Universität Tübingen
Fachbereich Mathematik

PD Dr. Ruben Jakob 16.11.2016

Regularitätstheorie für Systeme elliptischer partieller Differentialgleichungen
WS 2016/17
5. Übungsblatt

AUFGABE 9:

In dieser Aufgabe sei Ω eine offene und beschränkte Teilmenge des $\mathbb{R}^n$, und es gelte der Divergenzsatz für Ω , d.h. es gelte für beliebige $u, v \in C^2(\overline{\Omega})$:

$$\int_\Omega (v\,\Delta u + \nabla v\,\nabla u) = \int_\Omega div(v\,\nabla u) = \int_{\partial\Omega} v\,\partial_\nu u\,d\mathcal{H}^{n-1} \tag{1}$$

und insbesondere

$$\int_\Omega (v\,\Delta u - u\,\Delta v) = \int_{\partial\Omega} v\,\partial_\nu u - u\,\partial_\nu v\,d\mathcal{H}^{n-1}. \tag{2}$$

Wir betrachten im Hinblick auf Theorem 3.1 der Vorlesung die Greensfunktion des gesamten $n-$dimensionalen euklidischen Raums $\mathbb{R}^n$ (also hier mit $a^{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta}$), d.h. die „Fundamentallösung"

$$\Gamma(x) := \begin{cases} \dfrac{1}{n(2-n)\omega_n}|x|^{2-n} & \text{für } \; n \geq 3 \\ \dfrac{1}{2\pi}\log|x| & \text{für } \; n = 2 \end{cases},$$

der Poisson- bzw. Laplace-Gleichung für $x \neq 0$.

(i) Zeigen Sie, dass für $x \neq 0$

$$\partial_i\Gamma(x) = \frac{1}{n\omega_n} x_i |x|^{-n}, \tag{3}$$

$$\partial_{ij}\Gamma(x) = \frac{1}{n\omega_n}(\delta_{ij}|x|^2 - n x_i x_j)|x|^{-n-2} \tag{4}$$

gilt, und dass sich daraus insbesondere $\Delta\Gamma(x) = 0$ für alle $x \neq 0$ ergibt, also dass Γ harmonisch auf $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ ist.

(ii) Schliessen Sie hieraus zuerst, dass Γ und $\nabla\Gamma$ $L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)-$Funktionen sind, und leiten Sie für $u \in C^2(\overline{\Omega})$ die beiden Green'schen Darstellungsformeln

$$u(x) = \int_\Omega (\nabla\Gamma)(x-y)\,\nabla u(y)\,dy - \int_{\partial\Omega} u(y)\,(\partial_\nu\Gamma)(x-y)\,d\mathcal{H}^{n-1}(y) \qquad \text{und}$$

$$u(x) = \int_\Omega \Gamma(x-y)\,\Delta u(y)\,dy - \int_{\partial\Omega} \Big(u(y)\,(\partial_\nu\Gamma)(x-y) + \Gamma(x-y)\partial_\nu u(y)\Big)\,d\mathcal{H}^{n-1}(y)$$

für jedes $x \in \Omega$ her. [Versuchen Sie die Formeln (1) und (2) auf Gebiete der Form $\Omega \setminus B_\varrho(x)$ anzuwenden und anschliessend alle Limites bei $\varrho \to 0$ mit Hilfe der expliziten Formeln für Γ und deren Gradienten in (3) zu berechnen.]

(iii) Schliessen Sie hieraus für $u \in C_c^\infty(\Omega)$ die (im Hinblick auf Punkt (viii) von Theorem 3.1) zu erwartenden Formeln

$$u(x) = \int\limits_\Omega (\nabla\Gamma)(x-y)\,\nabla u(y)\,dy \qquad \text{und} \qquad u(x) = \int\limits_\Omega \Gamma(x-y)\,\Delta u(y)\,dy$$

für jedes $x \in \Omega$. Gilt zumindest die erste dieser beiden Formeln sogar für beliebige $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$, in $\mathcal{L}^n$–fast allen $x \in \Omega$?

AUFGABE 10:

(i) Beweisen Sie die ,,Pseudo-Dreiecks-Ungleichung"

$$\| f+g \|_{L^p_w(\Omega)} \leq 2\,(\| f \|_{L^p_w(\Omega)} + \| g \|_{L^p_w(\Omega)})$$

zur L^p_w–Pseudonorm für beliebige $f, g \in L^p_w(\Omega)$ und $p \geq 1$.

(ii) Beweisen Sie die Stampacchia-Ungleichung aus Lemma 3.1 der Vorlesung, d.h. dass

$$\| f \|^{p-\epsilon}_{L^{p-\epsilon}(\Omega)} \leq \frac{p}{\epsilon}\,\mathcal{L}^n(\Omega)^{\frac{\epsilon}{p}}\ \| f \|^{p-\epsilon}_{L^p_w(\Omega)} \qquad \text{für alle } f \in L^p_w(\Omega)$$

für alle $p > 1$ und für alle $\epsilon \in (0, p-1)$ gilt ! Verwenden Sie hierzu, dass für jede nicht-negative und $\mathcal{L}^n$-messbare Funktion $f : \Omega \to \mathbb{R}$, und für jede absolut-stetige, monoton-wachsende Funktion $\varphi : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ mit $\varphi(0) = 0$

$$\int_\Omega (\varphi \circ f)(x)\,d\mathcal{L}^n(x) = \int_0^\infty \varphi'(t)\,\mathcal{L}^n([f > t])\,dt$$

gilt. Funktioniert Ihr Beweis auch für $\epsilon = p - 1$?

(iii) Berechnen Sie die L^p_w–Pseudonormen der Funktionen $f(x) := \sqrt{1-|x|^2}$, $x \in B_1^2(0)$, und $g(x^1, x^2) := c\sqrt{1 - \frac{(x^1)^2}{a^2} - \frac{(x^2)^2}{b^2}}$, für $x = (x^1, x^2) \in E_{a,b}$, wobei $E_{a,b} := \{(x^1,x^2) \in \mathbb{R}^2 | \frac{(x^1)^2}{a^2} + \frac{(x^2)^2}{b^2} \leq 1\}$, für beliebiges $p \geq 1$! Vergleichen Sie Ihre Resultate für $p = 1$ mit den Werten von $\| f \|_{L^1(B_1^2(0))}$ und $\| g \|_{L^1(E_{a,b})}$. Wussten dies auch schon die griechischen Mathematiker ?

Abgabetermin ist Mittwoch, der 23.11.2016.