Universität Tübingen
Fachbereich Mathematik

PD Dr. Ruben Jakob 18.01.2017

Regularitätstheorie für Systeme elliptischer partieller Differentialgleichungen
WS 2016/17
10. Übungsblatt

AUFGABE 20:

(i) Sei $\Omega \subset\subset \mathbb{R}^n$ eine offene, beschränkte Teilmenge und seien $p \equiv (p^j_\beta) \mapsto A^\alpha_i(p)$, $\alpha, \beta = 1, \dots n$, $i, j = 1, \dots, N$, C^1-Funktionen auf $\mathbb{R}^{nN}$, die den Bedingungen

$$\frac{\partial A^\alpha_i(p)}{\partial p^j_\beta}\,\xi^i_\alpha\,\xi^j_\beta \geq \lambda\,|\xi|^2, \qquad |A^\alpha_i(p)| \leq \mu_1 \mid p \mid \qquad \text{und} \qquad \left| \frac{\partial A^\alpha_i(p)}{\partial p^j_\beta} \right| \leq \mu_2 \qquad \forall\, \xi, p \in \mathbb{R}^{nN},$$

für Konstanten $\mu_1, \mu_2 \geq \lambda > 0$ genügen mögen. Zeigen Sie, dass jede Lösung $u \in W^{1,2}(\Omega, \mathbb{R}^N)$ der schwachen Gleichung

$$\int_\Omega A^\alpha_i(Du)\, D_\alpha \varphi^i \, d\mathcal{L}^n = 0 \qquad \forall \varphi \in W^{1,2}_0(\Omega, \mathbb{R}^N)$$

bereits in $W^{2,2}_{loc}(\Omega, \mathbb{R}^N)$ liegt und dass ausserdem deren partielle Ableitungen $D_\gamma u$, $\gamma = 1, \dots n$, die n schwachen Gleichungen

$$\int_\Omega \frac{\partial A^\alpha_i(Du)}{\partial p^j_\beta}\, D_\beta(D_\gamma u^j)\, D_\alpha \varphi^i \, d\mathcal{L}^n = 0 \qquad \forall \varphi \in C^\infty_c(\Omega, \mathbb{R}^N)$$

lösen. Verwenden Sie hierzu eine ähnliche Technik wie bei der Lösung von Aufgabe 18, um zunächst eine Divergenzform-Gleichung für jeden der n Differenzen-Quotienten von $D_\beta u^j$ auf $\Omega' \subset\subset \Omega$ zu erhalten, und testen Sie diese n Gleichungen dann mittels geeignet abgeschnittener Differenzen-Quotienten von u, um eine von der Schrittweite h unabhängige Abschätzung der n Differenzen-Quotienten von Du in $L^2(B_R(x_0), \mathbb{R}^{nN})$ auf kleinen Bällen $B_R(x_0) \subset\subset \Omega$ zu erhalten.

(ii) Kann das Ergebnis von Teil (i) mit dem Resultat von Aufgabe 18 kombiniert werden, um zu beweisen, dass zumindest auf Lipschitz-Gebieten Ω niedriger Dimension jede schwache Lösung $u \in W^{1,2}(\Omega, \mathbb{R})$ der Minimalflächen-Gleichung bereits von der Klasse $C^{1,\alpha}(\Omega, \mathbb{R})$, für ein $\alpha \in (0, 1)$, ist ?

AUFGABE 21*:
Es sei $\Omega \subset\subset \mathbb{R}^2$ (!) eine offene, beschränkte Teilmenge mit Lipschitz-Rand, und es sei $u \in W^{1,2}(\Omega, \mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^N)$ eine schwache Lösung eines elliptischen $(2 \times N)-$Systems in Diagonalform

$$-D_\beta(A^{\alpha\beta}(\,\cdot\,, u(\,\cdot\,))\, D_\alpha u^k(\,\cdot\,)) = f_k(\,\cdot\,, u(\,\cdot\,), Du(\,\cdot\,)) \qquad \text{auf } \Omega, \tag{1}$$

für $k = 1, \dots, N$, [für welches alle General-Voraussetzungen der Vorlesung gelten], welche ausserdem $\mathrm{osc}_\Omega u < \frac{\lambda}{a}$ erfülle. Versuchen Sie mittels des Regularitätssatzes 4.1 der Vorlesung, der nur für $\dim(\Omega) > 2$ bewiesen wurde, zu zeigen, dass u von der Klasse $C^{0,\alpha}_{loc}(\Omega, \mathbb{R}^N)$ für ein $\alpha \in (0,1)$ ist, welches nur von $N, \lambda, \mu, b, \lambda - a\,\mathrm{osc}_\Omega u$ und $\| u \|_{L^\infty(\Omega)}$ abhängt, und dass auch zu jeder offenen Teilmenge $\Omega_\epsilon \subset\subset \Omega$ eine Konstante K existiert, die nur von $\lambda, \mu, N, b, \lambda - a\,\mathrm{osc}_\Omega u, \| u \|_{L^\infty(\Omega)}$, Ω und ϵ abhängt, sodass

$$|u(x) - u(y)| \leq K\,|x-y|^\alpha \qquad \forall x, y \in \Omega_\epsilon$$

gilt. Beachten Sie hierbei, dass Gleichung (1) die exakte Bedeutung

$$\begin{aligned}&\int_\Omega A^{\alpha\beta}(x^1, x^2, u(x^1, x^2))\, D_\alpha u^k(x^1, x^2)\, D_\beta \phi^k(x^1, x^2)\, d(x^1, x^2)\\ &\qquad = \int_\Omega f_k(x^1, x^2, u(x^1, x^2), Du(x^1, x^2))\, \phi^k(x^1, x^2)\, d(x^1, x^2),\end{aligned}$$

für alle Testfunktionen $\phi \in W^{1,2}_0(\Omega, \mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^N)$ hat, und dass man die schwache Lösung $u(x^1, x^2)$, die Matrix $A^{\alpha\beta}(x^1, x^2, z^1, \dots, z^N)$ und die Funktion $f(x^1, x^2, z, p)$ auf ziemlich primitive Art zu ,,Bausteinen" eines elliptischen $(3 \times N)-$Systems in Diagonalform ,,aufblasen" kann, welches wieder alle General-Voraussetzungen der Vorlesung erfüllt, und sodass die entsprechend ,,erweiterte" Lösung wieder die Bedingung ,,$\mathrm{osc}_\Omega u < \frac{\lambda}{a}$" erfüllt.

Abgabetermin ist Mittwoch, der 25.01.2017.