Regularitätstheorie für Systeme elliptischer partieller Differentialgleichungen

Ruben Jakob
Wintersemester 2016/17
Universität Tübingen

Inhaltsverzeichnis

1 Einführung und Beispiele **1**

2 Klassische Lemmata von De Giorgi, Campanato und Morrey **5**

3 Gemittelte und klassische Greensfunktionen zu elliptischen Differentialoperatoren **11**

4 Lokale Hölder-Stetigkeit schwacher Lösungen elliptischer Systeme in Diagonalgestalt mittels "Lochfüllen" **28**

5 Höhere lokale $W^{1,p}$- und Hölder-Regularität schwacher Lösungen elliptischer Systeme mittels der "Umgekehrten Hölderungleichung" **36**

1 Einführung und Beispiele

Im Folgenden bezeichne stets Ω eine offene, beschränkte Teilmenge eines $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$. Wir werden in dieser Vorlesung Systeme quasi-linearer partieller Differentialgleichungen 2. Ordnung in „Divergenzform" der Gestalt

$$-D_\beta(A_{ik}^{\alpha\beta}(\,\cdot\,,u(\,\cdot\,))\,D_\alpha u^i(\,\cdot\,)) = f_k(\,\cdot\,,u(\,\cdot\,),\nabla u(\,\cdot\,)) \qquad \text{auf } \Omega \tag{1.1}$$

für Funktionen $u \in W^{1,2}(\Omega,\mathbb{R}^N)$ mit $N \geq 1$ betrachten und werden speziell höhere „Regularität" ihrer Lösungen unter geeigneten Voraussetzungen an A und f zu beweisen versuchen. Im Gleichungssystem (1.1) werde über alle doppelt auftretenden Indizes $\alpha,\beta = 1,\dots,n$ und $i,k = 1,\dots,N$ summiert, und dieses sei als „schwaches Gleichungssystem" zu verstehen, d.h. als eine mit Testfunktionen $\phi \in W_0^{1,2}(\Omega,\mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\Omega,\mathbb{R}^N)$ zu testende Integralgleichung

$$\int_\Omega A_{ik}^{\alpha\beta}(x,u(x))\,D_\alpha u^i(x)\,D_\beta\phi^k(x)\,d\mathcal{L}^n(x) = \int_\Omega f_k(x,u(x),Du(x))\,\phi^k(x)\,d\mathcal{L}^n(x). \tag{1.2}$$

Wir werden folgende **General-Voraussetzungen** an die Koeffizienten-Funktionen $A_{ik}^{\alpha\beta}(x,z)$ und $f_k(x,z,p)$ im Folgenden machen:

GV (i) Für jedes $u \in W^{1,2}(\Omega,\mathbb{R}^N)$ seien die Verkettungen $x \mapsto A_{ik}^{\alpha\beta}(x,u(x))$ und $x \mapsto f_k(x,u(x),Du(x))$ $\mathcal{L}^n-$messbare Funktionen bzgl. $x \in \Omega$.

GV (ii) Die Koeffizienten-Funktionen $(x,z) \mapsto A_{ik}^{\alpha\beta}(x,z)$ seien symmetrisch und gleichmässig elliptisch, d.h. erfüllen für alle $\alpha,\beta = 1,\dots,n$ und $i,k = 1,\dots,N$:

$$A_{ik}^{\alpha\beta}(x,z) = A_{ik}^{\beta\alpha}(x,z) \quad \text{und} \quad A_{ik}^{\alpha\beta}(x,z) = A_{ki}^{\alpha\beta}(x,z) \qquad \text{und}$$

$$A_{ik}^{\alpha\beta}(x,z)\,\xi_\alpha^i\,\xi_\beta^k \geq \lambda\,|\xi|^2 \quad \text{für alle } \xi \in \mathbb{R}^{nN}$$

für alle $(x,z) \in \Omega \times \mathbb{R}^N$ und für ein $\lambda > 0$.

GV (iii) Es existiere ein $\mu \geq \lambda$, sodass

$$|A_{ik}^{\alpha\beta}(x,z)| \leq \mu$$

für alle $(x,z) \in \Omega \times \mathbb{R}^N$ und alle $\alpha,\beta = 1,\dots,n$ und $i,k = 1,\dots,N$ gelte.

GV (iv) Es existieren Konstanten $a,b \geq 0$, sodass

$$|f(x,z,p)| \leq a\,|p|^2 + b$$

für alle $(x,z,p) \in \Omega \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^{nN}$ gelte.

Wir werden insbesondere den Spezialfall $A_{ik}^{\alpha\beta} = \tilde{A}^{\alpha\beta}\,\delta_{ik}$, d.h. den Fall eines elliptischen Systems in sogenannter „Diagonalform" untersuchen. In diesem Spezialfall entkoppelt sich die komplizierte Differential-Vorschrift in (1.2) an simultan alle Komponenten der gesuchten Lösung u zu N separaten schwachen Differentialgleichungen für die N Komponenten $u^1,\dots,u^N$ von u, d.h. präzise zu

$$-D_\beta(\tilde{A}^{\alpha\beta}(\,\cdot\,,u(\,\cdot\,))\,D_\alpha u^k(\,\cdot\,)) = f_k(\,\cdot\,,u(\,\cdot\,),Du(\,\cdot\,)) \qquad \text{auf } \Omega, \tag{1.3}$$

für $k = 1, \ldots, N$, wobei der auf u wirkende Differentialoperator 2.Ordnung $[-D_\beta(\tilde{A}^{\alpha\beta}(x, u(x))\, D_\alpha]$ jede Komponente von u in derselben Weise behandelt.
Zur Orientierung der mathematischen Situation betrachten wir zunächst die folgenden

Beispiele:

(i) Systeme elliptischer partieller Differential-Gleichungen in Divergenz-Form, speziell Systeme schwacher Gleichungen der Form (1.1), traten ursprünglich in der Variationsrechnung auf. Ist $F = F(x, z, p)$ eine auf $\Omega \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^{nN}$ definierte und stetig differenzierbare Funktion, so erhält man für die erste Variation $\delta\mathcal{F}(u, \phi) := \frac{d}{d\epsilon}\mathcal{F}(u+\epsilon\phi)|_{\epsilon=0}$ des zu F korrespondierenden Funktionals $\mathcal{F}(u) := \int_\Omega F(x, u(x), Du(x))\, dx$:

$$\delta\mathcal{F}(u, \phi) = \int_\Omega \frac{\partial F}{\partial p^k_\beta}(x, u(x), Du(x))\, D_\beta\phi^k(x) \,+\, \frac{\partial F}{\partial z^l}(x, u(x), Du(x))\, \phi^l(x)\, dx \qquad (1.4)$$

für beliebige „Variationen" $\phi \in C^\infty_c(\Omega, \mathbb{R}^N)$. Ist die Lagrange-Funktion F von der speziellen (in p) „quadratischen" Form $F(x, z, p) = \frac{1}{2}A^{\alpha\beta}_{ik}(x, z)\, p^i_\alpha\, p^k_\beta$, für eine Koeffizientenmatrix $A^{\alpha\beta}_{ik}$, die den Bedingungen GV (ii) – GV (iii) genüge und aus $C^1_b(\Omega \times \mathbb{R}^N, \mathbb{R}^{(nN)^2})$ sei, so gilt

$$\frac{\partial F}{\partial p^l_\gamma}(x, z, p) = A^{\alpha\gamma}_{il}(x, z)\, p^i_\alpha \;\text{ und }\; \frac{\partial F}{\partial z^l}(x, z, p) = \frac{1}{2}\,\frac{\partial A^{\alpha\beta}_{ik}}{\partial z^l}(x, z)\, p^i_\alpha\, p^k_\beta. \qquad (1.5)$$

Ein kritischer Punkt u von $\mathcal{F}$, d.h. eine Funktion, welche $\delta\mathcal{F}(u, \phi) = 0$ für alle $\phi \in C^\infty_c(\Omega, \mathbb{R}^N)$ erfüllt, löst somit wegen (1.4) und (1.5) das System schwacher Gleichungen

$$\int_\Omega A^{\alpha\beta}_{ik}(x, u(x))\, D_\alpha u^i(x)\, D_\beta\phi^k(x) \,+\, \frac{1}{2}\,\frac{\partial A^{\alpha\beta}_{ik}}{\partial z^l}(x, u(x))\, D_\alpha u^i(x)\, D_\beta u^k(x)\, \phi^l(x)\, dx = 0 \qquad (1.6)$$

für alle $\phi \in C^\infty_c(\Omega, \mathbb{R}^N)$, welches gerade eine Divergenz-Form-Gleichung des Typs (1.2) ist, die wegen $(A^{\alpha\beta}_{ik}) \in C^1_b(\Omega \times \mathbb{R}^N, \mathbb{R}^{(nN)^2})$ auch GV (i) und GV (iv) für $f(x, z, p) := -\frac{1}{2}\,\nabla_z(A^{\alpha\beta}_{ik})(x, z)\, p^i_\alpha\, p^k_\beta$ erfüllt.

