Universität Tübingen
Fachbereich Mathematik

PD Dr. Ruben Jakob 09.11.2016

Regularitätstheorie für Systeme elliptischer partieller Differentialgleichungen
WS 2016/17
4. Übungsblatt

AUFGABE 7:
Im Lemma von Campanato beweisen wir, dass eine Funktion $u \in L^1_{loc}(\Omega)$, welche die Wachstumseigenschaft

$$\int_{B_r(x)} |u - \bar{u}_{x,r}|^2 \, dx \leq K \, r^{n+2\alpha} \qquad \text{für alle } r \in (0, \frac{R_0(x)}{2})$$

um jedes $x \in \Omega$, für festes $K > 0$ und $\alpha \in (0,1)$, besitzt, bereits in $C^{0,\alpha}_{loc}(\Omega)$ liegt und ausserdem eine Abschätzung der Form

$$|u(x) - u(y)| \leq C(n, \alpha, \Omega, \epsilon) \sqrt{K} \, |x - y|^\alpha \qquad \forall x, y \in \Omega_\epsilon$$

erfüllt.

(i) Geben Sie eine explizite Formel für eine hierbei geeignete Konstante $C(n, \alpha, \Omega, \epsilon)$, für $\epsilon \in (0,1)$, im Spezialfall $\Omega := B^n_1(0)$ an. Wie verhält sich die Funktion $\epsilon \mapsto C(n, \alpha, \Omega, \epsilon)$ gemäss Ihrer Formel für $\epsilon \searrow 0$ und $\epsilon \nearrow 1$?

(ii) Geben Sie eine explizite Formel für eine hierbei geeignete Konstante $C(3, \alpha, \Omega, \epsilon)$, für $\epsilon \in (0, 1/2)$, im Spezialfall $\Omega := S^1 \times B^2_{1/2}(0)$, d.h. für einen offenen Donat mit Dicke 1, Aussenradius 3/2 und Innenradius 1/2, an. Wie verhält sich die Funktion $\epsilon \mapsto C(3, \alpha, \Omega, \epsilon)$ gemäss Ihrer Formel für $\epsilon \searrow 0$ und $\epsilon \nearrow 1/2$?

AUFGABE 8:
Beweisen Sie die folgenden Varianten vom Typ ,,Poincaré-Ungleichung":

(i) Es sei $p \in [1, \infty)$ beliebig gewählt und Ω zusammenhängend mit Lipschitz-Rand. Zeigen Sie mittels der Kompaktheit der ,,Rellich-Einbettung" $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$, dass eine nur von Ω, n und p abhängende Konstante C existiert, für die

$$\int_\Omega |u - \overline{u_\Omega}|^p \, d\mathcal{L}^n \leq C \int_\Omega |\nabla u|^p \, d\mathcal{L}^n$$

für alle $u \in W^{1,p}(\Omega)$ gilt. ($\overline{u_\Omega} := \frac{1}{\mathcal{L}^n(\Omega)} \int_\Omega u \, dx$)

(ii) Beweisen Sie hiermit für beliebiges $p \in [1, \infty)$ und für eine beliebige offene Menge Ω: Es existiert eine nur von n und p abhängende Konstante C, für die

$$\int_{B^n_r(x_0)} |u - \overline{u_{B^n_r(x_0)}}|^p \, d\mathcal{L}^n \leq C \, r^p \int_{B^n_r(x_0)} |\nabla u|^p \, d\mathcal{L}^n$$

und

$$\int_{T_r^n(x_0)} |u - \overline{u_{T_r^n(x_0)}}|^p \, d\mathcal{L}^n \leq C\, r^p \int_{T_r^n(x_0)} |\nabla u|^p \, d\mathcal{L}^n$$

für alle Bälle $B_r^n(x_0) \subset \Omega$ bzw. Annuli $T_r^n(x_0) \subset \Omega$ und alle $u \in W^{1,p}(\Omega)$ gilt.

Abgabetermin ist Mittwoch, der 16.11.2016.