Universität Tübingen
Fachbereich Mathematik

PD Dr. Ruben Jakob 21.12.2016

Regularitätstheorie für Systeme elliptischer partieller Differentialgleichungen
WS 2016/17
9. Übungsblatt

AUFGABE 18:
Es sei $\Omega \subset\subset \mathbb{R}^n$ eine offene, beschränkte Teilmenge mit Lipschitz-Rand, $n > 2$, und es sei u eine auf $\bar{\Omega}$ Lipschitz-stetige Funktion, deren Graph eine Minimalfläche sei, d.h. welche

$$\operatorname{div}\Big(\frac{\nabla u}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}}\Big) = 0 \quad \text{schwach auf } \Omega$$

bzw.

$$\int_\Omega \langle \frac{\nabla u}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}}, \nabla\varphi\rangle \, d\mathcal{L}^n = 0 \tag{1}$$

für alle $\varphi \in W_0^{1,2}(\Omega,\mathbb{R}) \cap L^\infty(\Omega,\mathbb{R})$ erfüllt. Zeigen Sie: $u \in C^{1,\alpha}_{loc}(\Omega)$, für ein $\alpha \in (0,1)$. Versuchen Sie hierzu erstens mittels des Gradienten der Funktion $A(p) := \sqrt{1+|p|^2}$, die Gleichung (1) äquivalent umzuformulieren und zweitens mittels der Hesse-Matrix von A zusammen mit dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung zu beweisen, dass jeder Differenzenquotient $\partial_l^h u$, $l \in \{1,\dots,n\}$, eine schwache Lösung einer gleichmässig elliptischen Divergenz-Form-Gleichung 2. Ordnung der Form

$$\partial_i(a_{ij}\partial_j v) = 0 \qquad \text{schwach in } \Omega'$$

ist, falls $|h| \in (0, \operatorname{dist}(\partial\Omega', \partial\Omega))$ und $\Omega' \subset\subset \Omega$ eine beliebig fixierte, offene Teilmenge von Ω mit Lipschitz-Rand ist. Vergewissern Sie sich insbesondere von

$$\partial_{p_i p_j} A(p)\xi_i\,\xi_j \geq \Lambda\,|\xi|^2 \qquad \forall\, \xi \in \mathbb{R}^n,$$

für $|p| \leq \sqrt{\Lambda^{-\frac{2}{3}} - 1}$ und $|\partial_{p_i p_j} A(p)| \leq 1$ für alle $p \in \mathbb{R}^n$ und wenden Sie einen Satz der Vorlesung auf die Familie $\{\partial_l^h u\}$ an, um deren Hölder-Quotienten für $|h| \to 0$ zu „kontrollieren".

AUFGABE 19:
Es sei $\Omega \subset\subset \mathbb{R}^n$ eine offene, beschränkte Teilmenge mit Lipschitz-Rand, $n > 2$, f eine auf $\bar{\Omega}$ stetig differenzierbare Funktion und u eine auf $\bar{\Omega}$ Lipschitz-stetige schwache Lösung der elliptischen Gleichung

$$-\triangle u = f \quad \text{schwach auf } \Omega,$$

d.h. welche

$$\int_\Omega \langle \nabla u, \nabla\varphi\rangle \, d\mathcal{L}^n = \int_\Omega f\,\varphi\, d\mathcal{L}^n$$

für alle $\varphi \in W_0^{1,2}(\Omega, \mathbb{R}) \cap L^\infty(\Omega, \mathbb{R})$ erfülle. Zeigen Sie: $u \in C^{1,\alpha}_{loc}(\Omega)$, für ein $\alpha \in (0, 1)$. Versuchen Sie, den letzten Teil des Hinweises zu Aufgabe 18 hier in leicht modifizierter Form anzuwenden.

Abgabetermin ist Mittwoch, der 11.01.2017.