(ii) Die quadratische Lagrange-Funktion aus Beispiel (i) taucht beispielsweise in der Differential-Geometrie auf. Seien $(\mathcal{M}, \gamma)$ und $(\mathcal{N}, g)$ glatte Riemannsche Mannigfaltigkeiten der Dimensionen n und N mit den Metriken γ und g. Für C^1-Abbildungen $u : (\mathcal{M}, \gamma) \to (\mathcal{N}, g)$ definiert man deren sogenannte „Energie" durch

$$\mathcal{E}_{\gamma,g}(u) := \int_\mathcal{M} \frac{1}{2}\, g_{ik}(u)\, \gamma^{\alpha\beta}\, D_\alpha u^i\, D_\beta u^k\, dvol_\gamma.$$

Wegen $dvol_\gamma(x) = \sqrt{\det(\gamma^{\alpha\beta}(x))}\, dx$ ist hier somit die Lagrange-Funktion durch $F(x, z, p) = \frac{1}{2}A^{\alpha\beta}_{ik}(x, z)\, p^i_\alpha\, p^k_\beta$ mit $A^{\alpha\beta}_{ik}(x, z) := g_{ik}(z)\, \gamma^{\alpha\beta}(x)\, \sqrt{\det(\gamma^{\alpha\beta}(x))}$ gegeben, sodass wir hier (nach Einführung zweier Atlanten auf $\mathcal{M}$ und $\mathcal{N}$) für einen kritischen Punkt u der Energie $\mathcal{E}$ auf einer Karte $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ (zu einer beliebigen offenen Teilmenge von $\mathcal{M}$) das System

$$\int_\Omega g_{ik}(u(x))\,\gamma^{\alpha\beta}(x)\,D_\alpha u^i(x)\,D_\beta\phi^k(x)\,\sqrt{\det(\gamma^{\alpha\beta}(x))}\,dx$$
$$= -\int_\Omega \frac{1}{2}\,\frac{\partial}{\partial z^l} g_{ik}(u(x))\,\gamma^{\alpha\beta}(x)\,\sqrt{\det(\gamma^{\alpha\beta}(x))}\,D_\alpha u^i(x)\,D_\beta u^k(x)\,\phi^l(x)\,dx$$

für $\phi \in C_c^\infty(\Omega, \mathbb{R}^N)$ erhalten. Schreiben wir abkürzend $\gamma := \det(\gamma^{\alpha\beta})$ und führen wir den Beltrami-Laplace-Operator $\triangle_\gamma(\cdot) := \frac{1}{\sqrt{\gamma}}\,D_\beta(\sqrt{\gamma}\gamma^{\alpha\beta}D_\alpha(\cdot))$ ein, so erhalten wir hieraus mittels partieller Integration das klassische Gleichungssystem

$$\triangle_\gamma(u^m) = \frac{1}{2}\,\gamma^{\alpha\beta}\,g^{ml}(u)\,\frac{\partial}{\partial z^l} g_{ik}(u)\,D_\alpha u^i\,D_\beta u^k - \gamma^{\alpha\beta}\,g^{ml}(u)\,\frac{\partial}{\partial z^k}\,g_{il}(u)\,D_\alpha u^i\,D_\beta u^k \tag{1.7}$$

$m = 1, \ldots, N$, in Diagonalform für die N Komponenten einer harmonischen C^2-Abbildung u von $(\mathcal{M}, \gamma)$ nach $(\mathcal{N}, g)$, oder auch eleganter

$$-\triangle_\gamma(u^m) = \gamma^{\alpha\beta}\,\Gamma^m_{ik}(u(x))\,D_\alpha u^i\,D_\beta u^k, \tag{1.8}$$

$m = 1, \ldots, N$, bei Verwendung der Christoffel-Symbole

$$\Gamma^m_{ij}(z) := \frac{1}{2}\,g^{ml}(z)\,\Big(\frac{\partial}{\partial z^j} g_{il}(z) - \frac{\partial}{\partial z^l} g_{ij}(z) + \frac{\partial}{\partial z^i} g_{jl}(z)\Big)$$

bezüglich der Metrik g der Zielmannigfaltigkeit $\mathcal{N}$.

(iii) Im Fall $N = 1$, d.h. im Fall einer einzigen Gleichung, bewiesen de Giorgi und Nash in 1957 bzw. 1958 und später Trudinger mittels der Harnack-Ungleichung (lokale) Hölderstetigkeit einer Lösung u von (1.1), also $u \in C^{0,\alpha}_{loc}(\Omega)$, für ein $\alpha = \alpha(\lambda, a, b, \mu, n) > 0$, falls ausserdem die rechte Seite $f(\cdot, u(\cdot), \nabla u(\cdot))$ aus $L^{q/2}(\Omega)$, für ein $q > n$, ist.

(iv) Desweiteren werden wir für den skalaren Fall $N = 1$ im vierten Teil der Vorlesung beweisen, dass eine Lösung $u \in W^{1,2}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ von (1.1) bereits in $C^{0,\alpha}_{loc}(\Omega)$, für ein $\alpha = \alpha(\lambda, a, b, \mu, n) > 0$ liegt (Ladyzenskaja, Uralceva).

(v) Die Notwendigkeit der Bedingung „$u \in L^\infty(\Omega)$" (im letzten Beispiel) erkennt man an der Funktion $u(x) := \log(1 - \log(|x|))$, welche zwar in $W^{1,2}(B^2_1(0))$ liegt, die elliptische Gleichung

$$-\triangle u = |\nabla u|^2$$

klassisch auf $B^2_1(0) \setminus \{0\}$ und schwach auf $B^2_1(0)$ löst, jedoch nicht in $L^\infty(B^2_1(0))$ liegt und in der Tat für $|x| \to 0$ gegen ∞ divergiert, also insbesondere nicht stetig im Ursprung ist.

(vi) Bereits im Fall $n = N = 2$ kann das Resultat von Ladyzenskaja, Uralceva jedoch nicht mehr gelten, da die Funktionen

$$u_\sigma(x) := \begin{pmatrix} \sin(\sigma\,\log(1 - \log(|x|))) \\ \cos(\sigma\,\log(1 - \log(|x|))) \end{pmatrix}$$

für $\sigma > 0$, zwar in $W^{1,2}(B_1^2(0)) \cap L^\infty(B_1^2(0))$ liegen und das Gleichungssystem

$$-\triangle u = f_\sigma(u, \nabla u)$$

mit

$$f_\sigma(z,p) := \begin{pmatrix} z^1 + \frac{1}{\sigma} z^2 \\ z^2 - \frac{1}{\sigma} z^1 \end{pmatrix} |p|^2$$

also insbesondere mit dem in den General-Voraussetzungen geforderten Wachstum $|f_\sigma(z,p)| \leq (1+\sigma^{-2})^{1/2} |z| |p|^2$, klassisch auf $B_1^2(0) \setminus \{0\}$ und schwach auf $B_1^2(0)$ lösen, jedoch offenbar nicht stetig im Ursprung sind.

