overline{AB}] > [\overline{DE}]$" auf Kongruenz-Klassen von Segmenten wohldefinieren.

2) $\overline{AB} < \overline{CD}$ *und* $\overline{CD} < \overline{EF}$ *impliziert* $\overline{AB} < \overline{EF}$*.*

3) Für zwei beliebige Segmente $\overline{AB}$*,* $\overline{CD}$ *gilt genau eine der drei folgenden Möglichkeiten:*

$$[\overline{AB}] < [\overline{CD}], \; [\overline{AB}] = [\overline{CD}], \; [\overline{AB}] > [\overline{CD}]. \tag{3.6}$$

Beweis:
1) Wir nehmen OBDA $\overline{AB} < \overline{CD}$ an. Dann folgt per Definition 3.3 die Existenz eines Punktes E mit $C * E * D$ und $\overline{AB} \cong \overline{CE}$. Nun wählen wir mit (C1) den eindeutigen Punkt E' auf dem Strahl $\overrightarrow{C'D'}$, der $\overline{CE} \cong \overline{C'E'}$ erfüllt. Die Tripel $C * E * D$ und C', E', D' erfüllen somit $\overline{CE} \cong \overline{C'E'}$ und $\overline{CD} \cong \overline{C'D'}$, sodass uns Proposition 3.4 $C' * E' * D'$ garantiert. Da wir mit Transitivität

$$\overline{A'B'} \cong \overline{AB} \cong \overline{CE} \cong \overline{C'E'}$$

wissen, folgt per Definition 3.3 in der Tat: $\overline{A'B'} < \overline{C'D'}$. Per Symmetrie impliziert $\overline{A'B'} < \overline{C'D'}$ auch $\overline{AB} < \overline{CD}$.
2) Wir setzen $\overline{AB} < \overline{CD}$ und $\overline{CD} < \overline{EF}$ voraus. Per Voraussetzung und Definition 3.3 existieren Punkte $X \in \overline{CD}$, $Y \in \overline{EF}$, die $\overline{AB} \cong \overline{CX}$ und $\overline{CD} \cong \overline{EY}$ erfüllen. Nun

wählen wir den eindeutigen Punkt $Z \in \overrightarrow{EF}$, der $\overline{CX} \cong \overline{EZ}$ erfüllt. Dann gilt für die Tripel $C * X * D$ und E, Z, Y: $\overline{CX} \cong \overline{EZ}$ und $\overline{CD} \cong \overline{EY}$, sodass wir aus Proposition 3.4 $E * Z * Y$ schliessen können. Zusammen mit $E * Y * F$ folgt mittels Aufgabe 6 auch $E * Z * F$. Da wir ausserdem $\overline{AB} \cong \overline{CX} \cong \overline{EZ}$ wissen, folgt per Definition 3.3 schliesslich $\overline{AB} < \overline{EF}$, wie erwünscht.
3) Wir wählen mit (C1) den eindeutigen Punkt E auf dem Strahl $\overrightarrow{CD}$ mit Spitze C, der $\overline{AB} \cong \overline{CE}$ erfüllt. Für E muss wegen (B3) und wegen $E \neq C$ genau eine der drei folgenden Möglichkeiten gelten: $C * E * D$, $E = D$, $C * D * E$. Wegen $\overline{AB} \cong \overline{CE}$ und per Definition 3.3 haben wir:

$$\text{Fall}\,1 \iff \overline{AB} < \overline{CD}, \qquad \text{Fall}\,2 \iff \overline{AB} \cong \overline{CD}, \qquad \text{Fall}\,3 \iff \overline{AB} > \overline{CD},$$

wobei wir die letzte Äquivalenz wegen $\overline{AB} \cong \overline{CE} > \overline{CD}$ aus dem ersten Teil der Proposition erhielten. Dies beweist die Behauptung (3.6).

///

Proposition 3.7 *Seien $\overline{AB}$, $\overline{CD}$ zwei Segmente, die $\overline{AB} < \overline{CD}$ erfüllen, und sei $\overline{EF}$ ein beliebiges, weiteres Segment. Dann gilt*

$$\overline{AB} \oplus \overline{EF} < \overline{CD} \oplus \overline{EF}.$$

Beweis:
Per Definition 3.3 und (C1) existiert genau ein Punkt $Y \in \overline{CD}$ mit $C*Y*D$ und $\overline{AB} \cong \overline{CY}$. Desweiteren existiert nach (C1) genau ein Punkt $X \in \overrightarrow{CY}$ mit $C * Y * X$ und $\overline{YX} \cong \overline{EF}$. Nun folgt aus Proposition 3.3 und den Definitionen 3.1 und 3.2:

$$[\overline{AB}] + [\overline{EF}] = [\overline{CY}] + [\overline{YX}] = \overline{CY} \oplus \overline{YX} = [\overline{CX}]. \tag{3.7}$$

Um $[\overline{CX}]$ mit $\overline{CD} \oplus \overline{EF}$ zu vergleichen, wählen wir mittels (C1) auf dem Strahl $\overrightarrow{CD}$ den eindeutigen Punkt X' mit $C * D * X'$ und

$$\overline{DX'} \cong \overline{EF}. \tag{3.8}$$

Wir zeigen nun:

$$C * X * X'. \tag{3.9}$$

Teilen wir die Gerade CD im Punkt C in zwei Strahlen bzw. Äquivalenzklassen auf, so sehen wir

$$X' \sim D \quad \wedge \quad D \sim Y \quad \wedge \quad Y \sim X$$

also $X' \sim X$ bzgl. C nach Proposition 2.4. Falls die obige Behauptung falsch wäre, so folgte hieraus und wegen $X \neq C$ und $X' \neq C$ anhand von (B1) und (B3), dass entweder $X = X'$ oder $C * X' * X$ gelten müsste. Im ersten Fall erhielten wir mittels (3.7), (C2), den Definitionen 3.1 und 3.2 und mit (3.8):

$$[\overline{AB}] + [\overline{EF}] = [\overline{CX}] = [\overline{CX'}] = [\overline{CD}] + [\overline{DX'}] = [\overline{CD}] + [\overline{EF}].$$

Aus Bemerkung 3.5 folgte hieraus $[\overline{AB}] = [\overline{CD}]$, was jedoch nach Proposition 3.6 im Widerspruch zu $\overline{AB} < \overline{CD}$ steht. Im Fall $C * X' * X$ können wir durch Kombination mit $C * D * X'$ zunächst

$$D * X' * X \tag{3.10}$$

ableiten. Kombinieren wir $C * Y * D$ und $C * D * X'$, so erhalten wir ausserdem

$$Y * D * X'.$$

Kombination mit (3.10) liefert:

$$Y * X' * X.$$

Nun folgte aus $\overline{YX} \cong \overline{EF}$, Definition 3.3, nochmals $X' * D * Y$ und (3.8):

$$[\overline{EF}] = [\overline{YX}] > [\overline{YX'}] > [\overline{DX'}] = [\overline{EF}].$$

Dies steht jedoch nach Proposition 3.6 im Widerspruch zu $[\overline{EF}] = [\overline{EF}]$. Somit ist (3.9) korrekt, und wir können zusammen mit (3.7), Definition 3.3, $C * D * X'$, den Definitionen 3.1 und 3.2 und (3.8) schliessen:

$$[\overline{AB}] + [\overline{EF}] = [\overline{CX}] < [\overline{CX'}] = [\overline{CD}] + [\overline{DX'}] = [\overline{CD}] + [\overline{EF}].$$

///

4 Axiome der Kongruenz für Winkel

Das Axiom (I1) diente offenbar bereits zur Konstruktion eines Lineals, mit dem die eindeutige Gerade durch zwei vorgegebene Punkte gezogen werden kann. Um die Konstruktion eines Lineals zu vervollständigen, müssen wir uns mathematisch die Möglichkeit verschaffen, Winkel zu ,,messen", deren Grössen miteinander zu vergleichen und an der Spitze eines gegebenen Strahls zu konstruieren. Wir fixieren hierzu eine Geometrie $(\mathcal{P}, \mathcal{G})$, die bereits die Axiome (I1)-(C3) erfülle, bezeichnen mit $\mathcal{W}$ die Menge aller Winkel in $(\mathcal{P}, \mathcal{G})$ und führen im Folgenden eine Relation $\cong$ auf $\mathcal{W}$ ein, d.h. wir wählen aus dem Produkt $\mathcal{W} \times \mathcal{W}$ eine bestimmte Teilmenge ,,$\cong$" aus, die durch die folgenden drei Axiome festgelegt werde:

C4) Seien ein Winkel $\angle BAC$ und ein Strahl $\overrightarrow{DF}$ vorgegeben, dann existiert auf jeder Seite der korrespondierenden Geraden DF <u>genau ein</u> Strahl $\overrightarrow{DE}$, sodass $\angle BAC \cong \angle EDF$ gilt.

C5) Seien α, β, γ drei beliebige Winkel, so gilt:

$$\alpha \cong \beta \quad \wedge \quad \alpha \cong \gamma \quad \Longrightarrow \quad \beta \cong \gamma$$

und $\alpha \cong \alpha$ für alle $\alpha \in \mathcal{W}$.

