Universität Tübingen
Fachbereich Mathematik

PD Dr. Ruben Jakob 02.11.2016

Regularitätstheorie für Systeme elliptischer partieller Differentialgleichungen
WS 2016/17
3. Übungsblatt

AUFGABE 5:

(i) Beweisen Sie mittels des Trennungssatzes der linearen Funktionalanalysis (über die "Trennbarkeit" konvexer, abgeschlossener Teilmengen normierter reeller Vektorräume) die folgende Aussage: Sei X ein normierter, reeller Vektorraum und $M \subset X$ eine konvexe und abgeschlossene Teilmenge. Dann ist M bereits bzgl. schwacher Konvergenz abgeschlossen, d.h. ist $\{x_k\} \subset M$ eine gegen ein $x \in X$ schwach konvergente Folge, $x_k \rightharpoonup x$, so ist $x \in M$.

(ii) Beweisen Sie hiermit das "Lemma von Mazur": Sei X ein normierter, reeller Vektorraum und $\{x_k\} \subset X$ eine gegen ein $x \in X$ schwach konvergente Folge, $x_k \rightharpoonup x$, dann existiert eine Folge $\{\xi_j\} \subset X$, deren Glieder Konvexkombinationen von Gliedern der Folge $\{x_k\}$ sind, die bereits stark gegen x konvergiert, also $\| \xi_j - x \|_X \to 0$ erfüllt.

AUFGABE 6:
Beweisen Sie, dass die Funktion $u(x) := \frac{x}{|x|}$ für beliebiges $n \geq 2$

(i) in $W^{1,q}(B_1^n(0)) \cap L^\infty(B_1^n(0))$ für jedes $q < n$, jedoch nicht mehr in $W^{1,n}(B_1^n(0))$ liegt, und

(ii) das Gleichungssystem
$$-\triangle u = u\,|\nabla u|^2 \tag{1}$$
klassisch auf $B_1^n(0) \setminus \{0\}$ und für $n > 2$ auch schwach auf $B_1^n(0)$ löst,

(iii) jedoch unstetig im Ursprung ist. Steht dies im Widerspruch zum angekündigten Regularitätssatz von Ladyzenskaja, Uralceva aus Bsp. (iv) der Vorlesung oder zum Regularitätssatz von de Giorgi, Nash und Trudinger aus Bsp. (iii) der Vorlesung ? Ist dieses Beispiel im Fall $n = N = 2$ noch von Interesse im Hinblick auf unseren theoretischen Rahmen ?

(iv) Welche Werte haben in diesem Beispiel die Oszillation
$$\mathrm{osc}_{B_1^n(0)} u := \text{ess-sup}\{|u(x) - u(y)|\,|x, y \in B_1^n(0)\}$$
der Lösung u und die Konstanten a, b, λ und μ aus den Generalvoraussetzungen der Vorlesung ? (Vergleichen Sie mit Aufgabe 2.)

Abgabetermin ist Mittwoch, der 09.11.2016.