(vii) Im Fall $n = N \geq 3$ kann man dies bereits anhand der simplen Funktion $u(x) := \frac{x}{|x|}$ nachprüfen, welche zwar in $W^{1,2}(B_R^n(0)) \cap L^\infty(B_R^n(0))$ liegt und das Gleichungssystem

$$-\triangle u = u\,|\nabla u|^2 \tag{1.9}$$

klassisch auf $B_R^n(0) \setminus \{0\}$ und schwach auf $B_R^n(0)$ löst, aber offenbar nicht stetig im Ursprung ist. Man bemerke, dass das Gleichungssystem (1.9) gerade das System (1.8) für $(\mathcal{M}, \gamma) = (B_R^n(0), g_{\mathbb{R}^n})$ und $(\mathcal{N}, g) = (S^n, g_{\mathbb{R}^{n+1}})$ ist, da die Christoffel-Symbole von $(S^n, g_{\mathbb{R}^{n+1}})$ durch $\Gamma_{ij}^m(z) = \delta_{ij}\, z^m$ gegeben sind. Somit zeigt dieses Beispiel auch, dass $u(x) := \frac{x}{|x|}$ eine schwach-harmonische Abbildung vom Ball $B_R^n(0)$ in die Sphäre S^n mit nur einer isolierten Singularität in 0 ist, sodass man im Allgemeinen isolierte Singularitäten schwach-harmonischer Abbildungen, d.h. schwacher Lösungen von (1.8), zwischen Riemannschen Mannigfaltigkeiten mit Dimension > 2 nicht mehr heben kann !

(viii) Jedoch kann man dies in der Tat im Spezialfall $n = 2$. In Theorem 3.6 in ([SU81]) wird bewiesen, dass eine schwach harmonische Abbildung u von $(B_1^2(0), \gamma)$ in eine Riemannsche Mannigfaltigkeit $(\mathcal{N}, g)$ mit endlicher Energie, also dass eine schwache Lösung u von (1.8) auf $(B_1^2(0), \gamma)$ mit $\mathcal{E}_{\gamma,g}(u) < \infty$, die auf $B_1^2(0) \setminus \{0\}$ (1.8) klassisch löst, bereits glatt und harmonisch auf ganz $B_1^2(0)$ ist.

2 Klassische Lemmata von De Giorgi, Campanato und Morrey

Lemma 2.1 (De Giorgi) *Seien $x_0 \in \Omega$ ein fixierter Punkt und $u \in C^2(\Omega \setminus \{x_0\}, \mathbb{R}^N) \cap W^{1,2}(\Omega, \mathbb{R}^N)$ eine klassische Lösung von (1.1) auf $\Omega \setminus \{x_0\}$, also insbesondere mit $A_{ik}^{\alpha\beta}(\,\cdot\,, u(\,\cdot\,)) \in C^1(\Omega \setminus \{x_0\}) \cap L^\infty(\Omega)$ und $f(\,\cdot\,, u(\,\cdot\,), \nabla u(\,\cdot\,)) \in C^0(\Omega \setminus \{x_0\}, \mathbb{R}^N)$.*
Dann löst u das System (1.1) bereits im schwachen Sinne auf Ω, also das System (1.2) für alle Testfunktionen $\phi \in W_0^{1,2}(\Omega, \mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^N)$.

Beweis:
Schritt I) Wir wählen eine glatte Funktionenfamilie $\{\eta_\epsilon\} \subset C^\infty(\mathbb{R})$, $\epsilon > 0$, mit $\eta_\epsilon|_{(-\infty,\epsilon]} \equiv 0$, $\eta_\epsilon|_{[2\epsilon,\infty)} \equiv 1$ und

$$0 \leq \eta_\epsilon \leq 1 \quad \text{und} \quad |\eta_\epsilon'| \leq \frac{2}{\epsilon} \quad \text{auf } \mathbb{R},$$

und eine beliebige Funktion $\phi \in C_c^\infty(\Omega, \mathbb{R}^N)$. Nun definieren wir die „Ausstampfungsfamilie" $\varphi_\epsilon := \phi\, \eta_\epsilon(|\,\cdot\, - x_0|)$ aus $C_c^\infty(\Omega \setminus \overline{B_{\frac{\epsilon}{2}}(x_0)}, \mathbb{R}^N)$ von ϕ um den Punkt x_0. Multiplizieren wir das klassische Gleichungssystem (1.1) für u mit φ_ϵ und integrieren wir partiell, so erhalten wir bei Beachtung von

$$D_\beta(\varphi_\epsilon^k)(x) = D_\beta \phi^k\, \eta_\epsilon(|x - x_0|) + \phi^k\, \eta_\epsilon'(|x - x_0|)\, \frac{(x^\beta - x_0^\beta)}{|x - x_0|}$$

das Integralsystem

$$\int_\Omega (A_{ik}^{\alpha\beta}(x, u(x))\, D_\alpha u^i(x)\, D_\beta \phi^k(x) - f_k(x, u(x), \nabla u(x))\, \phi^k(x))\, \eta_\epsilon(|x - x_0|)\, dx \tag{2.10}$$

$$= - \int_{T_{2\epsilon}(x_0)} A_{ik}^{\alpha\beta}(x, u(x))\, D_\alpha u^i(x)\, \phi^k(x)\, \eta_\epsilon'(|x - x_0|)\, \frac{(x^\beta - x_0^\beta)}{|x - x_0|}\, dx, \tag{2.11}$$

wenn wir beachten, dass der Träger von $\eta_\epsilon'(|\,\cdot\, - x_0|)$ im Abschluss des offenen Annuli $T_{2\epsilon}^n(x_0) := B_{2\epsilon}^n(x_0) \setminus \overline{B_\epsilon^n(x_0)}$ enthalten ist. Nutzen wir nun die Generalvoraussetzungen an $A_{ik}^{\alpha\beta}$ und f_k, sowie $\nabla u \in L^2(\Omega, \mathbb{R}^{nN})$ aus, so liefert wegen $\eta_\epsilon \to \chi_{(0,\infty)}$ (punktweise auf $\mathbb{R}$) der Satz von Lebesgue, dass die linke Seite (2.10) gegen

$$\int_\Omega A_{ik}^{\alpha\beta}(x, u(x))\, D_\alpha u^i(x)\, D_\beta \phi^k(x) - f_k(x, u(x), \nabla u(x))\, \phi^k(x)\, dx$$

für $\epsilon \to 0$ konvergiert. Die rechte Seite (2.11) schätzen wir mittels der Hölder-Ungleichung und $|\eta_\epsilon'| \leq \frac{2}{\epsilon}$ folgendermassen ab:

$$\begin{aligned}
&\left| \int_{T_{2\epsilon}(x_0)} A_{ik}^{\alpha\beta}(x, u(x))\, D_\alpha u^i(x)\, \phi^k(x)\, \eta_\epsilon'(|x - x_0|)\, \frac{(x^\beta - x_0^\beta)}{|x - x_0|}\, dx \right| \\
&\leq C(\mu, n, N)\ \|\, \phi\, \|_{L^\infty(\Omega)}\ \Big(\int_{T_{2\epsilon}(x_0)} |\nabla u|^2\, dx\Big)^{\frac{1}{2}} \Big(\int_{T_{2\epsilon}(x_0)} |\eta_\epsilon'(|x - x_0|)|^2\, dx\Big)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq C(\mu, n, N)\ \|\, \phi\, \|_{L^\infty(\Omega)}\ \Big(\int_{T_{2\epsilon}(x_0)} |\nabla u|^2\, dx\Big)^{\frac{1}{2}}\, \epsilon^{\frac{n-2}{2}} \to 0,
\end{aligned}$$

für $\epsilon \to 0$, wenn wir erneut $\nabla u \in L^2(\Omega, \mathbb{R}^{nN})$ und $n \geq 2$ beachten.
Schritt II) Nun wählen wir eine beliebige Testfunktion $\phi \in W_0^{1,2}(\Omega, \mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^N)$ und eine Folge $\{\phi_j\} \subset C_c^\infty(\Omega, \mathbb{R}^N)$ mit

$$\phi_j \to \phi \qquad \text{stark in } W^{1,2}(\Omega, \mathbb{R}^N). \tag{2.12}$$

