Universität Tübingen
Fachbereich Mathematik

PD Dr. Ruben Jakob 19.10.2016

Regularitätstheorie für Systeme elliptischer partieller Differentialgleichungen
WS 2016/17
1. Übungsblatt

AUFGABE 1:
Zeigen Sie, dass die Funktion $u(x) := \log(1 - \log(|x|))$ für jedes $n > 1$ zwar in $W^{1,n}(B_1^n(0))$ liegt, und speziell für $n = 2$ die elliptische Gleichung

$$-\triangle u = |\nabla u|^2$$

klassisch auf $B_1^2(0) \setminus \{0\}$ löst, jedoch nicht in $L^\infty(B_1^2(0))$ liegt und im Ursprung unstetig ist.

AUFGABE 2:

(i) Zeigen Sie, dass die Funktionen

$$u_\sigma(x) := \begin{pmatrix} \sin(\sigma \log(1 - \log(|x|))) \\ \cos(\sigma \log(1 - \log(|x|))) \end{pmatrix}$$

für $\sigma > 0$, zwar in $W^{1,2}(B_1^2(0)) \cap L^\infty(B_1^2(0))$ liegen und das Gleichungssystem

$$-\triangle u = f_\sigma(u, \nabla u)$$

mit

$$f_\sigma(z,p) := \begin{pmatrix} z^1 + \frac{1}{\sigma} z^2 \\ z^2 - \frac{1}{\sigma} z^1 \end{pmatrix} |p|^2$$

klassisch auf $B_1^2(0) \setminus \{0\}$ lösen, jedoch im Ursprung unstetig sind.

(ii) Zeigen Sie, dass die Funktionen f_σ quadratisches Wachstum in p besitzen, genauer der Abschätzung $|f_\sigma(z,p)| \leq (1 + \sigma^{-2})^{1/2} |z| |p|^2$ genügen.

(iii) Welche Werte haben in diesem Beispiel die Oszillationen

$$\mathrm{osc}_\Omega u := \text{ess-sup}\{|u(x) - u(y)| | x, y \in \Omega\}$$

der Lösungen und die Konstanten a, b, λ und μ aus den Generalvoraussetzungen der Vorlesung ? Können Sie anhand dieses Beispiels entscheiden, ob

$$\mathrm{osc}_\Omega u < 2\,(1 + 10^{-10})\,\frac{\lambda}{a}$$

eine hinreichende Bedingung an eine (schwache) Lösung $u \in W^{1,2}(\Omega) \cap L^{\infty}(\Omega)$ eines elliptischen Systems (im Sinne der Vorlesung) sein kann, mit welcher zumindest im bescheidenen Spezialfall $n = N = 2$ lokale Stetigkeit oder sogar lokale Hölder-Stetigkeit von u bewiesen werden könnte ?

Abgabetermin ist Mittwoch, der 26.10.2016.