C6) (SWS-Regel) Es seien zwei Dreiecke ABC, DEF gegeben, die $[\overline{AB}] = [\overline{DE}]$, $[\overline{AC}] = [\overline{DF}]$ und $\angle BAC \cong \angle EDF$ erfüllen. Dann sind die beiden Dreiecke ,,*kongruent zueinander*", d.h. dann gilt auch noch $[\overline{BC}] = [\overline{EF}]$, $\angle ACB \cong \angle DFE$ und $\angle ABC \cong \angle DEF$.

Man erkennt, dass Axiom (C4) in der Tat dazu benutzt werden kann, um vorgegebene Winkel an einen beliebigen Strahl transportieren zu können. Wie in Abschnitt 3 beweist man ganz elementar mittels (C5):

Proposition 4.1 *„$\cong$" ist eine Äquivalenzrelation auf $\mathcal{W}$.*

Die Addition vorgegebener Winkel in $\mathcal{W}$ würde zu noch mehr Komplikationen führen als die Addition von Segmenten in $\mathcal{S}$. Erstens müsste zur Definition einer Summe von Winkeln wieder eine „Anordnung" der einen Winkel $\angle BAC$ definierenden Punkte A, B, C bzw. eine „Seite" des Winkels $\angle BAC$ festgelegt bzw. gewählt werden, obwohl per Definition $\angle BAC = \angle CAB$ gilt, und ausserdem kann eine Summe zulässiger Winkel den unzulässigen Winkel „180 Grad" ergeben oder auch diesen Wert überschreiten. Wir versuchen nun also erst gar nicht, eine wohldefinierte Operation „$+ : (\mathcal{W}/\cong) \times (\mathcal{W}/\cong) \longrightarrow \mathcal{W}/\cong$", ähnlich zu Definition 3.1 bzw. Bemerkung 3.2 zu konstruieren, sondern verwenden „$+$" nur als eine konventionelle Schreibweise für die Aufteilung eines vorgegebenen Winkels in zwei „kleinere Winkel":

Definition 4.1 *Sei $\angle BAC$ ein Winkel. Falls ein Strahl $\overrightarrow{AD}$ im Inneren von $\angle BAC$ liegt, so schreiben wir*

$$\angle BAC = \angle BAD + \angle DAC.$$

Da wir das starke (SWS)-Gesetz als Axiom (C6) forderten, können wir nun jedoch das Analogon des „Segment-Summen-Axioms" (C3) – welches zur Konstruktion einer Summe von Segment-Kongruenzklassen diente – für die Addition von Winkeln beweisen ! Hierfür benötigen wir zuerst den Begriff des supplementären Winkels und die darauf folgende Proposition:

Definition 4.2 *Sei $\angle BAC$ ein Winkel und D ein Punkt auf der Geraden AC mit $D*A*C$. Dann nennen wir die Winkel $\angle BAC$ und $\angle BAD$ zueinander „komplementär".*

Man beachte hierbei, dass dieser Begriff eine symmetrische Relation auf $\mathcal{W}$ ist.

Proposition 4.2 *Seien $\angle BAC$ und $\angle BAD$ bzw. $\angle B'A'C'$ und $\angle B'A'D'$ zwei Paare zueinander komplementärer Winkel. Dann gilt*

$$\angle BAC \cong \angle B'A'C' \quad \Longleftrightarrow \quad \angle BAD \cong \angle B'A'D'.$$

Beweis:
Wir nehmen

$$\angle BAC \cong \angle B'A'C' \tag{4.11}$$

an und dürfen die Punkte B', C', D' durch Punkte ersetzen, die

$$\overline{A'B'} \cong \overline{AB}, \qquad \overline{A'C'} \cong \overline{AC}, \qquad \overline{A'D'} \cong \overline{AD} \tag{4.12}$$

erfüllen. Wir können nun die Voraussetzung (4.11) mit (4.12) kombinieren, um Axiom (C6) auf das Dreieck-Paar $(ABC, A'B'C')$ anzuwenden. Wir erhalten somit die neuen Informationen:

$$\angle BCA \cong \angle B'C'A', \quad \text{und} \quad \overline{BC} \cong \overline{B'C'}. \tag{4.13}$$

Nun versuchen wir (C6) auf das Dreieck-Paar $(BCD, B'C'D')$ anzuwenden. Wegen (4.12) und $C * A * D$, $C' * A' * D'$ folgt zunächst aus (C3):

$$\overline{CD} \cong \overline{C'D'}.$$

Kombinieren wir dies mit (4.13), so erhalten wir aus (C6): $BCD \cong B'C'D'$, also insbesondere

$$\angle BDA \cong \angle B'D'A', \quad \text{und} \quad \overline{BD} \cong \overline{B'D'}.$$

Wir kombinieren dies mit $\overline{AD} \cong \overline{A'D'}$ aus (4.12) und erhalten erneut aus Axiom (C6), dass die Dreiecke BDA und $B'D'A'$ kongruent sind, also insbesondere: $\angle BAD \cong \angle B'A'D'$.

///

Definition 4.3 *Seien G_1, G_2 zwei Geraden die sich in genau einem Punkt A schneiden. Wir wählen Punkte $B * A * C$ auf G_1 und $D * A * E$ auf G_2 und nennen die beiden „gegenüberliegenden" Winkelpaare $\{\angle BAD, \angle EAC\}$, $\{\angle BAE, \angle DAC\}$ zueinander vertikal.*

Korollar 4.1 *[Euklid I.15] Zwei zueinander vertikale Winkel sind zueinander kongruent.*

Beweis:
Der Beweis folgt sofort aus Proposition 4.2 und ist eine Übungsaufgabe.

///

Proposition 4.3 *Sei $\angle BAC$ ein Winkel und $\overrightarrow{AD}$ ein Strahl im Inneren von $\angle BAC$. Seien weiterhin A', B', C' und D' vier weitere Punkte, sodass $\overrightarrow{A'B'}$ und $\overrightarrow{A'C'}$ auf verschiedenen Seiten der Geraden $A'D'$ liegen und sodass*

$$\angle D'A'C' \cong \angle DAC \qquad \wedge \qquad \angle B'A'D' \cong \angle BAD \tag{4.14}$$

gelte. Dann bilden $\overrightarrow{A'B'}$ und $\overrightarrow{A'C'}$ einen Winkel $\angle B'A'C'$, für diesen gilt

$$\angle B'A'C' \cong \angle BAC$$

und $\overrightarrow{A'D'}$ liegt im Inneren von $\angle B'A'C'$, sodass wir im Sinne von Definition 4.1 das Resultat

$$\angle B'A'D' + \angle D'A'C' \cong \angle BAD + \angle DAC$$

erhalten.

Beweis:
Nach Proposition 2.6, d.h. nach dem Crossbar-Theorem, existiert ein Schnittpunkt $\tilde{D}$ von $\overrightarrow{AD}$ mit $\overline{BC}$, der $B*\tilde{D}*C$ erfüllt. Da die Strahlen $\overrightarrow{AD}$ und $\overrightarrow{A\tilde{D}}$ übereinstimmen, dürfen wir D durch $\tilde{D}$ ersetzen bzw. OBDA D mit der zusätzlichen Eigenschaft $B * D * C$ annehmen. Wegen (C1) können wir ausserdem OBDA an die Punkte B', D' und C' die zusätzlichen Eigenschaften

$$\overline{AB} \cong \overline{A'B'}, \quad \overline{AC} \cong \overline{A'C'} \quad \text{und} \quad \overline{AD} \cong \overline{A'D'} \tag{4.15}$$

fordern. Zusammen mit den Voraussetzungen (4.14) können wir also Axiom (C6) auf die beiden Dreieck-Paare $(BAD, B'A'D')$ und $(DAC, D'A'C')$ anwenden, d.h. die Dreiecks-Kongruenzen $BAD \cong B'A'D'$ und $DAC \cong D'A'C'$ ableiten, welche uns die folgenden neuen Informationen liefern:

$$\angle ABD \cong \angle A'B'D' \quad \wedge \quad \angle BDA \cong \angle B'D'A' \quad \wedge \quad \angle ADC \cong A'D'C', \tag{4.16}$$

$$\overline{BD} \cong \overline{B'D'} \qquad \wedge \qquad \overline{DC} \cong \overline{D'C'}. \tag{4.17}$$

Wir wählen nun einen Punkt E' auf $B'D'$ mit $B' * D' * E'$. Der Winkel $\angle A'D'E'$ ist komplementär zu $\angle A'D'B'$, welcher nach (4.16) zu $\angle ADB$ kongruent ist. Somit liefert Proposition 4.2, dass $\angle A'D'E'$ kongruent zu $\angle ADC$ und wegen (4.16) auch kongruent zu $\angle A'D'C'$ sein muss. Nach Voraussetzung sind B' und C' auf verschiedenen Seiten der Geraden $A'D'$. Wegen $B' * D' * E'$ sind somit C' und E' auf der gleichen Seite der Geraden $A'D'$. Wegen (C4) impliziert daher $\angle A'D'E' \cong \angle A'D'C'$, dass D', E' und C' auf einer Geraden liegen müssen, was wiederum $B' * D' * C'$ impliziert. Zusammen mit $B * D * C$, (4.17) und (C3) können wir $\overline{BC} \cong \overline{B'C'}$ schliessen. Wir zeigen nun, dass die Punkte B', A', C' nicht kolinear sind, also ein Dreieck definieren. Angenommen, diese Behauptung wäre falsch. Zusammen mit $B' * D' * C'$ folgte hieraus, dass D', A', C' kolinear wären, was jedoch im Widerspruch dazu steht, dass B' und C' auf verschiedenen Seiten der Geraden $A'D'$ liegen. Somit sind BAC und $B'A'C'$ zwei Dreiecke, von denen wir $\overline{BC} \cong \overline{B'C'}$, $\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$ [aus (4.15)] und $\angle ABC \cong \angle ABD \cong \angle A'B'D' \cong \angle A'B'C'$ [mittels (4.16) und $B' * D' * C'$) wissen. Aus (C6) folgt daher, dass die Dreiecke BAC, $B'A'C'$ zueinander kongruent sind, was insbesondere die Behauptung $\angle B'A'C' \cong \angle BAC$ beweist. Schliesslich folgt aus $B' * D' * C'$ und aus der bewiesenen Tatsache, dass A', B', C' nicht kolinear sind, dass der Strahl $\overrightarrow{A'D'}$ im Inneren des Winkels $\angle B'A'C'$ liegt.