Desweiteren definieren wir die Funktion

$$\eta(t) := \begin{cases} t & : \quad |t| \leq \| \phi \|_{L^\infty(\Omega)} \\ \operatorname{sign}(t) \, \| \phi \|_{L^\infty(\Omega)} & : \quad |t| > \| \phi \|_{L^\infty(\Omega)} \, . \end{cases}$$

Wir bemerken, dass dieses η aus $C^{0,1}(\mathbb{R})$ mit Lipschitz-Konstante 1 ist und $\eta(0) = 0$ erfüllt. Insbesondere gilt für die Verkettungen: $\eta \circ \phi^k = \phi^k \in W^{1,2}(\Omega)$, $\eta \circ \phi_j^k \in C_c^{0,1}(\Omega)$ und $|\eta \circ \phi_j^k| \leq \| \phi \|_{L^\infty(\Omega)}$ f.ü. auf Ω. Wegen $\mathrm{Lip}(\eta) = 1$ haben wir ausserdem $|\nabla(\eta \circ \phi_j^k)| \leq |\nabla \phi_j^k|$ f.ü. auf Ω und somit zusammen mit (2.12) erstens $\| \eta \circ \phi_j^k \|_{W^{1,2}(\Omega)} \leq$ Konst.(ϕ, Ω) für alle $j \in \mathbb{N}$ und $k = 1, \ldots, N$, und ausserdem $\eta \circ \phi_j^k \to \eta \circ \phi^k$ in $L^2(\Omega)$. Somit existiert eine Teilfolge $\{\eta \circ \phi_{j_l}^k\}$ von $\{\eta \circ \phi_j^k\}$, die schwach in $W^{1,2}(\Omega)$ gegen $\eta \circ \phi^k$ konvergiert. Nach dem Lemma von Mazur existiert somit zu jedem k eine Folge $\{\xi_j^k\} \subset C_c^{0,1}(\Omega)$, deren Glieder Konvexkombinationen von Gliedern der Folge $\{\eta \circ \phi_{j_l}^k\}$ sind, die

$$\xi_j^k \to \eta \circ \phi^k \qquad \text{stark in } W^{1,2}(\Omega) \tag{2.13}$$

erfüllt. Im Hinblick auf das Resultat von Schritt I betrachten wir nun die Glättungen $(\xi_j^k)_\epsilon := \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_\epsilon(\,\cdot\, - y)\, \xi_j^k(y)\, dy$. Wegen $\{\xi_j^k\} \subset C_c^{0,1}(\Omega)$ gilt für jedes feste j und k

$$(\xi_j^k)_\epsilon \to \xi_j^k \qquad \text{stark in } W^{1,2}(\Omega)$$

für $\epsilon \searrow 0$. Somit existiert eine Nullfolge $\{\epsilon_j\}$, sodass die Funktionen $\pi_j^k := (\xi_j^k)_{\epsilon_j}$ sowohl in $C_c^\infty(\Omega)$ liegen als auch

$$\| \pi_j^k - \xi_j^k \|_{W^{1,2}(\Omega)} \to 0$$

für $j \to \infty$ erfüllen. Zusammen mit (2.13) gilt also

$$\pi_j^k \to \eta \circ \phi^k = \phi^k \qquad \text{stark in } W^{1,2}(\Omega). \tag{2.14}$$

Da wir die Behauptung des Lemmas bereits für Test-Funktionen aus $C_c^\infty(\Omega)$ bewiesen, gilt insbesondere

$$\int_\Omega A_{ik}^{\alpha\beta}(x, u(x))\, D_\alpha u^i(x)\, D_\beta \pi_j^k(x)\, dx = \int_\Omega f_k(x, u(x), \nabla u(x))\, \pi_j^k(x)\, dx \tag{2.15}$$

für alle j. Unter Beachtung der Generalvoraussetzungen an $A_{ik}^{\alpha\beta}$ und f_k, sowie $\nabla u \in L^2(\Omega, \mathbb{R}^{nN})$ und

$$\| \pi_j^k \|_{L^\infty(\Omega)} \leq \| \xi_j^k \|_{L^\infty(\Omega)} \leq \| \phi \|_{L^\infty(\Omega)} \qquad \text{für alle } j \text{ und } k$$

folgt nun die Behauptung des Lemmas, d.h. die gewünschte Gleichung

$$\int_\Omega A_{ik}^{\alpha\beta}(x, u(x))\, D_\alpha u^i(x)\, D_\beta \phi^k(x)\, dx = \int_\Omega f_k(x, u(x), \nabla u(x))\, \phi^k(x)\, dx$$

aus der Konvergenz (2.14) und dem Satz von Lebesgue, indem wir in (2.15) j gegen ∞ streben lassen.

$///$

Definition 2.1 *(i) Für eine Funktion $u \in L^1(\Omega, \mathbb{R}^N)$ definieren wir deren Mittelwert durch*

$$\overline{u_\Omega} := \frac{1}{\mathcal{L}^n(\Omega)} \int_\Omega u \, d\mathcal{L}^n.$$

Speziell für $\Omega := B_r(x)$ notieren wir $\bar{u}_{x,r} := \overline{u_{B_r(x)}}$.

(ii) Für ein $x \in \Omega$ setzen wir $R_0(x) := dist(x, \partial\Omega)$, und

$$\Omega_\epsilon := \{x \in \Omega | dist(x, \partial\Omega) > \epsilon\} \subset\subset \Omega \qquad \text{für } \epsilon > 0.$$

Lemma 2.2 (Campanato) *Falls $u \in L^1_{loc}(\Omega, \mathbb{R}^N)$ für jedes $x \in \Omega$ die Wachstumseigenschaft*

$$\int_{B_r(x)} |u - \bar{u}_{x,r}|^2 \, d\mathcal{L}^n \leq K \, r^{n+2\alpha} \qquad \text{für alle } r \in (0, \frac{R_0(x)}{2})$$

für festes $K > 0$ und $\alpha \in (0,1)$ erfüllt, so ist $u \in C^{0,\alpha}_{loc}(\Omega, \mathbb{R}^N)$, und es gilt

$$|u(x) - u(y)| \leq C(n, \alpha, \Omega, \epsilon) \sqrt{K} \, |x - y|^\alpha \qquad \forall x, y \in \Omega_\epsilon.$$

Beweis:
Wir wählen einen beliebigen Lebesgue-Punkt $x \in \Omega$ von u und schätzen zuerst mittels der Jensen-Ungleichung ab:

$$|\bar{u}_{x,r} - \bar{u}_{x,2r}|^2 \leq (\frac{1}{\mathcal{L}^n(B_r(x))} \int_{B_r(x)} |u - \bar{u}_{x,2r}| \, d\mathcal{L}^n)^2$$

$$\leq (\frac{2^n}{\mathcal{L}^n(B_{2r}(x))} \int_{B_{2r}(x)} |u - \bar{u}_{x,2r}| \, d\mathcal{L}^n)^2 \leq \frac{2^{2n}}{\mathcal{L}^n(B_{2r}(x))} \int_{B_{2r}(x)} |u - \bar{u}_{x,2r}|^2 \, d\mathcal{L}^n.$$

