Universität Tübingen
Fachbereich Mathematik

PD Dr. Ruben Jakob 26.10.2016

Regularitätstheorie für Systeme elliptischer partieller Differentialgleichungen
WS 2016/17
2. Übungsblatt

AUFGABE 3:
Im Folgenden sei $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ offen, f eine auf Ω holomorphe und u eine auf Ω harmonische Funktion.

(i) Zeigen Sie, dass Real- und Imaginärteil von f harmonisch in Ω sind.

(ii) Konstruieren Sie im Fall einer einfach zusammenhängenden Menge Ω, also falls $\pi_1(\Omega) = 0$ ist, eine zu u harmonisch konjugierte Funktion auf Ω, d.h. eine glatte Funktion v, für die $u + iv$ eine holomorphe Funktion auf Ω ist.

(iii) Nun seien $\Omega := B_1^2(0) \setminus \{0\}$ und

$$\alpha := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Big\langle \nabla u(R\,\cos\varphi, R\,\sin\varphi), \begin{pmatrix} R\,\cos\varphi \\ R\,\sin\varphi \end{pmatrix} \Big\rangle \, d\varphi,$$

für ein beliebig fixiertes $R \in (0,1)$. Zeigen Sie, dass die Funktion $u - \alpha\,\log(|\cdot|)$ eine harmonisch konjugierte Funktion auf Ω besitzt. Verwenden Sie hierzu, dass jedes C^1-Vektorfeld V auf Ω, welches das Integrabilitätskriterium auf Ω und ausserdem $\int_{\partial B_R(0)} V(x)\,dx = 0$, für ein $R \in (0,1)$, erfüllt, eine Stammfunktion auf Ω besitzt.

(iv) Zeigen Sie mittels der Laurent-Reihenentwicklung einer bestimmten auf $\Omega = B_1^2(0) \setminus \{0\}$ holomorphen Funktion, dass es eindeutige komplexe Zahlen c_n gibt, für welche eine Darstellung von u der Form

$$u(z) = \alpha\,\log(|z|) + \Re\Big(\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n\,z^n\Big)$$

für $z \in B_1^2(0) \setminus \{0\}$ gilt.

AUFGABE 4:
Verwenden Sie die Ergebnisse von Aufgabe 3, um folgende Aussagen über eine in $B_1^2(0)\setminus\{0\}$ harmonische Funktion u zu beweisen.

(i) Falls u das asymptotische Verhalten $u(z) = o(|\log(|z|)|)$ für $z \to 0$ hat, so kann u zu einer harmonischen Funktion auf $B_1^2(0)$ fortgesetzt werden.

(ii) Falls u das asymptotische Verhalten $u(z) = o(|z|^{-1})$ für $z \to 0$ hat, so kann u schlimmstenfalls logarithmisch um $z = 0$ explodieren, d.h. u muss $|u(z)| = O(|\log(|z|)|)$ für $z \to 0$ erfüllen.

(iii) Falls u das asymptotische Verhalten $u(z) = o(|z|^{-k})$ für ein $k \geq 2$ und $z \to 0$ hat, so kann u höchstens mit Ordnung $k-1$ explodieren, d.h. u muss $|u(z)| = O(|z|^{-k+1})$ für $z \to 0$ erfüllen.

Abgabetermin ist Mittwoch, der 02.11.2016.