///

Definition 4.4 *Seien $\angle BAC$ und $\angle EDF$ zwei Winkel, so sagen wir, dass $\angle BAC$ kleiner als $\angle EDF$ ist, falls ein Strahl $\overrightarrow{DG}$ im Inneren von $\angle EDF$ existiert, sodass*

$$\angle GDF \cong \angle BAC$$

gilt. Wir schreiben hierfür:

$$\angle BAC < \angle EDF \quad \text{oder äquivalent hierzu} \quad \angle EDF > \angle BAC.$$

Proposition 4.4 *1) Falls $\alpha \cong \alpha'$ und $\beta \cong \beta'$, dann gilt:*

$$\alpha < \beta \Longleftrightarrow \alpha' < \beta'.$$

2) Falls $\alpha < \beta$ und $\beta < \gamma$, dann gilt $\alpha < \gamma$.

3) Für zwei beliebige Winkel α, β gilt genau eine der folgenden drei Möglichkeiten:

$$\alpha < \beta, \qquad \alpha \cong \beta, \qquad \alpha > \beta.$$

Beweis:

1) Wir nehmen $\angle BAC \equiv \alpha < \beta \equiv \angle EDF$ für zwei Tripel $\{A, B, C\}$, $\{D, E, F\}$ nicht-kolinearer Punkte an. Per Definition 4.4 existiert somit genau ein Strahl $\overrightarrow{DG}$ im Inneren von $\angle EDF$, der

$$\angle GDF \cong \angle BAC \tag{4.18}$$

liefert. Wegen $\beta \equiv \angle EDF \cong \beta' \equiv \angle E'D'F'$ und da $\overrightarrow{DG}$ ein Strahl im Inneren von $\angle EDF$ ist, können wir aus Aufgabe 17 (1) die eindeutige Existenz eines Strahls $\overrightarrow{D'G'}$ im Inneren von $\beta' \equiv \angle E'D'F'$ mit

$$\angle G'D'F' \cong \angle GDF$$

finden. In Kombination mit (4.18) und Proposition 4.1 folgt hieraus, dass wir die Existenz eines Strahls $\overrightarrow{D'G'}$ im Inneren von β' mit der Eigenschaft $\angle G'D'F' \cong \angle BAC$, also wegen $\alpha \cong \alpha'$ auch mit der Eigenschaft $\angle G'D'F' \cong \alpha'$ gefunden haben. Per Definition 4.4 zeigt dies gerade $\alpha' < \beta'$. Da Proposition 4.1 ebenfalls $\alpha' \cong \alpha$ und $\beta' \cong \beta$ liefert, folgt die andere Beweisrichtung per Symmetrie.

2) Aus $\angle BAC \equiv \alpha < \beta \equiv \angle EDF$ und $\angle EDF \equiv \beta < \gamma \equiv \angle IJK$ folgen zunächst per Definition die Existenz von Strahlen $\overrightarrow{DG}$ und $\overrightarrow{JH}$ im Inneren von $\angle EDF$ bzw. von $\angle IJK$, sodass
$$\angle GDF \cong \angle BAC \quad \text{und} \quad \angle HJK \cong \angle EDF \tag{4.19}$$
gilt. Da der Strahl $\overrightarrow{DG}$ im Inneren von $\angle EDF$ liegt und $\angle HJK \cong \angle EDF$ gilt, folgt aus Aufgabe 17 (1) die eindeutige Existenz eines Strahls $\overrightarrow{JP}$ im Inneren von $\angle HJK$, der $\angle PJK \cong \angle GDF$ erfüllt. Zusammen mit (4.19) und Proposition 4.1 erhalten wir somit einen Strahl $\overrightarrow{JP}$ im Inneren von $\angle HJK$, der
$$\angle PJK \cong \angle BAC \tag{4.20}$$
erfüllt. Da der Strahl $\overrightarrow{JH}$ wiederum im Inneren von $\angle IJK$ liegt, folgt aus Aufgabe 18, dass der Strahl $\overrightarrow{JP}$ insbesondere im Inneren von $\angle IJK \equiv \gamma$ liegt. Somit folgt aus (4.20) per Definition 4.4:
$$\alpha \equiv \angle BAC < \angle IJK \equiv \gamma,$$
wie erwünscht.

3) Wir geben zwei Winkel $\alpha \equiv \angle BAC$ und $\beta \equiv \angle EDF$ beliebig vor. Die Gerade DF teilt die Ebene in zwei Halbebenen auf. Nach (C4) existiert in derjenigen Halbebene, die den Punkt E enthält, genau ein Strahl $\overrightarrow{DE'}$ für den $\angle BAC \cong \angle E'DF$ gilt. Nach Aufgabe 19 erfüllt das Strahlen-Paar $\{\overrightarrow{DE}, \overrightarrow{DE'}\}$ genau eine der drei folgenden Möglichkeiten:
$$\overrightarrow{DE'} \subset I(\angle EDF), \qquad \overrightarrow{DE'} = \overrightarrow{DE}, \qquad \overrightarrow{DE} \subset I(\angle E'DF).$$
Die beiden ersten Fälle sind nach Definition 4.4, bei Beachtung von $\angle BAC \cong \angle E'DF$, $E \sim E'$ bzgl. DF und (C4), zu $\alpha \equiv \angle BAC < \angle EDF \equiv \beta$ bzw. zu $\alpha \equiv \angle BAC \cong \angle EDF \equiv \beta$ äquivalent. Der dritte Fall ist wegen $E \sim E'$ bzgl. DF, (C4) und Definition 4.4 zu $\beta \equiv \angle EDF < \angle E'DF$ äquivalent. Wegen $\beta \cong \beta$ und $\angle BAC \cong \angle E'DF$ folgt somit aus Teil (1) der Proposition, dass diese Aussage wiederum zu $\beta < \angle BAC \equiv \alpha$, also zu $\alpha > \beta$ äquivalent ist.

///

Definition 4.5 *Wir nennen einen Winkel α einen rechten Winkel, falls dieser zu einem seiner beiden komplementären Winkel kongruent ist.*

Man beachte hierbei, dass die beiden zu einem vorgegebenen Winkel α komplementären Winkel zueinander vertikal und somit nach Korollar 4.1 zueinander kongruent sind. Somit spielt es (anhand von Proposition 4.1) keine Rolle, welchen der beiden zu α komplementären Winkel man verwendet, um zu überprüfen, ob α ein rechter Winkel ist.

Proposition 4.5 *Zwei rechte Winkel sind zueinander kongruent.*

Beweis: Wir betrachten zwei Geraden Paare $\{G_1, G_2\}$, $\{G_1', G_2'\}$, die sich jeweils in den Punkten A, A' schneiden und zwei rechte Winkel $\alpha \equiv \angle CAB$ und $\alpha' \equiv \angle C'A'B'$ bilden. Per Definition sind diese kongruent zu deren komplementären Winkeln $\beta \equiv \angle CAD$, $\beta' \equiv \angle C'A'D'$, d.h. wir wissen

$$\alpha \equiv \angle CAB \cong \beta \equiv \angle CAD, \qquad \alpha' \equiv \angle C'A'B' \cong \beta' \equiv \angle C'A'D' \tag{4.21}$$

wobei D, D' zwei beliebige Punkte auf G_1, G_1' mit $D * A * B$ und $D' * A' * B'$ seien. Angenommen, α ist nicht zu α' kongruent. Dann gilt per Proposition 4.4 entweder $\alpha < \alpha'$ oder $\alpha > \alpha'$. Wir nehmen OBDA $\alpha < \alpha'$ an und erhalten per Definition einen Strahl $\overrightarrow{A'E'}$ im Inneren von $\alpha' \equiv \angle C'A'B'$ mit $\alpha \cong \angle E'A'B'$. Wir zeigen nun, dass der Strahl $\overrightarrow{A'C'}$ im Inneren des Winkels $\angle E'A'D'$ liegen muss, also