Zusammen mit der Wachstumsvoraussetzung an u folgt hieraus:

$$|\bar{u}_{x,r} - \bar{u}_{x,2r}|^2 \leq \frac{2^{2n}}{\mathcal{L}^n(B_{2r}(x))} K \, (2r)^{n+2\alpha} = \frac{2^{2n+2\alpha}}{\omega_n} K \, r^{2\alpha}$$

und somit

$$|\bar{u}_{x,r} - \bar{u}_{x,2r}| \leq C(n, \alpha, K) \, r^\alpha \qquad \text{für alle } r \in (0, \frac{R_0(x)}{4}) \tag{2.16}$$

mit $C(n, \alpha, K) := \frac{2^{n+\alpha}}{\sqrt{\omega_n}} \sqrt{K}$. Wir schreiben nun
$\bar{u}_{x,2^{-k}r} - \bar{u}_{x,r} = \sum_{i=0}^{k-1} \bar{u}_{x,2^{-i-1}r} - \bar{u}_{x,2^{-i}r}$ und erhalten aus (2.16):

$$|\bar{u}_{x,2^{-k}r} - \bar{u}_{x,r}| \leq \sum_{i=0}^{k-1} |\bar{u}_{x,2^{-i-1}r} - \bar{u}_{x,2^{-i}r}|$$

$$\leq C(n, \alpha, K) \sum_{i=0}^{k-1} (2^{-i-1} r)^\alpha = C(n, \alpha, K) \, 2^{-\alpha} \, \frac{1 - 2^{-k\alpha}}{1 - 2^{-\alpha}} \, r^\alpha.$$

Da x ein Lebesgue-Punkt von u ist, folgt hieraus bei $k \to \infty$:

$$|u(x) - \bar{u}_{x,r}| \leq \tilde{C}(n, \alpha, K) \, r^\alpha \qquad \text{für alle } r \in (0, \frac{R_0(x)}{4}) \tag{2.17}$$

mit $\tilde{C}(n,\alpha,K) := \frac{C(n,\alpha,K)}{2^\alpha-1} = \frac{2^{n+\alpha}}{(2^\alpha-1)\sqrt{\omega_n}}\sqrt{K}$. Nun wählen wir ein $r \in (0, \frac{R_0(x)}{16})$ und einen weiteren Lebesgue-Punkt $y \in \Omega$ mit $|x-y| = r$, und schätzen zunächst wie oben mittels der Jensen-Ungleichung

$$|\bar{u}_{x,r} - \bar{u}_{y,2r}|^2 \leq \frac{1}{\mathcal{L}^n(B_r(x))} \int_{B_r(x)} |u - \bar{u}_{y,2r}|^2 \, d\mathcal{L}^n$$

ab. Beachten wir $B_r(x) \subset B_{2r}(y) \subset\subset \Omega$, so folgt hieraus

$$|\bar{u}_{x,r} - \bar{u}_{y,2r}|^2 \leq \frac{2^n}{\mathcal{L}^n(B_{2r}(y))} \int_{B_{2r}(y)} |u - \bar{u}_{y,2r}|^2 \, d\mathcal{L}^n$$

und zusammen mit der Wachstumsbedingung an u:

$$|\bar{u}_{x,r} - \bar{u}_{y,2r}| \leq \frac{1}{r^{n/2}} \sqrt{K}\, 2^{\frac{n}{2}+\alpha}\, r^{\frac{n}{2}+\alpha} = \sqrt{K}\, 2^{\frac{n}{2}+\alpha}\, r^\alpha. \tag{2.18}$$

Beachten wir noch, dass aus (2.17) und wegen $r < \frac{R_0(x)}{16} < \frac{R_0(y)}{15} < \frac{R_0(y)}{8}$ per Symmetrie auch $|u(y) - \bar{u}_{y,2r}| \leq \tilde{C}(n,\alpha,K)\,(2r)^\alpha$ folgt, so erhalten wir insgesamt aus (2.17), (2.18) und $r = |x-y|$:

$$\begin{aligned} |u(x) - u(y)| &\leq |u(x) - \bar{u}_{x,r}| + |\bar{u}_{x,r} - \bar{u}_{y,2r}| + |\bar{u}_{y,2r} - u(y)| \\ &\leq (\tilde{C}(n,\alpha,K) + \sqrt{K}\, 2^{\frac{n}{2}+\alpha} + \tilde{C}(n,\alpha,K)\, 2^\alpha)\, r^\alpha = \tilde{C}(n,\alpha)'\sqrt{K}\, |x-y|^\alpha, \end{aligned}$$

für $\mathcal{L}^n-$fast jedes $x \in \Omega$ und $\mathcal{L}^n-$fast jedes $y \in B_{\frac{R_0(x)}{16}}(x)$.

///

Zusammen mit der Poincare-Ungleichung erhalten wir hieraus sofort das folgende berühmte Resultat von Morrey:

Theorem 2.1 (Morrey-Growth-Theorem) *Falls $u \in W^{1,2}_{loc}(\Omega, \mathbb{R}^N)$ für jedes $x \in \Omega$ die Wachstumseigenschaft*

$$r^{2-n} \int_{B_r(x)} |Du|^2 \, d\mathcal{L}^n \leq K\, r^{2\alpha} \qquad \textit{für alle } r \in (0, \frac{R_0(x)}{2}) \tag{2.19}$$

für festes $K > 0$ und $\alpha \in (0,1)$ erfüllt, so ist $u \in C^{0,\alpha}_{loc}(\Omega, \mathbb{R}^N)$, und es gilt für jedes $\epsilon > 0$:

$$|u(x) - u(y)| \leq C(n,\alpha,\Omega,\epsilon)\sqrt{K}|x-y|^\alpha \qquad \forall x, y \in \Omega_\epsilon.$$

Beweis:
Wir wählen einen beliebigen Punkt $x \in \Omega$ und erhalten durch komponentenweise Anwendung der „skalierten" Poincare-Ungleichung und (2.19):

$$\begin{aligned} \int_{B_r(x)} |u - \bar{u}_{x,r}|^2 \, d\mathcal{L}^n &\leq K_P(n)\, r^2 \int_{B_r(x)} |Du|^2 \, d\mathcal{L}^n \\ &\leq K_P(n)\, K\, r^2\, r^{n-2+2\alpha} = K_P(n)\, K\, r^{n+2\alpha} \qquad \text{für alle } r \in (0, \frac{R_0(x)}{2}). \end{aligned}$$

Somit folgt die Behauptung aus obigem Lemma von Campanato.

///

Wir werden dieses Resultat mit einer verfeinerten Variante, Lemma 2.4 unten, des folgenden Lemmas von De Giorgi kombinieren.

Lemma 2.3 $\Phi, \mu :]0, R_0] \to \mathbb{R}_+$ *seien monoton nicht-fallende Funktionen mit*

$$\Phi(\tau r) \leq \Theta\, \Phi(r) + \mu(r) \qquad \text{für } 0 < r \leq R_0$$

für geeignete $0 < \tau, \Theta < 1$ *. Dann gilt*

$$\Phi(r) \leq C(\Theta)\Big(\Big(\frac{r}{R_0}\Big)^{\gamma} \Phi(R_0) + \mu(r^{\beta} R_0^{1-\beta})\Big) \qquad \text{für } 0 < r \leq R_0,$$

wobei $\beta \in [0,1)$ *beliebig ist und* $\gamma = \gamma(\Theta, \tau, \beta) = (1-\beta)\frac{\log(\Theta)}{\log(\tau)} > 0$ *.*

Beweis:
Für $0 < r \leq r_1 \leq R_0$ gilt

$$\Phi(\tau r) \leq \Theta\, \Phi(r) + \mu(r_1),$$

da μ nicht-fallend ist. Iterieren wir dies für $\tau^k r_1$, so erhalten wir

$$\Phi(\tau^k r_1) \leq \Theta^k\, \Phi(r_1) + \mu(r_1) \sum_{i=0}^{k-1} \Theta^i \leq \Theta^k\, \Phi(R_0) + (1-\Theta)^{-1} \mu(r_1).$$

Für $0 < r \leq r_1$ wählen wir $k \in \mathbb{N}$ mit

$$\tau^k r_1 < r \leq \tau^{k-1} r_1$$

und sehen

$$\begin{aligned} \Phi(r) &\leq \Phi(\tau^{k-1} r_1) \leq \Theta^{k-1} \Phi(R_0) + (1-\Theta)^{-1} \mu(r_1) \leq \\ &\leq \Theta^{-1} \Big(\frac{r}{r_1}\Big)^{\log(\Theta)/\log(\tau)} \Phi(R_0) + (1-\Theta)^{-1} \mu(r_1). \end{aligned}$$

