Universität Tübingen
Fachbereich Mathematik

PD Dr. Ruben Jakob 01.06.2016

Axiomatische Geometrie
SS 2016
6. Übungsblatt

AUFGABE 15:
Sei $(\mathcal{P}, \mathcal{G})$ eine Geometrie, in der die Axiome (I1)–(I3), (B1)–(B4) und (C1)–(C3) gelten mögen. Zu zwei verschiedenen Punkten $O \neq A$ aus $\mathcal{P}$ nennen wir die Punktemenge

$$\Gamma(O, A) := \{B \in \mathcal{P} \mid \overline{OB} \cong \overline{OA}\}.$$

den ,,Kreis" mit ,,Mittelpunkt" O und ,,Radius" $[\overline{OA}]$.

1) Zeigen Sie, dass jede Gerade durch O genau zwei Schnittpunkte mit $\Gamma(O, A)$ hat.

2) Kombinieren Sie dies mit dem Resultat einer vergangenen Übungsaufgabe, um zu beweisen, dass jeder Kreis Γ in $\mathcal{P}$ unendlich viele Punkte besitzen muss.

AUFGABE 16:
Sei wieder $(\mathcal{P}, \mathcal{G})$ eine Geometrie, in der die Axiome (I1)–(I3), (B1)–(B4) und (C1)–(C3) gelten.

1) Zeigen Sie, dass die ,,Dreiecks-Ungleichung"

$$[\overline{AC}] \leq [\overline{AB}] + [\overline{BC}]$$

für verschiedene kolineare Punkte A, B, C erfüllt ist. Hierbei bedeute das Symbol $\leq$: Entweder $<$ oder $=$.

2) Versuchen Sie (rigoros) zu entscheiden, ob die Dreiecks-Ungleichung für drei beliebige verschiedene Punkte in jeder ,,(I1)–(C3)"-Geometrie $(\mathcal{P}, \mathcal{G})$ gelten muss, indem Sie die beiden reellen kartesischen Ebenen aus Aufgabe 13 und auch noch diejenige (reelle) kartesische Ebene betrachten, die entsteht, indem man die euklidische Metrik d aus Aufgabe 13 (1) durch die Metrik

$$d'(A, B) := \begin{cases} d(A, B) & : \text{ falls die Gerade } AB \text{ entweder eine Vertikale oder eine Horizontale ist} \\ 2\, d(A, B) & : \text{ in jedem anderen Fall für die Lage von } A, B \end{cases}$$

ersetzt.

3)* Können Sie in diesem letzten kartesischen Modell zwei Kreise Γ, Γ' angeben, die sich nicht schneiden oder berühren, also mit $\Gamma \cap \Gamma' = \emptyset$, obwohl sie jeweils Punkte des anderen Kreises in ihrem Inneren enthalten ?

Abgabetermin ist Mittwoch, der 08.06.2016, in der Vorlesung.