$$\overrightarrow{A'C'} \subset I(\angle E'A'D'). \tag{4.22}$$

Angenommen, diese Aussage wäre falsch. Da die Punkte E', C' per Konstruktion insbesondere auf derselben Seite bzgl. der Geraden $G_1' = A'B' = A'D'$ liegen, ergäben sich nach Aufgabe 19 nur die beiden Fälle: $\overrightarrow{A'C'} = \overrightarrow{A'E'}$, $\overrightarrow{A'E'}$ liegt im Inneren des Winkels $\angle C'A'D'$. Im ersten Fall erhielten wir $\alpha' \equiv \angle C'A'B' = \angle E'A'B' \cong \alpha$, im Widerspruch zu $\alpha < \alpha'$ und Proposition 4.4. Im zweiten Fall gilt $E' \sim D'$ bzgl. der Geraden $C'A'$, also $E' \not\sim B'$ bzgl. der Geraden $C'A'$ wegen $D' * A' * B'$. Somit läge der Strahl $\overrightarrow{A'E'}$ nicht im Inneren des Winkels $\angle C'A'B'$, was jedoch der Wahl des Strahls $\overrightarrow{A'E'}$ widerspricht. Somit ist (4.22) korrekt. Wegen $\beta' \equiv \angle C'A'D'$ impliziert dies

$$\beta' < \angle E'A'D'. \tag{4.23}$$

Nun ist $\angle E'A'D'$ zu $\angle E'A'B'$ komplementär und $\angle E'A'B' \cong \alpha$. Da α zu β komplementär ist, folgt aus Proposition 4.2: $\angle E'A'D' \cong \beta$. Zusammen mit (4.23) und Proposition 4.4 (1) folgt somit: $\beta' < \beta$. Aus (4.21) und erneut Proposition 4.4 folgt somit auch $\alpha' < \alpha$, was jedoch $\alpha < \alpha'$ widerspricht.

///

5 Hilbert-Ebenen

In diesem Abschnitt werden wir nachzuprüfen beginnen, ob und wie sich die ersten Gesetze Euklids in einer Geometrie mit den 13 Axiomen (I1)-(C6) nachweisen lassen.

Definition 5.1 *Wir nennen eine Geometrie ($\mathcal{P}$,$\mathcal{G}$), in der die 13 Hilbertschen Axiome (I1)-(C6) gelten, eine Hilbert-Ebene.*

Das erste Euklidische Gesetz I.1 besagt, dass man zu einem beliebig vorgegebenen Segment $\overline{AB}$ einen Punkt $C \notin AB$ konstruieren kann, der

$$\overline{AC} \cong \overline{AB} \qquad \text{und} \qquad \overline{BC} \cong \overline{AB}$$

erfüllt, also dass sich auf dem Segment $\overline{AB}$ ein gleichseitiges Dreieck errichten lässt. Euklid beweist dieses Gesetz, indem er mittels eines Zirkels die Kreise $\Gamma_{\overline{AB}}(A)$ und $\Gamma_{\overline{AB}}(B)$ konstruiert und C als einen der beiden Schnittpunkte wählt. Aus unserer bisher entwickelten Theorie lässt sich jedoch $\Gamma_{\overline{AB}}(A) \cap \Gamma_{\overline{AB}}(B) \neq \emptyset$ nicht ableiten (weder mit noch ohne Hinzunahme von Axiom (P)). Somit können wir bereits das erste Gesetz von Euklid nicht verifizieren, falls wir kein weiteres Axiom postulieren, welches unter bestimmten Voraussetzungen an zwei verschiedene Kreise die Existenz mindestens eines Schnittpunktes fordert.
Euklids Gesetz (I.2) ist exakt unser Axiom (C1), und Euklids Gesetz (I.3) besagt, dass man bei Vorgabe zweier vorgegebener Segmente $\overline{AB}$, $\overline{CD}$ mit $\overline{AB} > \overline{CD}$ einen Punkt $E \in \overline{AB}$ mit $\overline{CD} \cong \overline{AE}$ finden kann. Dies entspricht gerade unserer Definition 3.3 für die Begriffe ,,$<$" bzw. ,,$>$".
Euklids Gesetz (I.4) ist gerade unser Axiom (C6).
Euklids Gesetz (I.5) können wir nun beweisen, und zwar auf zwei völlig verschiedene Weisen:

Proposition 5.1 *[Euklid I.5] Sei ABC ein Dreieck mit der Eigenschaft $\overline{AB} \cong \overline{AC}$. Dann gilt*

$$\angle ABC \cong \angle ACB.$$

Beweis 1 [Pappus, nach Christi Geburt]: Wir betrachten das Paar von Dreiecken (ABC, ACB). Wegen $\overline{AB} \cong \overline{AC}$ bzw. $\overline{AC} \cong \overline{AB}$ und $\angle BAC \cong \angle CAB$ sind alle Bedingungen von Axiom (C6), d.h. von (SWS), erfüllt, wenn wir dort $DEF := ACB$ wählen. Wir dürfen somit aus (C6) schliessen, dass die Dreiecke ABC und ACB zueinander kongruent sind, woraus insbesondere $\angle ABC \cong \angle ACB$ folgt.

///

Beweis 2 [Euklid, vor Christi Geburt]: Wir wählen einen beliebigen Punkt F auf $\overrightarrow{AB}$ mit $A * B * F$ und auf $\overrightarrow{AC}$ den eindeutigen Punkt G mit $\overline{AG} \cong \overline{AF}$. Zusammen mit $\overline{AB} \cong \overline{AC}$ und $A * B * F$ können wir mittels Proposition 3.4 die Anordnung $A * C * G$ und

$$\overline{BF} \cong \overline{CG} \tag{5.24}$$

folgern. Desweiteren haben die Dreiecke AFC, AGB den gemeinsamen Winkel $\angle BAC$ und ausserdem die kongruenten Seiten $\overline{AB} \cong \overline{AC}$ und $\overline{AG} \cong \overline{AF}$. Somit folgt aus (C6), dass diese Dreiecke kongruent sind, was insbesondere

$$\overline{FC} \cong \overline{BG}, \qquad \angle AFC \cong \angle AGB \qquad \text{und} \qquad \angle ABG \cong \angle ACF \tag{5.25}$$

impliziert. Zusammen mit (5.24) können wir erneut (C6), nämlich auf die ,,kleinen" Dreiecke FBC und GCB anwenden. Aus deren Kongruenz entnehmen wir insbesondere $\angle CBG \cong \angle BCF$. Wegen $A * C * G$ und $A * B * F$ liegt der Strahl $\overrightarrow{BC}$ im Inneren des Winkels $\angle ABG$ und der Strahl $\overrightarrow{CB}$ im Inneren des Winkels $\angle ACF$. Es gilt also

$$\angle ABG = \angle ABC + \angle CBG \qquad \text{und} \qquad \angle ACF = \angle ACB + \angle BCF.$$

Da wir sowohl $\angle ABG \cong \angle ACF$ aus (5.25), als auch $\angle CBG \cong \angle BCF$ wissen, folgt aus der Winkel-Kürzungsregel aus Aufgabe 17, dass $\angle ABC \cong \angle ACB$ gilt, wie erwünscht.

///

Wir beweisen nun die Umkehrung dieser Proposition:

Proposition 5.2 *[Euklid I.6] Sei ABC ein Dreieck mit der Eigenschaft $\angle ABC \cong \angle ACB$. Dann gilt*

$$\overline{AB} \cong \overline{AC}.$$

Beweis: Angenommen, es gälte $\overline{AB} \ncong \overline{AC}$, so dürfen wir wegen Proposition 3.6 OBDA $\overline{AB} < \overline{AC}$ annehmen. Per Definition können wir daher auf dem Strahl $\overrightarrow{CA}$ einen Punkt D mit $C * D * A$ und $\overline{AB} \cong \overline{CD}$ wählen. Zusammen mit $\angle ABC \cong \angle ACB$ folgt aus (C6) die Kongruenz der Dreiecke BAC und CDB. Insbesondere folgt hieraus: $\angle ACB \cong \angle DBC$, also auch

$$\angle ABC \cong \angle DBC. \tag{5.26}$$

Wegen $C * D * A$ liegen A und D auf derselben Seite der Geraden BC, sodass wir aus (5.26) anhand von (C4) $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{BD}$ ableiten können. Somit wären die Tripel $\{B, A, D\}$ und $\{C, D, A\}$ kolinear, woraus die Kolinearität von $\{A, B, C\}$ folgte. Widerspruch.

///

Mit Hilfe dieses Gesetzes beweisen wir nun

Proposition 5.3 *[Gleichschenkliges Dreieck] Sei $\overline{AB}$ ein beliebiges Segment, so existiert ein ,,gleichschenkliges Dreieck mit Basis $\overline{AB}$", d.h. es existiert ein Punkt $C \in \mathcal{P}$, sodass ABC ein Dreieck mit*

$$\overline{AC} \cong \overline{BC}$$

ist.

Beweis: Wir wählen einen beliebigen Punkt $C \notin AB$ und betrachten das Dreieck ABC. Falls $\angle CAB \cong \angle CBA$ gilt, so folgt die Behauptung aus Euklid I.6. Nehmen wir also an, es gälte $\angle CAB < \angle CBA$. In diesem Fall existiert ein Strahl $\overrightarrow{BE}$ im Inneren von $\angle CBA$, für den

$$\angle CAB \cong \angle EBA$$

gilt. Nach dem Crossbar-Theorem existiert ein Punkt $D \in \overline{AC}$ mit $A * D * C$, in welchem der Strahl $\overrightarrow{BE}$ das Segment $\overline{AC}$ durchkreuzt. Wegen $A * D * C$ können die Punkte A, D, B nicht kolinear sein. Somit hat das Dreieck ABD die Eigenschaft $\angle DAB = \angle DBA$, und wir erhalten erneut aus Euklid I.6 die Behauptung unserer Proposition.