Wählen wir $r_1 := r^{\beta} R_0^{1-\beta} \geq r$, für ein beliebiges $\beta \in [0,1)$, so folgt

$$\Phi(r) \leq \Theta^{-1} \Big(\frac{r}{R_0}\Big)^{(1-\beta)\log(\Theta)/\log(\tau)} \Phi(R_0) + (1-\Theta)^{-1}\, \mu(r^{\beta} R_0^{1-\beta}).$$

///

Lemma 2.4 *[Widmans Lochfüller]*

(i) Sei $\Phi :]0, 2R_0] \to \mathbb{R}_+$ *eine monoton nicht-fallende Funktion, die*

$$\Phi(r) \leq K\, (\Phi(2r) - \Phi(r)) \quad \text{für } 0 < r \leq R_0 \tag{2.20}$$

für eine Konstante $K > 0$ *erfülle. Dann gilt*

$$\Phi(r) \leq \frac{1}{\Theta}\, \Phi(R_0) \Big(\frac{r}{R_0}\Big)^{\gamma} \quad \text{für } 0 < r \leq R_0, \tag{2.21}$$

wobei $\Theta := \frac{K}{K+1}$ *und* $\gamma = -\frac{\log(\Theta)}{\log(2)} = \log_2(1/\Theta)$ *ist.*

(ii) Falls eine monoton nicht-fallende Funktion $\Phi :]0, 2R_0] \to \mathbb{R}_+$ *nur*

$$\Phi(r) \le K\,(\Phi(2r) - \Phi(r)) + K\,r^\sigma \quad \text{für } 0 < r \le R_0 \tag{2.22}$$

für eine Konstante $K > 0$ *und ein* $\sigma > 1$ *erfüllt, so gilt noch*

$$\Phi(r) \le \frac{1}{\Theta^*}\,(\Phi(R_0) + R_0^{\sigma-\epsilon})\left(\frac{r}{R_0}\right)^\gamma \quad \text{für } 0 < r \le R_0, \tag{2.23}$$

für ein geeignetes $\epsilon \in (0, \sigma - 1)$, $\Theta^* := \max\{\Theta, 2^{\epsilon-\sigma}\,(1 + \Theta\,R_0^\epsilon)\} < 1$, $\Theta := \frac{K}{K+1}$ *und* $\gamma = \log_2(1/\Theta^*)$.

Beweis:
Zu (i): Wir addieren auf (2.20) $K\,\Phi(r)$, teilen durch $K+1$ und erhalten

$$\Phi(r) \le \Theta\,\Phi(2r) \quad \text{für } 0 < r \le R_0$$

mit $\Theta := \frac{K}{K+1}$. Wegen $\Theta \in (0,1)$ folgt die Behauptung (i) sofort aus Lemma 2.3, hier mit $\mu \equiv 0$ und $\beta = 0$.
ii) Wir addieren erneut auf (2.22) $K\,\Phi(r)$ und teilen durch $K+1$, also

$$\Phi(r) \le \Theta\,\Phi(2r) + \Theta\,r^\sigma \quad \text{für } 0 < r \le R_0, \tag{2.24}$$

erneut mit $\Theta := \frac{K}{K+1}$ und einem $\sigma > 1$. Wir führen für ein $\epsilon \in (0, \sigma-1)$ die Hilfsfunktion $\Phi_\epsilon(r) := \Phi(r) + r^{\sigma-\epsilon}$ ein und erhalten aus (2.24):

$$\Phi_\epsilon(r) \le \Theta\,\Phi(2r) + \Theta\,r^\sigma + r^{\sigma-\epsilon} = \Theta\,\Phi(2r) + (2r)^{\sigma-\epsilon}\,2^{\epsilon-\sigma}\,(\Theta\,r^\epsilon + 1). \tag{2.25}$$

Nun wählen wir ein geeignetes $\epsilon \in (0, \sigma-1)$, sodass $\Theta\,R_0^\epsilon < 1$ gilt, woraus insbesondere $\Theta^* := \max\{\Theta, 2^{\epsilon-\sigma}\,(\Theta\,R_0^\epsilon + 1)\} < 1$ folgt. Aus (2.25) ergibt sich also:

$$\Phi_\epsilon(r) \le \Theta^*(\Phi(2r) + (2r)^{\sigma-\epsilon}) = \Theta^*\,\Phi_\epsilon(2r),$$

für $0 < r \le R_0$. Wegen $\Theta^* < 1$ folgt aus Lemma 2.3, nun in Anwendung auf Φ_ϵ und mit Θ^* anstatt Θ, und erneut mit $\mu \equiv 0$, $\beta = 0$:

$$\Phi(r) \le \Phi_\epsilon(r) \le \frac{1}{\Theta^*}\,\Phi_\epsilon(R_0)\left(\frac{r}{R_0}\right)^\gamma = \frac{1}{\Theta^*}\,(\Phi(R_0) + R_0^{\sigma-\epsilon})\left(\frac{r}{R_0}\right)^\gamma, \tag{2.26}$$

wobei nun $\gamma = \log_2(1/\Theta^*)$ ist.

///

Bemerkung 2.5 *Zur Herleitung der lokalen Hölderstetigkeit schwacher Lösungen u des Systems (bzw. der Gleichung) (1.1) werden wir versuchen, die Voraussetzungen des Morrey-Growth-Theorems für solch ein u zu verifizieren. Genau diesem Zweck wird die zweite Variante des obigen ,,Widmanschen Lochfüllers" dienen, indem diese auf die monotone Funktion* $\Phi(r) := \int_{B_r(x_0)} |\nabla u|^2\,|x-x_0|^{2-n}\,dx$ *– um einen fixierten Punkt* $x_0 \in \Omega$ *- angewandt wird. Die zu verifizierende Widmansche Bedingung (2.22) lautet somit:*

$$\int_{B_r(x_0)} |\nabla u|^2\,|x-x_0|^{2-n}\,dx \le K \int_{T_{2r}(x_0)} |\nabla u|^2\,|x-x_0|^{2-n}\,dx + K\,r^\sigma, \tag{2.27}$$

für ein $\sigma > 1$, *wobei* $T_{2r}(x_0) = B_{2r}(x_0) \setminus \overline{B_r(x_0)}$ *das zu füllende ,,Loch" ist. Da die Grösse der Konstanten K nicht abgeschätzt werden kann, lässt sich auch die Güte des sich ergebenden Hölderexponenten* $\alpha = \frac{\gamma}{2} = \frac{1}{2}\,\log_2(1/\Theta^*) > 0$ *von u nicht berechnen.*

3 Gemittelte und klassische Greensfunktionen zu elliptischen Differentialoperatoren

Um wiederum eine Ungleichung der Form (2.27) für schwache Lösungen u des Systems (1.1) in Diagonalform zu erhalten, liegt es nahe, (1.1) mit Testfunktionen ϕ der Form

$$\phi(x) := \eta^2(x)\,(u(x) - \overline{u_{T_{2r}(x_0)}})\,|x - x_0|^{2-n}$$

für ein fixiertes $x_0 \in \Omega$, $B_{2r}(x_0) \subset\subset \Omega$ und $\eta \in C_c^\infty(B_{2r}(x_0))$ zu testen, jedoch sind diese offenbar keine zulässigen Testfunktionen. Stattdessen wählt man als Testfunktionen beispielsweise

$$\phi(x) := \eta^2(x)\,(u(x) - \overline{u_{T_{2r}(x_0)}})\,G^\rho(x, x_0),$$

wobei $G^\rho(\,\cdot\,, x_0)$ die „gemittelte" Greensfunktion zu den elliptischen, beschränkten Koeffizienten $a^{\alpha\beta}(x) := A^{\alpha\beta}(x, u(x))$ auf Ω sei. Zu deren präziser Definition bemerken wir, dass

$$a(u, v) := \int_\Omega a^{\alpha\beta}(x)\, D_\alpha u(x)\, D_\beta v(x)\, dx$$

anhand der Elliptizität, Beschränktheit und Symmetrie von $a^{\alpha\beta}$ eine sowohl koerzive als auch beschränkte symmetrische Bilinearform auf dem Hilbertraum $W_0^{1,2}(\Omega)$ ist. Somit folgt aus dem Satz von Lax-Milgram zu jedem linearen Funktional L aus $W_0^{1,2}(\Omega)^*$ die Existenz einer eindeutigen Funktion $u_L \in W_0^{1,2}(\Omega)$, welche $a(u_L, v) = L(v)$ für alle $v \in W_0^{1,2}(\Omega)$ erfüllt.

