Universität Tübingen
Fachbereich Mathematik

PD Dr. Ruben Jakob 23.11.2016

Regularitätstheorie für Systeme elliptischer partieller Differentialgleichungen
WS 2016/17
6. Übungsblatt

AUFGABE 11:

(i) Seien Ω eine offene und beschränkte Teilmenge des $\mathbb{R}^n$, f eine $\mathcal{L}^n-$messbare Funktion auf Ω, $p \geq 1$, $\epsilon \in (0,p)$, und es existiere ein $\Lambda > 0$, sodass

$$\int_A |f|^{p-\epsilon}\, d\mathcal{L}^n \leq \frac{p}{\epsilon}\, \mathcal{L}^n(A)^{\frac{\epsilon}{p}}\, \Lambda^{p-\epsilon} \qquad \text{für alle } \mathcal{L}^n - \text{messbaren Teilmengen } A \subset \Omega$$

gilt. Zeigen Sie, dass dann f bereits in $L^p_w(\Omega)$ liegt und die Abschätzung

$$\| f \|_{L^p_w(\Omega)} \leq \left(\frac{p}{\epsilon}\right)^{\frac{1}{p-\epsilon}} \Lambda$$

erfüllt.

(ii) Geben Sie ein Beispiel für eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ an, die zwar in $L^1_w(\mathbb{R})$ jedoch nicht in $L^1(\mathbb{R})$ liegt.

AUFGABE 12:
Sei $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$. Wir nennen einen Punkt $x_0 \in \mathbb{R}^n$ einen Lebesgue-Punkt von f, falls

$$\frac{1}{\mathcal{L}^n(B_\varrho(x_0))} \int_{B_\varrho(x_0)} |f(x_0) - f(x)|\, d\mathcal{L}^n(x) \to 0$$

für $\varrho \to 0$ gilt.

(i) Zeigen Sie, dass für beliebiges (auf $\mathbb{R}^n$) stetiges f jeder Punkt ein Lebesgue-Punkt von f ist.

(ii)* Zeigen Sie, dass $\mathcal{L}^n-$fast jeder Punkt ein Lebesgue-Punkt einer Funktion $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ ist.

Abgabetermin ist Mittwoch, der 30.11.2016.