///

Nun beweisen wir das Gesetz Euklid I.8, d.h. das nützliche (SSS)-Kongruenzgesetz:

Proposition 5.4 *[(SSS)-Axiom/Euklid I.8] Seien ABC und $A'B'C'$ zwei Dreiecke mit*

$$\overline{AB} \cong \overline{A'B'}, \qquad \overline{AC} \cong \overline{A'C'} \qquad \text{und} \qquad \overline{BC} \cong \overline{B'C'},$$

dann sind ABC und $A'B'C'$ zueinander kongruent.

Beweis: Wir teilen die Ebene mittels der Geraden $A'C'$ auf und konstruieren mittels (C4) auf der zu B' gegenüberliegenden Seite einen eindeutigen Strahl $\overrightarrow{A'X}$ mit Spitze A' und $\angle C'A'X \cong \angle BAC$. Mittels (C1) wählen wir auf diesem Strahl den eindeutigen Punkt B'', der $\overline{A'B''} \cong \overline{AB}$ erfüllt. Mittels (C6) folgt, dass die Dreiecke ABC und $A'B''C'$ kongruent sind. Insbesondere erhalten wir die Kongruenzen

$$\overline{A'B''} \cong \overline{AB} \cong \overline{A'B'} \qquad \text{und} \qquad \overline{B''C'} \cong \overline{BC} \cong \overline{B'C'}. \tag{5.27}$$

Nun ziehen wir die Gerade $B'B''$ und unterscheiden vier Fälle: 1.) $A' \not\sim C'$ bzgl. $B'B''$, 2.) $A' \sim C'$ bzgl. $B'B''$, 3.) $B' * A' * B''$, 4.) $B' * C' * B''$.
Fall 1) Aus Aufgabe 19 folgt, dass im ersten Fall der Strahl $\overrightarrow{B'B''}$ im Inneren von $\angle A'B'C'$ liegt. Aus (5.27) und Euklid I.5 folgt, dass die Dreiecke $B'A'B''$ und $B'C'B''$ übereinstimmende „Basiswinkel" an ihrer übereinstimmenden Basis $\overline{B'B''}$ haben, also dass

$$\angle A'B'B'' \cong \angle A'B''B' \qquad \text{und} \qquad \angle C'B'B'' \cong \angle C'B''B'$$

gilt. Da $\overrightarrow{B'B''}$ im Inneren von $\angle A'B'C'$ liegt, können wir hieraus mittels Proposition 4.3 schliessen: $\angle A'B'C' \cong \angle A'B''C'$. Da wir die Dreiecks-Kongruenz zwischen ABC und $A'B''C'$ bereits zeigten, erhalten wir hieraus:

$$\angle A'B'C' \cong \angle ABC.$$

Zusammen mit den Voraussetzungen $\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$ und $\overline{BC} \cong \overline{B'C'}$ erhalten wir die Behauptung der Proposition aus (C6). Der zweite Fall lässt sich auf ähnliche Weise behandeln, indem man die Kongruenzerhaltung bei Winkeladdition aus Proposition 4.3 mit der Kongruenzerhaltung bei Winkelsubtraktion aus Aufgabe 17 ersetzt. Die beiden verbleibenden Fälle lassen sich wiederum wie Fall 1 mittels Euklid I.5 und (C6) erfolgreich zum Ziel führen.

///

Wir leiten hieraus ab:

Proposition 5.5 *[Euklid I.7] Seien ABC und ABC' zwei Dreiecke mit übereinstimmender Seite $\overline{AB}$ und mit der Eigenschaft, dass C und C' auf derselber Seite von AB liegen. Ausserdem setzen wir*

$$\overline{AC} \cong \overline{AC'} \qquad \text{und} \qquad \overline{BC} \cong \overline{BC'}$$

voraus. Dann gilt $C = C'$.

Beweis: Aus (SSS) folgern wir sofort, dass die beiden Dreiecke zueinander kongruent sind, sodass insbesondere $\angle CAB = \angle C'AB$ gilt. Da C und C' auf derselben Seite von AB liegen, folgt hieraus wegen (C4): $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AC'}$. Zusammen mit $\overline{AC} \cong \overline{AC'}$ erhalten wir aus (C1): $C = C'$.

///

Definition 5.2 *Sei ABC ein Dreieck. Wir nennen die drei Winkel $\angle ABC$, $\angle BCA$ und $\angle CAB$ seine drei „Innenwinkel", und alle zu diesen Winkeln komplementären Winkel die „Aussenwinkel" von ABC.*

Proposition 5.6 *[Euklid I.16] Sei ABC ein beliebiges Dreieck. Ein beliebiger Aussenwinkel β von ABC ist grösser als jeder der beiden Innenwinkel von ABC, die zu β nicht komplementär sind.*

Beweis: Wir wählen einen Punkt D auf der Geraden BC mit $B * C * D$ und zeigen:

$$\angle ACD > \angle BAC. \tag{5.28}$$

Wir bezeichnen mit E den Mittelpunkt von $\overline{AC}$ und wählen auf dem Strahl $\overrightarrow{BE}$ den eindeutigen Punkt F, der $B * E * F$ und $\overline{BE} \cong \overline{EF}$ erfüllt. Auf die beiden entstehenden Dreiecke EAB und ECF kann wegen $\overline{BE} \cong \overline{EF}$, $\overline{CE} \cong \overline{AE}$ und wegen Korollar 4.1 (Euklid I.15) (SWS) angewandt werden, woraus wir insbesondere $\angle BAC = \angle BAE \cong \angle ECF = \angle ACF$ schliessen. Wenn nun zu zeigen gelingen sollte, dass der Strahl $\overrightarrow{CF}$ im Inneren des Winkels $\angle ACD$ liegt, so hätten wir $\angle BAC \cong \angle ACF < \angle ACD$, also (5.28) bereits gezeigt. Wegen $B*C*D$ liegen B und D auf verschiedenen Seiten von AC. Wegen $B * E * F$ und $E \in AC$ liegen B und F ebenfalls auf verschiedenen Seiten von AC. Nach Proposition 2.2 liegen somit F und D auf derselben Seite von AC, wie erwünscht. Desweiteren liegen wegen $B * E * F$ F und E auf derselben Seite von BC, und ebenso A und E wegen $A*E*C$. Somit folgt erneut aus Proposition 2.2, dass A und F auf derselben Seite von BC bzw. von BD liegen, was $F \in I(\angle ACD)$ beweist.

///

Euklids Gesetz I.17 ist nur eine Umformulierung von I.16, wenn man sich auf die Konvention einlassen möchte, dass für zwei zueinander komplementäre Winkel α, β ,,deren Summe" zur ,,Summe zweier rechter Winkel" kongruent ist. Beide Terme sind jedoch in unserer Theorie streng genommen unsinnig, sodass wir I.17 einfach vergessen und stattdessen I.16 in unsere Trickkiste aufnehmen sollten. Wir kommen nun zu

Proposition 5.7 *[Euklid I.18] Sei ABC ein beliebiges Dreieck mit $\overline{AC} > \overline{AB}$. Dann folgt $\angle ABC > \angle BCA$.*

Beweis: Per Voraussetzung existiert ein Punkt $D \in \overline{AC}$ mit $A * D * C$ und $\overline{AD} \cong \overline{AB}$. Das Dreieck BAD ist somit gleichschenklig, sodass wir aus Euklid I.5

$$\angle ABD \cong \angle ADB \tag{5.29}$$

schliessen können. Desweiteren wissen wir

$$\angle ADB > \angle ACB \tag{5.30}$$

aus Euklid I.16. Wegen $A*D*C$ liegt D im Inneren des Winkels $\angle ABC$, und wir können somit per Definition 4.4

$$\angle ABD < \angle ABC,$$

also zusammen mit (5.29) und (5.30) $\angle ABC > \angle ADB > \angle ACB$ schliessen.

///

Hieraus folgt schnell die umgekehrte Konklusion:

Proposition 5.8 *[Euklid I.19] Sei ABC ein beliebiges Dreieck mit $\angle ABC > \angle BCA$. Dann folgt*

$$\overline{AC} > \overline{AB}.$$

Beweis: Angenommen, dies wäre falsch, so gälte entweder $\overline{AC} \cong \overline{AB}$ oder $\overline{AC} < \overline{AB}$. Im ersten Fall folgte aus Euklid I.5: $\angle ABC \cong \angle BCA$, und im zweiten Fall folgte aus Euklid I.18: $\angle ABC < \angle BCA$. Beides widerspricht jedoch unserer Voraussetzung „$\angle ABC > \angle BCA$".