Definition 3.1 *Wir fixieren ein $y \in \Omega$ und betrachten das lineare Funktional $L(v) := \frac{1}{\mathcal{L}^n(B_\rho(y))} \int_{B_\rho(y)} v\, d\mathcal{L}^n$ auf $W_0^{1,2}(\Omega)$, für ein beliebiges $\rho > 0$. Wir definieren die gemittelte Greensfunktion $G^\rho(\,\cdot\,, y)$ als die eindeutige Funktion aus $W_0^{1,2}(\Omega)$, welche*

$$\int_\Omega a^{\alpha\beta}(x)\, D_\alpha G^\rho(x, y)\, D_\beta v(x)\, dx \equiv a(G^\rho(\,\cdot\,, y), v) = L(v) \equiv \frac{1}{\mathcal{L}^n(B_\rho(y))} \int_{B_\rho(y)} v(x)\, dx \tag{3.28}$$

für alle $v \in W_0^{1,2}(\Omega)$ erfüllt.

Definition 3.2 *Für $p \geq 1$ definieren wir die schwachen L^p-Räume auf offenem $\Omega \subset \mathbb{R}^n$:*

$$L_w^p(\Omega) := \{f : \Omega \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}\ \mathcal{L}^n - \textit{messbar} \mid \ \| f \|_{L_w^p(\Omega)} < \infty\}$$

wobei wir die Pseudo-Norm

$$\| f \|_{L_w^p(\Omega)} := \sup_{t>0} t\, \mathcal{L}^n([|f| > t])^{1/p}$$

verwenden.

Dies ist keine Norm, da man anstatt der Dreiecks-Ungleichung i.a. nur

$$\| f + g \|_{L_w^p(\Omega)} \leq 2\,(\| f \|_{L_w^p(\Omega)} + \| g \|_{L_w^p(\Omega)})$$

für beliebige $f, g \in L_w^p(\Omega)$ abschätzen kann. Zum Vergleich zwischen der L^p-Norm und der L_w^p-Pseudonorm notieren wir zwei klassische Ungleichungen:

Lemma 3.1 *(i) (Tschebyschew) Für $p \geq 1$ gilt*

$$\| f \|_{L^p_w(\Omega)} \leq \| f \|_{L^p(\Omega)} \qquad \text{für alle } f \in L^p(\Omega).$$

(ii) (Stampacchia): Für $p > 1$ gilt

$$\| f \|^{p-\epsilon}_{L^{p-\epsilon}(\Omega)} \leq \frac{p}{\epsilon} \mathcal{L}^n(\Omega)^{\frac{\epsilon}{p}} \| f \|^{p-\epsilon}_{L^p_w(\Omega)} \qquad \text{für alle } f \in L^p_w(\Omega)$$

und für alle $\epsilon \in (0, p-1]$.

Beweis:
Aussage (i) folgt sofort aus der elementaren Tschebyschew-Ungleichung $t^p \mathcal{L}^n([|f| > t]) \leq \int_\Omega |f|^p \, d\mathcal{L}^n$, für alle $t > 0$.
Zum Beweis von Aussage (ii) erinnern wir uns daran, dass für jede nicht-negative und $\mathcal{L}^n$-messbare Funktion $f : \Omega \to \mathbb{R}$, und für jede absolut-stetige, monoton-wachsende Funktion $\varphi : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ mit $\varphi(0) = 0$

$$\int_\Omega (\varphi \circ f)(x) \, d\mathcal{L}^n(x) = \int_0^\infty \varphi'(t) \, \mathcal{L}^n([f > t]) \, dt$$

gilt. Wenden wir dies auf die Funktion $\varphi(t) := t^{p-\epsilon}$ an, so folgt anhand der Definition der L^p_w−Pseudonorm:

$$\begin{aligned} \int_\Omega |f|^{p-\epsilon} \, d\mathcal{L}^n &= (p-\epsilon) \int_0^\infty t^{p-\epsilon-1} \, \mathcal{L}^n([f > t]) \, dt \\ &\leq (p-\epsilon) \int_0^\infty t^{p-\epsilon-1} \min\{\mathcal{L}^n(\Omega), t^{-p} \| f \|^p_{L^p_w(\Omega)}\} \, dt \\ &\leq (p-\epsilon) \int_0^M t^{p-\epsilon-1} \, \mathcal{L}^n(\Omega) \, dt + (p-\epsilon) \int_M^\infty t^{-\epsilon-1} \| f \|^p_{L^p_w(\Omega)} \, dt \\ &= M^{p-\epsilon} \, \mathcal{L}^n(\Omega) + \frac{p-\epsilon}{\epsilon} M^{-\epsilon} \| f \|^p_{L^p_w(\Omega)}, \end{aligned}$$

wobei $M > 0$ eine beliebig gewählte reelle Zahl sei. Lassen wir nun $M \searrow \| f \|_{L^p_w(\Omega)} \mathcal{L}^n(\Omega)^{-1/p}$ fallen, so erhalten wir hieraus

$$\begin{aligned} \| f \|^{p-\epsilon}_{L^{p-\epsilon}(\Omega)} \equiv \int_\Omega |f|^{p-\epsilon} \, d\mathcal{L}^n &\leq \mathcal{L}^n(\Omega)^{\frac{\epsilon}{p}} \| f \|^{p-\epsilon}_{L^p_w(\Omega)} + \frac{p-\epsilon}{\epsilon} \mathcal{L}^n(\Omega)^{\epsilon/p} \| f \|^{p-\epsilon}_{L^p_w(\Omega)} \\ &= \frac{p}{\epsilon} \mathcal{L}^n(\Omega)^{\frac{\epsilon}{p}} \| f \|^{p-\epsilon}_{L^p_w(\Omega)} \, . \end{aligned}$$

///

Wir kommen nun zum Hauptsatz dieses Paragraphen:

Theorem 3.1 *Seien Ω eine offene, beschränkte Teilmenge des $\mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, welche eine gleichmässige äussere Kegelbedingung erfülle, $y \in \Omega$ ein fixierter Punkt, und bezeichne $G^\rho := G^\rho(\cdot, y)$. Es gilt:*

(i) $G^\rho \geq 0 \qquad \mathcal{L}^n -$ *f.ü. auf Ω, für alle $\rho > 0$.*

(ii) $G^\rho(\,\cdot\,,y) \in L_w^{\frac{n}{n-2}}(\Omega)$ *mit*

$$\| \, G^\rho(\,\cdot\,,y) \, \|_{L_w^{\frac{n}{n-2}}(\Omega)} \leq \frac{K(n)}{\lambda}, \tag{3.29}$$

unabhängig von y*, für alle* $\rho > 0$.

(iii)

$$G^\rho(x,y) \leq K(n,\mu,\lambda)\, |x-y|^{2-n} \qquad \textit{für alle } x \neq y \in \Omega \quad \textit{und alle } \rho < \frac{|x-y|}{2}. \tag{3.30}$$

(iv)

$$\int_{\Omega \setminus \overline{B_R(y)}} |\nabla G^\rho|^2 \, dx \leq K(n,\mu,\lambda)\, R^{2-n}, \tag{3.31}$$

für jedes $R > 0$ *und* $\rho > 0$.

