Universität Tübingen
Fachbereich Mathematik

PD Dr. Ruben Jakob 14.12.2016

Regularitätstheorie für Systeme elliptischer partieller Differentialgleichungen
WS 2016/17
8. Übungsblatt

AUFGABE 15:
Sei $n > 2$, $B_R(x_0)$ ein beliebiger Ball im $\mathbb{R}^n$ und $y \in B_R(x_0)$ ein beliebig fixierter Punkt. Zeigen Sie mittels vergangener Übungsaufgaben und Lemma 3.1 die beiden folgenden Abschätzungen für beliebiges $\phi \in C_c^\infty(B_R(x_0))$:

(i)
$$\int_{B_R(y)} |\phi|^2 \, d\mathcal{L}^n \leq \text{Konst}(n)\, R^{\frac{2n^2-1}{2n-1}} \; \| \, \phi \, \|_{L^{4n-2}(B_R(x_0))} \| \, \nabla\phi \, \|_{L^{4n-2}(B_R(x_0))},$$

(ii)
$$\int_{B_R(y)} |\phi|^2 \, d\mathcal{L}^n \leq \text{Konst}(n)\, R^{\frac{4n^2-1}{4n-1}} \; \| \, \phi \, \|_{L^{4n-1}(B_R(x_0))} \| \, \nabla\phi \, \|_{L^{\frac{4n-1}{2}}(B_R(x_0))} \, .$$

AUFGABE 16:
Sei $n > 2$, $B_1(0)$ der $n-$dimensionale Einheitsball im $\mathbb{R}^n$, $y \in B_1(0)$ ein beliebig fixierter Punkt und $G^\rho(\,\cdot\,, y)$ die gemittelte Greensfunktion zu elliptischen Koeffizienten $\alpha^{\alpha\beta}$ mit Elliptizitätskonstante $\lambda > 0$ (wie in Definition 3.1 der Vorlesung) auf $B_1(0)$. Zeigen Sie mittels Lemma 2.1 und einem (Zwischen-)Resultat von Theorem 3.1 der Vorlesung, dass die Abschätzung
$$\Big| \int_{B_1(0)} \frac{x_i}{|x|^3} \, G^\rho(x, y) \, dx \Big| \leq \frac{\text{Konst}(n)}{\lambda} \, \rho^{\frac{2-n}{2}}$$
für jedes $\rho > 0$, jedes $i \in \{1, \ldots, n\}$ und unabhängig von y gilt.

Abgabetermin ist Mittwoch, der 21.12.2016.