///

Wir beweisen nun die allgemeine „Dreiecks-Ungleichung" in einer beliebigen Hilbertebene:

Proposition 5.9 *[Euklid I.20] Sei ABC ein beliebiges Dreieck. Die Summe der „Längen" zweier beliebig gewählter Segmente von ABC ist grösser als die „Länge" des dritten Segments.*

Beweis: Wir beweisen OBDA nur

$$[\overline{BC}] < [\overline{BA}] + [\overline{AC}].$$

Mittels (C1) wählen wir auf dem Strahl $\overrightarrow{BA}$ den eindeutigen Punkt D, der $B * A * D$ und

$$\overline{AD} \cong \overline{AC} \tag{5.31}$$

erfüllt. Wir erhalten hiermit das gleichschenklige Dreieck CAD und schliessen mittels (I.5):

$$\angle ADC \cong \angle ACD. \tag{5.32}$$

Aus $B * A * D$ folgt, dass $A \sim D$ bzgl. BC und $A \sim B$ bzgl. CD gilt, also dass A im Inneren des Winkels $\angle BCD$ liegt. Hieraus folgt $\angle ACD < \angle BCD$, also kombiniert mit (5.32): $\angle BDC = \angle ADC < \angle BCD$. Wenden wir nun Euklid I.19 auf das Dreieck BDC an, so erhalten wir:

$$\overline{BC} < \overline{BD},$$

also wegen $B * A * D$, Bemerkung 3.2 und Proposition 3.6:

$$[\overline{BC}] < \overline{BA} \oplus \overline{AD}.$$

Zusammen mit (5.31) erhalten wir aus Definition 3.2 und Proposition 3.3:

$$[\overline{BC}] < [\overline{BA}] + [\overline{AD}] = [\overline{BA}] + [\overline{AC}].$$

///

Wir kommen nun zu den beiden Kongruenz-Gesetzen (WSW) und (WWS), die in Euklids Gesetz I.26 zusammengefasst sind.

Proposition 5.10 *[Euklid I.26, (WSW) und (WWS)] Seien ABC und $A'B'C'$ zwei Dreiecke, die entweder*

$$\angle BAC \cong \angle B'A'C' \qquad \wedge \qquad \angle ACB \cong \angle A'C'B' \qquad \wedge \qquad \overline{AC} \cong \overline{A'C'} \tag{5.33}$$

oder

$$\angle ABC \cong \angle A'B'C' \qquad \wedge \qquad \angle BAC \cong \angle B'A'C' \qquad \wedge \qquad \overline{AC} \cong \overline{A'C'} \tag{5.34}$$

erfüllen, dann gilt die Dreiecks-Kongruenz $ABC \cong A'B'C'$.

Beweis:

1) Wir versuchen, mittels der Voraussetzungen (5.33) $\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$ per Widerspruch zu beweisen. Angenommen, es gälte $\overline{AB} < \overline{A'B'}$. In diesem Fall können wir genau einen Punkt $B^* \in \overline{A'B'}$ mit $A' * B^* * B'$ und $\overline{A'B^*} \cong \overline{AB}$ bestimmen. Die Dreiecke $A'B^*C'$ und ABC erfüllen wegen $\overline{A'B^*} \cong \overline{AB}$ und (5.33) alle Bedingungen von (SWS) und sind daher kongruent. Insbesondere erhalten wir $\angle A'C'B^* \cong \angle ACB$ also erneut kombiniert mit (5.33):
$$\angle A'C'B^* \cong \angle A'C'B'. \tag{5.35}$$
Wegen $A' * B^* * B'$ liegen B' und B^* auf derselben Seite der Geraden $A'C'$, sodass wir aus (5.35) und (C4) $C'B^* = C'B'$, also die Kolinearität von $\{C', B^*, B'\}$ erhalten. Da auch A', B^*, B' kolinear sind, folgt die Kolinearität von $\{A', B', C'\}$. Widerspruch. Analog erhält man aus der Annahme $\overline{AB} > \overline{A'B'}$ die Kolinearität von $\{A, B, C\}$, indem man auf $\overline{AB}$ den eindeutigen Punkt B^* mit $\overline{A'B'} \cong \overline{AB^*}$ wählt und obige Argumentation wiederholt. Aus $\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$, (5.33) und (SWS) erhalten wir nun die Behauptung „$ABC \cong A'B'C'$".

2) Wir versuchen nun, mittels der Voraussetzungen (5.34) $\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$ per Widerspruch zu beweisen. Angenommen, es gälte $\overline{AB} < \overline{A'B'}$. In diesem Fall können wir genau einen Punkt $B^* \in \overline{A'B'}$ mit $A' * B^* * B'$ und $\overline{A'B^*} \cong \overline{AB}$ bestimmen. Die Dreiecke $A'B^*C'$ und ABC erfüllen wegen $\overline{A'B^*} \cong \overline{AB}$ und (5.34) alle Bedingungen von (SWS) und sind daher kongruent. Insbesondere erhalten wir $\angle A'B^*C' \cong \angle ABC$, also erneut kombiniert mit (5.34):
$$\angle A'B^*C' \cong \angle A'B'C'. \tag{5.36}$$
Wegen $A' * B^* * B'$ ist $B^*B'C'$ ein Dreieck, für welches $\angle A'B^*C'$ ein Aussenwinkel ist. Da dieser seinem Innenwinkel $\angle B^*B'C' = \angle A'B'C'$ gegenüberliegt, erhalten wir aus Proposition 5.6, d.h. aus Euklid I.16: $\angle A'B^*C' > \angle A'B'C'$, im Widerspruch zu (5.36). Analog erhält man bei Annahme von $\overline{AB} > \overline{A'B'}$ diesen Widerspruch im Dreieck ABC, indem man den Punkt $B^* \in \overline{AB}$ mit $A * B^* * B$ und $\overline{AB^*} \cong \overline{A'B'}$ wählt und obige Argumentation wiederholt. Aus $\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$, (5.34) und (SWS) erhalten wir erneut die Behauptung „$ABC \cong A'B'C'$".

///

Man beachte, dass es kein Gesetz (WSS) geben kann, wie man mittels einfacher Gegenbeispiele sehen kann.

Proposition 5.11 *[Euklid I.27] Sei $(\mathcal{P},\mathcal{G})$ eine beliebige Hilbert-Ebene. Desweiteren seien $G \neq G'$ zwei Geraden aus $\mathcal{G}$, A, B und B', C' Paare auf G und G' und L die Gerade durch B und B'. Falls auserdem $A \not\sim C'$ bzgl. L und*
$$\angle ABB' \cong \angle BB'C' \tag{5.37}$$
gilt, so sind G und G' parallel.

Beweis: Der Beweis folgt sofort per Widerspruch, also aus der Annahme $G \cap G' \neq \emptyset$ in Kombination mit Euklid I.15, I.16 und der Voraussetzung (5.37).

$///$

Wir kommen nun zum ersten Euklidischen Gesetz, zu dessen Beweis wir das Parallelen-Axiom benötigen:

Proposition 5.12 *[Euklid I.29] Sei ($\mathcal{P}$,$\mathcal{G}$) eine Hilbert-Ebene, in der das Parallelen-Axiom (P) gelte. Desweiteren seien $G \neq G'$ zwei parallele Geraden aus $\mathcal{G}$, A, B und B', C' Paare auf G und G', und L die Gerade durch B und B'. Falls ausserdem $A \not\sim C'$ bzgl. L gilt, dann folgt*

$$\angle ABB' \cong \angle BB'C'.$$

Beweis: Angenommen, die Behauptung wäre falsch. Wir nehmen OBDA $\angle ABB' < \angle BB'C'$ an. Per Definition existiert genau ein Strahl $r = \overline{B'D}$ mit Spitze B' im Inneren des Winkels $\angle BB'C'$, der mit L einen zu $\angle ABB'$ kongruenten Winkel einschliesst, d.h. es gälte:

$$\angle BB'D \cong \angle ABB'. \tag{5.38}$$

Bezeichne $R := B'D$ die durch B' und D eindeutig bestimmte Gerade. Da r im Inneren des Winkels $\angle BB'C'$ liegt, kann R nicht mit $G' = B'C'$ übereinstimmen. Desweiteren wissen wir: $D \sim C'$ bzgl. $BB' = L$ und $A \not\sim C'$ bzgl. L per Voraussetzung, also auch

$$A \not\sim D \qquad \text{bzgl.} \quad L. \tag{5.39}$$

Anhand von (5.38) und (5.39) sehen wir also, dass das Paar von Geraden G, R, zusammen mit ihren Punkte-Paaren A, B und B', D genau in der Weise von L geschnitten wird, wie es in Proposition 5.11, d.h. in Euklid I.27 gefordert wird. Euklid I.27 liefert somit: $R \parallel G$. Da wir auch $B' \in R$, $B' \in G'$ und $G' \parallel G$ wissen, liefert das Parallelen-Axiom: $R = G'$. Widerspruch. Analog wird $\angle ABB' > \angle BB'C'$ mittels Euklid I.27 und Axiom (P) zum Widerspruch geführt, sodass die Behauptung aus Teil 3 von Proposition 4.4 folgt.

$///$

Euklids Gesetz I.30 besagt, dass Parallelität eine transitive Relation auf $\mathcal{G}$ ist. In Aufgabe 4 zeigten wir, dass dies (zusammen mit der Symmetrie und Reflexivität der Parallelität) genau dann zutrifft, wenn das (schwache) Parallelen-Axiom (P) in ($\mathcal{P}$,$\mathcal{G}$) gilt.
Euklids Gesetz I.31 besagt, dass man zu jeder Geraden G und zu jedem Punkt P (der Euklidischen Ebene) mindestens eine Parallele G' zu G durch den Punkt P konstruieren kann. Wir bestätigten diese Aussage in Übungsaufgabe 25 für eine beliebige Hilbert-Ebene mittels Kombination der Konstruktion von Senkrechten aus Euklid I.11 und I.12 und mittels Euklid I.27. Das Parallelen-Axiom wird hierbei nicht benötigt.

