Universität Tübingen
Fachbereich Mathematik

PD Dr. Ruben Jakob 07.12.2016

Regularitätstheorie für Systeme elliptischer partieller Differentialgleichungen
WS 2016/17
7. Übungsblatt

AUFGABE 13:

Sei Ω eine offene und beschränkte Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ und $y \in \Omega$ ein beliebig fixierter Punkt. Zeigen Sie Punkt (x) von Satz 3.1 der Vorlesung, d.h. zeigen Sie, dass die Greensfunktion $G \equiv G(\cdot, y)$ aus (Punkt (v) von) Satz 3.1 der Vorlesung in $L_w^{\frac{n}{n-2}}(\Omega)$ liegt und einer Abschätzung der Form

$$\| G(\cdot, y) \|_{L_w^{\frac{n}{n-2}}(\Omega)} \leq \frac{K(n)}{\lambda},$$

unabhängig von y, genügt. Gehen Sie dabei in folgenden Schritten vor:

(i) Zeigen Sie mit Hilfe des Sobolevschen Einbettungssatzes, dass eine Nullfolge $\rho_j \searrow 0$ mit $G^{\rho_j} \to G$ stark in $L^q(\Omega)$ für jedes $q < \frac{n}{n-2}$ existiert, also dass insbesondere $G^{\rho_j} \to G$ stark in $L^q([G > t])$ für jedes $t > 0$ und jedes $q < \frac{n}{n-2}$ gilt.

(ii) Kombinieren Sie dies mit Lemma 3.1 (ii) und mit Abschätzung (3.29) der Vorlesung, um die Behauptung zu beweisen.

AUFGABE 14:

Sei Ω eine offene und beschränkte Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ und $y \in \Omega$ ein beliebig fixierter Punkt. Zeigen Sie Punkt (vii) von Satz 3.1 der Vorlesung, d.h. $\| \nabla G^\rho(\cdot, y) \|_{L_w^{\frac{n}{n-1}}(\Omega)} \leq K(n, \mu, \lambda)$, für jedes $\rho > 0$, unabhängig von y. Gehen Sie dabei in folgenden Schritten vor:

(i) Fixieren Sie ein $\rho > 0$ beliebig, betrachten Sie eine Subniveau-Menge $\Omega(t)^* := \{x \in \Omega | |\nabla G^\rho(x, y)| > t\}$, für ein beliebiges $t > 0$, und wenden Sie Abschätzung (3.31) der Vorlesung mit $R := t^{\frac{1}{1-n}}$ an, um zunächst

$$t^2 \, \mathcal{L}^n(\Omega(t)^* \cap (\Omega \setminus B_R(y))) \leq K(n, \mu, \lambda) \, t^{\frac{2-n}{1-n}}$$

zu zeigen.

(ii) Kombinieren Sie die hieraus gewonnene Abschätzung für $\mathcal{L}^n(\Omega(t)^* \setminus B_R(y)))$ mit einer groben Abschätzung für $\mathcal{L}^n(\Omega(t)^* \cap B_R(y))$, um die Behauptung zu erhalten.

Abgabetermin ist Mittwoch, der 14.12.2016.