Universität Tübingen
Fachbereich Mathematik

PD Dr. Ruben Jakob 25.01.2017

Regularitätstheorie für Systeme elliptischer partieller Differentialgleichungen
WS 2016/17
11. Übungsblatt

AUFGABE 22: [De Giorgi, 1968]
Sei $\Omega := B_1^n(0) \subset \mathbb{R}^n$, $n > 2$, der offene n-dimensionale Einheitsball. Wir definieren für Funktionen $u \in W^{1,2}(\Omega, \mathbb{R}^n)$ (also hier $N = n$) das Funktional

$$J(u) := \int_\Omega |Du|^2(x) + \Big(\sum_{i,\alpha=1}^{n} [(n-2)\,\delta_{i\alpha} + n\,\frac{x_i x_\alpha}{|x|^2}] D_\alpha u^i(x) \Big)^2 \, d\mathcal{L}^n(x).$$

(i) Zeigen Sie, dass die erste Variation $\delta J(u,\varphi) := \frac{d}{d\epsilon} J(u+\epsilon\varphi)|_{\epsilon=0}$ von J durch

$$\delta J(u,\varphi) = \int_\Omega A_{ij}^{\alpha\beta}(x)\, D_\alpha u^i(x)\, D_\beta \varphi^j(x)\, d\mathcal{L}^n(x) \qquad \text{für Störungen} \qquad \varphi \in W_0^{1,2}(\Omega, \mathbb{R}^n)$$

mit

$$A_{ij}^{\alpha\beta}(x) = \delta_{\alpha\beta}\delta_{ij} + \Big((n-2)\delta_{i\alpha} + n\,\frac{x^i x^\alpha}{|x|^2}\Big)\Big((n-2)\delta_{j\beta} + n\,\frac{x^j x^\beta}{|x|^2}\Big)$$

[für $\alpha, \beta, i, j = 1, \ldots, n$] gegeben ist.

(ii)* Vergewissern Sie sich nun von der Elliptizität, Symmetrie und Beschränktheit der Koeffizientenmatrix $A_{ij}^{\alpha\beta}$ auf Ω.

(iii) Zeigen Sie, dass es (mindestens) einen positiven Wert $\gamma \in \mathbb{R}$ gibt, sodass die Funktion $u(x) := \frac{x}{|x|^\gamma}$ eine Extremale des Funktionals J ist, also das schwache, elliptische Gleichungs-System

$$\delta J(u,\varphi) = \int_\Omega A_{ij}^{\alpha\beta}(x) D_\alpha u^i(x)\, D_\beta \varphi^j(x)\, d\mathcal{L}^n(x) = 0$$

für alle $\varphi \in W_0^{1,2}(\Omega, \mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^n)$ löst. De Giorgi behauptet, dass angeblich die Wahl $\gamma = \frac{n}{2}\,[1 - \frac{1}{\sqrt{(2n-2)^2+1}}]$ hier zum Erfolg führt. (Beachten Sie unbedingt Lemma 2.1 der Vorlesung !)

(iv) Ist die Funktion $u(x) := \frac{x}{|x|^\gamma}$ für $\gamma = \frac{n}{2}\,[1 - \frac{1}{\sqrt{(2n-2)^2+1}}]$ auch wirklich aus $W^{1,2}(\Omega, \mathbb{R}^n)$? Offenbar ist u (für jedes $\gamma > 0$) nicht einmal stetig im Ursprung ! Stünde nun die Kombination all dieser Aussagen nicht im Widerspruch zu Theorem 4.1 der Vorlesung ?

Abgabetermin ist Mittwoch, der 08.02.2017.