Proposition 5.13 *[Euklid I.32] Sei ($\mathcal{P}$,$\mathcal{G}$) eine Hilbert-Ebene, in der das Parallelen-Axiom (P) gelte, und ABC ein Dreieck in $\mathcal{P}$ mit Innenwinkeln α, β, γ in den Ecken A, B, C. Dann ist γ komplementär zu einer Summe zweier Winkel α', β', die $\alpha' \cong \alpha$ und $\beta' \cong \beta$ erfüllen.*

Beweis: Nach Euklid I.31 und (P) existiert genau eine Parallele G zu AB durch den Punkt C. Da ABC ein Dreieck ist, gilt $G \cap AB = \emptyset$. Wir können zwei Punkte B', A' auf G mit $B' * C * A'$ und $B' \not\sim B$ bzgl. AC wählen. Diese letzte Festlegung ist zu

$$A' \sim B \qquad \text{bzgl.} \quad AC \tag{5.40}$$

äquivalent. Wir zeigen zuerst:

$$A \not\sim A' \qquad \text{bzgl.} \quad BC. \tag{5.41}$$

Angenommen, dies wäre falsch, d.h. angenommen:

$$A \sim A' \qquad \text{bzgl.} \quad BC.$$

Wegen Aufgabe 19 und da $\{A, B, C\}$ nicht kolinear ist, können demnach genau zwei Fälle eintreten: 1.) $\overrightarrow{CA} \subset I(\angle BCA')$, 2.) $\overrightarrow{CA'} \subset I(\angle BCA)$. Im ersten Fall folgt aus dem Crossbar-Theorem: $\overline{A'B} \cap \overrightarrow{CA} \neq \emptyset$, also insbesondere: $A' \not\sim B$ bzgl. CA. Dies widerspricht jedoch (5.40). Im zweiten Fall erhalten wir erneut aus dem Crossbar-Theorem: $\overline{AB} \cap \overrightarrow{CA'} \neq \emptyset$, also insbesondere, dass $G = CA'$ die Gerade AB schneidet, was jedoch $G \cap AB = \emptyset$ widerspricht. Somit gilt (5.41). Wir wählen noch einen Punkt D auf AC mit $A*C*D$, sodass gerade $\angle DCA'$ der zu $\angle B'CA$ vertikale Winkel ist. Aus $G \parallel AB$, $B' \not\sim B$ bzgl. AC und Euklid I.29 erhalten wir: $\angle B'CA \cong \angle CAB = \alpha$. Zusammen mit Euklid I.15, d.h. Korollar 4.1, schliessen wir:

$$\angle DCA' \cong \alpha. \tag{5.42}$$

Analog erhalten wir aus $G \parallel AB$, (5.41) und Euklid I.29:

$$\angle A'CB \cong \angle ABC = \beta. \tag{5.43}$$

Wegen (5.41) und $A * C * D$ folgt:

$$D \sim A' \qquad \text{bzgl.} \quad BC.$$

Zusammen mit (5.40) und $AC = AD$ folgt: $A' \in I(DCB)$, und wir erhalten per Definition 4.1:

$$\angle DCB = \angle DCA' + \angle A'CB.$$

Wegen $A * C * D$ und $\gamma = \angle ACB$ ist γ per Definition 4.2 zu $\angle DCB$, also zu $\angle DCA' + \angle A'CB$, komplementär, sodass die Behauptung der Proposition aus (5.42) und (5.43) folgt.

///

Bemerkung 5.14 *Wenn wir der sallopen Konvention zustimmen, dass die Summe zweier zueinander komplementärer Winkel γ, γ^c zur „Summe zweier rechter Winkel", bzw. zu „180 Grad", kongruent ist, und wenn wir die Aussage von Proposition 4.3 derart „dehnen", dass angeblich „$+ : (\mathcal{W}/\cong) \times (\mathcal{W}/\cong) \longrightarrow \mathcal{W}/\cong$" eine wohldefinierte Operation ist, so besagte Proposition 5.13 gerade, dass in jeder Hilbert-Ebene unter Annahme des Parallelen-Axioms (P) die Summe der Innenwinkel α, β, γ eines beliebigen Dreiecks ABC anhand von*

$$\alpha + \beta + \gamma \cong (\alpha + \beta) + \gamma \cong \gamma^c + \gamma \cong \perp + \perp = 180 \text{ Grad}$$

bekannt, insbesondere unabhängig von ABC ist.

6 Tangenten an Kreise, tangentiale Kreise und Durchschnitte von Geraden und Kreisen

Wir erinnern an die Definition des Kreises aus Aufgabe 15:

Definition 6.1 *Sei $(\mathcal{P}, \mathcal{G})$ eine Hilbert-Ebene. Zu zwei verschiedenen Punkten $O \neq A$ aus $\mathcal{P}$ nennen wir die Punktemenge*

$$\Gamma(O, A) := \{B \in \mathcal{P} \mid \overline{\mathcal{OB}} \cong \overline{\mathcal{OA}}\}.$$

den „Kreis" mit „Mittelpunkt" O und „Radius" $[\overline{OA}]$.

Wir bemerken als erstes: $A \in \Gamma(O, A)$, also insbesondere $\Gamma(O, A) \neq \emptyset$, und beweisen:

Proposition 6.1 *Der Mittelpunkt und der Radius eines beliebigen Kreises Γ sind eindeutig durch die Punktemenge Γ bestimmt.*

Beweis: Wir geben $\Gamma = \Gamma(O, A) = \Gamma(O', A')$ für zwei Paare $O \neq A$ und $O' \neq A'$ vor und nehmen $O \neq O'$ an. Die Gerade OO' schneidet Γ in genau 2 Punkten C, D mit $C{*}O{*}D$ und $\overline{OC} \cong \overline{OD}$. Da auch O' ein Mittelpunkt von Γ ist, gilt per Symmetrie ebenfalls: $C * O' * D$ und $\overline{O'C} \cong \overline{O'D}$. Wir nehmen nun OBDA $C * O * O'$ an. Zusammen mit $C * O' * D$ folgt $O * O' * D$ aus Aufgabe 6 (ii). Insgesamt folgt hieraus:

$$\overline{OC} < \overline{O'C} \cong \overline{O'D} < \overline{OD},$$

also $\overline{OC} < \overline{OD}$ nach Proposition 3.6, im Widerspruch zu $\overline{OC} \cong \overline{OD}$. Wegen $\Gamma = \Gamma(O, A) = \Gamma(O', A')$ sind $[\overline{OA}]$ und $[\overline{O'A'}]$ zwei Radien von Γ, und wir erhalten aus $O = O'$ und $A, A' \in \Gamma$: $[\overline{O'A'}] = [\overline{OA'}] = [\overline{OA}]$.

///

Bemerkung 6.2 *Bezeichne $\mathcal{K}$ die Menge aller Kreise in $\mathcal{P}$ und $\mathcal{D} := \{(\mathcal{O}, \mathcal{A}) \in \mathcal{P} \times \mathcal{P} | \, \mathcal{O} = \mathcal{A}\}$ die Diagonale in $\mathcal{P} \times \mathcal{P}$ Wir können per Definition 6.1 zu jedem $\Gamma \in \mathcal{K}$ ein Paar $(O, A) \in (\mathcal{P} \times \mathcal{P}) \setminus \mathcal{D}$ mit $\Gamma = \Gamma(O, A)$ angeben. Fassen wir Γ als eine Abbildung $\Gamma : (\mathcal{P} \times \mathcal{P}) \setminus \mathcal{D} \to \mathcal{K}$ auf, die jedem Paar $(O, A) \in (\mathcal{P} \times \mathcal{P}) \setminus \mathcal{D}$ den Kreis $\Gamma(O, A)$ zuordnet, und bezeichnen wir mit $pr_1 : \mathcal{P} \times \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ die Projektion auf den ersten Faktor, so liefert die obige Proposition 6.1, dass es eine Abbildung $M : \mathcal{K} \to \mathcal{P}$ gibt, die $M \circ \Gamma = pr_1$ erfüllt, d.h. die jedem Kreis seinen (eindeutigen) Mittelpunkt zuordnet. In der Tat sehen wir nochmals mittels $M \circ \Gamma = pr_1$: aus $\Gamma(O, A) = \Gamma(O', A')$ folgt*

$$O = (M \circ \Gamma)(O, A) = (M \circ \Gamma)(O', A') = O',$$

woraus dann auch die Eindeutigkeit des Radius' $R(\Gamma) := [\overline{OA}] \in \mathcal{S}/\cong$ eines vorgelegten Kreises Γ, mit beliebigem $A \in \Gamma$, folgt.

