Universität Tübingen
Fachbereich Mathematik

PD Dr. Ruben Jakob 08.02.2017

Regularitätstheorie für Systeme elliptischer partieller Differentialgleichungen
WS 2016/17
12. Übungsblatt

AUFGABE 23: [Guisti, Miranda, 1968]
Sei $\Omega := B_1^n(0) \subset \mathbb{R}^n$, $n > 2$, der offene n-dimensionale Einheitsball. Wir betrachten für Funktionen $u \in W^{1,2}(\Omega, \mathbb{R}^n)$ (also hier $N = n$ wie in Aufgabe 22) das quasi-lineare System

$$\int_\Omega A_{ij}^{\alpha\beta}(u(x))\, D_\alpha u^i(x)\, D_\beta \varphi^j(x)\, d\mathcal{L}^n(x) = 0 \tag{1}$$

für Testfunktionen $\varphi \in W_0^{1,2}(\Omega, \mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^n)$, wobei hier

$$A_{ij}^{\alpha\beta}(z) := \delta_{\alpha\beta}\delta_{ij} + \left(\delta_{i\alpha} + \frac{4}{n-2}\,\frac{z^i\, z^\alpha}{1+|z|^2}\right)\left(\delta_{j\beta} + \frac{4}{n-2}\,\frac{z^j\, z^\beta}{1+|z|^2}\right)$$

[für $\alpha, \beta, i, j = 1, \ldots, n$ und $z \in \mathbb{R}^n$] gesetzt sei.

(i) Vergewissern Sie sich zunächst von der Elliptizität, Symmetrie und Beschränktheit der Koeffizientenmatrix $A_{ij}^{\alpha\beta}$ auf $\mathbb{R}^n$. Sind alle n^4 Koeffizienten $A_{ij}^{\alpha\beta}$ sogar glatte Funktionen auf ganz $\mathbb{R}^n$? Man vergleiche hierzu auch die Regularität der Koeffizienten $A_{ij}^{\alpha\beta}$ in Aufgabe 22 !

(ii) Zeigen Sie, dass die Funktion $u(x) := \frac{x}{|x|}$ eine schwache Lösung von (1) ist (Beachten Sie hier wie in Aufgabe 22 Lemma 2.1 der Vorlesung !)

(iii) Die Funktion $u(x) = \frac{x}{|x|}$ liegt zwar nach Aufgabe 6 für jedes $n \geq 2$ und jedes $q < n$ in $W^{1,q}(B_1^n(0)) \cap L^\infty(B_1^n(0))$, ist jedoch unstetig im Ursprung ! Steht die Kombination aller dieser Aussagen nicht im Widerspruch zu Theorem 4.1 der Vorlesung ?

Keine Abgabe