Dies ermöglicht die folgende Definition:

Definition 6.2 *Sei $(\mathcal{P}, \mathcal{G})$ eine Hilbert-Ebene und Γ ein beliebiger Kreis in $\mathcal{P}$. Ist O sein Mittelpunkt und $[\overline{OA}]$ sein Radius, also $\Gamma = \Gamma(O, A)$, so definieren wir das „Innere" von Γ durch*

$$I(\Gamma) := \{B \in \mathcal{P} | \,\text{entweder B=O oder } \overline{\mathcal{OB}} < \overline{\mathcal{OA}}\}$$

und ähnlich:

$$E(\Gamma) := \{B \in \mathcal{P} | \, \overline{\mathcal{OB}} > \overline{\mathcal{OA}}\}.$$

Definition 6.3 *Sei $(\mathcal{P}, \mathcal{G})$ eine Hilbert-Ebene. Wir nennen eine Gerade G eine „Tangente" an einen Kreis Γ, im Punkt A, falls $G \cap \Gamma$ aus genau einem Punkt, nämlich A, besteht. Ähnlich nennen wir zwei Kreise Γ_1, Γ_2 tangential zueinander, im Punkt A, falls $\Gamma_1 \cap \Gamma_2$ aus genau einem Punkt, nämlich A, besteht.*

Proposition 6.3 *Sei Γ ein beliebiger Kreis mit Mittelpunkt O und $A \in \Gamma$, also $\Gamma = \Gamma(O, A)$. Bezeichne G die eindeutige Senkrechte auf die Gerade OA durch den Punkt A. So gilt $G \cap \Gamma = \{A\}$ und*

$$G \setminus \{A\} \subset E(\Gamma).$$

Insbesondere ist G eine Tangente an Γ durch den Punkt A. Ist umgekehrt G eine Tangente an Γ, mit $G \cap \Gamma = \{A\}$, dann ist G die eindeutige Senkrechte auf OA durch A. Insbesondere zeigt dies, dass es zu jedem Punkt $A \in \Gamma$ genau eine Tangente „$T(\Gamma, A)$" an Γ durch A gibt, nämlich die eindeutige Senkrechte auf OA durch A.

Beweis: Sei zunächst G die eindeutige Senkrechte auf die Gerade OA durch den Punkt A. Wir wählen einen beliebigen Punkt $B \in G \setminus \{A\}$. Per Definition von G hat das Dreieck OAB im Punkt A einen rechten Innen- und somit auch rechten Aussenwinkel. Aus Euklid I.16 erhalten wir hieraus: $\angle OBA < \angle OAB \cong \perp$. Hieraus folgt mittels Euklid I.19: $\overline{OB} > \overline{OA}$, also dass $B \in E(\Gamma)$ gilt. Hieraus folgt insbesondere: $(G \setminus \{A\}) \cap \Gamma = \emptyset$ und somit $G \cap \Gamma = \{A\}$, sodass sich in der Tat G als eine Tangente an Γ durch den Punkt A herausstellt.
Nun nehmen wir umgekehrt an, dass G eine Tangente an Γ durch einen Punkt $A \in \Gamma$ sei, also dass $G \cap \Gamma = \{A\}$ gelte. Wir wissen zunächst aus Aufgabe 15, dass die Gerade OA den Kreis Γ in genau zwei Punkten schneidet, woraus insbesondere $OA \neq G$, also $O \notin G$ folgt. Wir können nun mittels Euklid 1.12 die eindeutige Senkrechte, d.h. das Lot L, von O auf G bilden. Bezeichne F den eindeutigen Fusspunkt von L auf G. Angenommen, $F \neq A$. Wir teilen G in F in zwei Strahlen S_1, S_2, OBDA mit $A \in S_1$, auf und wählen in S_2 mittels (C1) den eindeutigen Punkt $A' \in S_2$ mit $\overline{FA'} \cong \overline{FA}$. Wegen $G = AF = A'F$ und $O \notin G$, können $\{O, A, F\}$ und $\{O, A', F\}$ nicht kolinear sein. Da sich die Dreiecke OAF und $OA'F$ die Seite OF teilen, und per Definition von F $\angle OFA \cong \perp \cong \angle OFA'$ und ausserdem $\overline{FA'} \cong \overline{FA}$ gilt, so folgt aus (SWS): $OAF \cong OA'F$. Insbesondere beweist dies $\overline{OA'} \cong \overline{OA}$, also dass A' ein Punkt aus dem Durchschnitt $\Gamma \cap G$ ist. Dies widerspricht jedoch der Voraussetzung $G \cap \Gamma = \{A\}$ und $A * F * A'$. Somit muss der Fusspunkt F des Lots L von O auf G mit A identisch sein, d.h. $L = OF = OA$ trifft senkrecht auf G in $F = A$, im Sinne von Euklid I.12, sodass sich andererseits die Gerade G als die eindeutige Senkrechte auf OA durch den Punkt A im Sinne von Euklid I.11 herausstellt.

///

Proposition 6.4 *Falls drei verschiedene Punkte O, O', A kolinear sind, so sind $\Gamma(O, A)$ und $\Gamma(O', A)$ zueinander tangential im Punkt A. Umgekehrt gilt: falls zwei Kreise Γ, Γ' zueinander tangential in einem Punkt A sind, so sind ihre Mittelpunkte kolinear mit A.*

Beweis: Seien O, O', A kolinear. Per Definition enthalten beide Kreise, $\Gamma(O, A)$ und $\Gamma(O', A)$, den Punkt A, sodass wir für die erste Behauptung nur $(\Gamma(O, A) \cap \Gamma(O', A)) \setminus \{A\} = \emptyset$ zeigen müssen. Wir wissen, dass A auf OO' liegt. Angenommen, es existierte ein weiterer Punkt $B \in \Gamma(O, A) \cap \Gamma(O', A)$ auf OO', so erhielten wir einen Widerspruch wie im Beweis von Proposition 6.1. Nehmen wir nun also an, dass es einen Punkt

$B \in \Gamma(O,A) \cap \Gamma(O',A)$ mit $B \notin OO' = OA = O'A$ gibt. Wir betrachten OBDA nur die beiden folgenden Fälle:
1.) $O * O' * A$, 2.) $O * A * O'$. Im ersten Fall betrachten wir die Dreiecke OAB und $O'AB$ und erhalten aus $B \in \Gamma(O,A) \cap \Gamma(O',A)$: $\overline{OA} \cong \overline{OB}$ und $\overline{O'A} \cong \overline{O'B}$. Aus Euklid I.5 folgt hieraus:

$$\angle(OAB) \cong \angle(OBA) \qquad \text{und} \qquad \angle(O'AB) \cong \angle(O'BA). \tag{6.44}$$

Zusammen mit $\angle(O'AB) = \angle(OAB)$, wegen $O*O'*A$, erhielten wir: $\angle(OBA) \cong \angle(O'BA)$ im Punkt B, sodass nach (C4) die Strahlen $\overrightarrow{BO}$ und $\overrightarrow{BO'}$ übereinstimmen müssten. Hieraus folgte, dass B, O, O' drei kolineare Punkte wären, was im Widerspruch zur Annahme „$B \notin OO'$" steht. Im zweiten Fall erhalten wir wie im ersten Fall die beiden Kongruenzen aus (6.44). Im ersten Fall kombinierten wir dies mit „$\angle(O'AB) = \angle(OAB)$". Im betrachteten zweiten Fall sind diese beiden Winkel zueinander komplementär, sodass $\angle(OAB)$ ein Aussenwinkel an das Dreieck $O'AB$ und $\angle(O'AB)$ ein Aussenwinkel an das Dreieck OAB ist. Aus Euklid I.16 und (6.44) folgt also sowohl $\angle(OAB) > \angle(O'AB)$ als auch $\angle(O'AB) > \angle(OAB)$, also erneut ein Widerspruch. Die erste Behauptung der Proposition ist somit bewiesen.
Nun nehmen wir an, dass Γ und Γ' in einem Punkt A zueinander tangentiale Kreise seien. Angenommen, ihre Mittelpunkte O, O' wären nicht kolinear mit A, d.h. $A \notin OO'$. Wir konstruieren das Lot L von A auf OO', erhalten den eindeutigen Fusspunkt F auf OO' und bestimmen den eindeutigen Punkt B, der $A * F * B$ und $\overline{AF} \cong \overline{BF}$ erfüllt. Wir nehmen in einem ersten Fall an, dass F weder mit O noch mit O' übereinstimmt. Dann erhalten wir aus (SWS) für die Dreiecks-Paare (OAF, OBF) und $(O'AF, O'BF)$: $\overline{OB} \cong \overline{OA}$ und $\overline{O'B} \cong \overline{O'A}$.
Falls hingegen beipsielsweise $O = F$ gilt, so folgt sofort nach Wahl von B: $\overline{OB} \cong \overline{OA}$ und erneut aus (SWS) für das Dreiecks-Paar $(O'AO, O'BO)$: $\overline{O'B} \cong \overline{O'A}$. In beiden Fällen erhalten wir insbesondere: $B \in \Gamma \cap \Gamma'$ im Widerspruch zu $\{A\} = \Gamma \cap \Gamma'$ und $A \neq B$.

///

Literatur

[Bo] Bosch, S.(2006) Algebra, Springer Verlag, 6. Auflage, Berlin - Heidelberg - New York.

[Green] Greenberg, M. J. (1972) Euclidean and Non-Euclidean Geometries, Freeman and Company, San Francisco.

[Hart] (2000) Geometry: Euclid and Beyond, Springer Verlag, Berlin - Heidelberg - New York.

[Oster] Ostermann, A., Wanner, G. (2010) Geometry by its History, Springer Verlag, Undergraduate Texts in Mathematics, Berlin - Heidelberg - New York.