(v) Für jedes $\rho > 0$ *gilt*

$$G^\rho(x,y) \leq K(n,\mu,\lambda)\, \rho^{2-n} \tag{3.32}$$

in jedem Lebesgue-Punkt $x \in \Omega \setminus \{y\}$ *von* $G^\rho(\,\cdot\,,y)$*, insbesondere in* $\mathcal{L}^n$*−fast jedem Punkt* $x \in \Omega$*. Insbesondere ist* $G^\rho(\,\cdot\,,y) \in L^\infty(\Omega)$ *für jedes* $\rho > 0$.

(vi) $\| \, G^\rho \, \|_{W^{1,s}(\Omega)} \leq$ *const*$(n,s,\lambda,\mathcal{L}^n(\Omega))$*, für alle* $s \in (1, \frac{n}{n-1})$ *und* $\rho > 0$*. Insbesondere existiert eine Folge* $\rho_j \searrow 0$ *und eine Funktion* $G(\,\cdot\,,y) \in W_0^{1,s}(\Omega)$ *mit*

$$G^{\rho_j} \rightharpoonup G \equiv G(\,\cdot\,,y) \qquad \textit{schwach in } W_0^{1,s}(\Omega) \qquad \textit{für } j \to \infty, \tag{3.33}$$

für alle $s \in (1, \frac{n}{n-1})$*, und somit auch* $\| \, G(\,\cdot\,,y) \, \|_{W^{1,s}(\Omega)} \leq$ *const*$(n,s,\lambda,\mathcal{L}^n(\Omega))$ *und* $G(\,\cdot\,,y) \geq 0$ $\mathcal{L}^n -$ *f.ü. auf* Ω.

(vii) $\| \, \nabla G^\rho \, \|_{L_w^{\frac{n}{n-1}}(\Omega)} \leq K(n,\mu,\lambda)$*, für alle* $\rho > 0$ *und unabhängig von* y.

(viii) G *ist eine ,,Greensfunktion" (mit Nullrandwerten) zum Differential-Operator* $-D_\beta(a^{\alpha\beta}\, D_\alpha(\,\cdot\,))$ *auf* Ω*, d.h.* G *erfüllt*

$$a(G(\,\cdot\,,y), \phi) = \phi(y) \qquad \forall\, \phi \in C_c^\infty(\Omega), \tag{3.34}$$

$$\textit{oder auch formal} \qquad -D_\beta(a^{\alpha\beta}(\,\cdot\,)\, D_\alpha(G(\,\cdot\,,y))) = \textit{Dirac-}\delta_y.$$

(ix)

$$\int_{\Omega \setminus \overline{B_R(y)}} |\nabla G|^2 \, dx \leq K(n,\mu,\lambda)\, R^{2-n} \qquad \textit{für alle } R > 0. \tag{3.35}$$

(x) $G(\,\cdot\,,y) \in L_w^{\frac{n}{n-2}}(\Omega)$ *mit*

$$\| \, G(\,\cdot\,,y) \, \|_{L_w^{\frac{n}{n-2}}(\Omega)} \leq \frac{K(n)}{\lambda}, \tag{3.36}$$

unabhängig von y.

(xi) $\| \, \nabla G \, \|_{L_w^{\frac{n}{n-1}}(\Omega)} \leq K(n,\mu,\lambda)$*, unabhängig von* y.

(xii)

$$G(x,y) \leq K(n,\mu,\lambda)\,|x-y|^{2-n} \qquad \textit{für } \mathcal{L}^n - \textit{ fast alle } x \in \Omega. \tag{3.37}$$

(xiii)

$$G(x,y) \geq \tilde{K}(n,\mu,\lambda)\,|x-y|^{2-n} \qquad \textit{für alle } x \neq y \in \Omega \qquad \textit{mit } |x-y| < \frac{3}{4}\, dist(y,\partial\Omega). \tag{3.38}$$

Beweis:
Zu (i): Wir testen in Gleichung (3.28) mit $v := G^\rho$ bzw. $v := |G^\rho|$ und erhalten

$$0 \leq a(G^\rho, G^\rho) = \frac{1}{\mathcal{L}^n(B_\rho(y))} \int_{B_\rho(y)} G^\rho\, dx \leq \frac{1}{\mathcal{L}^n(B_\rho(y))} \int_{B_\rho(y)} |G^\rho|\, dx = a(G^\rho, |G^\rho|).$$

Somit existiert eine reelle Zahl $R \geq 1$ mit

$$a(G^\rho, G^\rho) = \frac{1}{R}\, a(G^\rho, |G^\rho|) = a(G^\rho, \frac{1}{R}\,|G^\rho|) = a(\frac{1}{R}\,|G^\rho|, G^\rho), \tag{3.39}$$

anhand der Symmetrie von a. Desweiteren gilt wegen $G^\rho \in W_0^{1,2}(\Omega)$, $R \geq 1$ und (3.39):

$$a(\frac{1}{R}\,|G^\rho|, \frac{1}{R}\,|G^\rho|) = \frac{1}{R^2}\, a(G^\rho, G^\rho) \leq a(G^\rho, G^\rho) = a(G^\rho, \frac{1}{R}\,|G^\rho|),$$

also $a(\frac{1}{R}\,|G^\rho| - G^\rho, \frac{1}{R}\,|G^\rho|) \leq 0$. Da aus (3.39) auch $a(\frac{1}{R}\,|G^\rho| - G^\rho, G^\rho) = 0$ folgt, erhalten wir insgesamt

$$0 \leq a(\frac{1}{R}\,|G^\rho| - G^\rho, \frac{1}{R}\,|G^\rho| - G^\rho) \leq 0,$$

und somit $\frac{1}{R}\,|G^\rho| - G^\rho \equiv 0$ anhand der Koerzivität von a auf $W_0^{1,2}(\Omega)$. Somit muss $R = 1$ und $G^\rho \geq 0$ $\mathcal{L}^n -$ f.ü. auf Ω gelten.
Zu (ii): Nun schätzen wir $\| \; G^\rho \; \|_{L_w^{\frac{n}{n-2}}(\Omega)}$ für alle $\rho > 0$ ab. Wir werden (3.28) mittels $\phi_t := v_t \circ G^\rho$ testen, wobei wir für ein festes $t > 0$

$$v_t(s) := \begin{cases} 0 & : \quad s \leq t \\ \frac{1}{t} - \frac{1}{s} & : \quad s > t \end{cases}$$

setzen. Wir erhalten somit

$$\frac{dv_t}{ds}(s) = \begin{cases} 0 & : \quad s \leq t \\ \frac{1}{s^2} & : \quad s > t \end{cases}$$

und daher insbesondere $\| \; (v_t)' \; \|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq \frac{1}{t^2} < \infty$, sodass insbesondere die Verkettung $v_t \circ G^\rho \in W_0^{1,2}(\Omega)$ ist. Wegen

$$D_\beta \phi_t = \begin{cases} 0 & : \quad \text{auf } [G^\rho \leq t] \\ \frac{D_\beta G^\rho}{|G^\rho|^2} & : \quad \text{auf } \Omega(t) := \{G^\rho > t\} \end{cases}$$

folgt nun aus (3.28):

$$\int_{\Omega(t)} a^{\alpha\beta} \frac{D_\alpha G^\rho \, D_\beta G^\rho}{|G^\rho|^2} \, dx \equiv a(G^\rho, \phi_t) = \frac{1}{\mathcal{L}^n(B_\rho(y))} \int_{B_\rho(y)} \phi_t \, dx$$
$$= \frac{1}{\mathcal{L}^n(B_\rho(y))} \int_{B_\rho(y)} \frac{1}{t} - \frac{1}{G^\rho} \, dx \leq \frac{1}{\mathcal{L}^n(B_\rho(y))} \int_{B_\rho(y)} \frac{1}{t} \, dx = \frac{1}{t},$$

also zusammen mit der Elliptizität der $a^{\alpha\beta}$:

$$\int_{\Omega(t)} \frac{|\nabla G^\rho|^2}{|G^\rho|^2} \, dx \leq \frac{1}{\lambda t}. \tag{3.40}$$

Nun betrachten wir die Verkettung $\psi_t(s) := w_t \circ G^\rho$, wobei wir für ein festes $t > 0$

$$w_t(s) := \begin{cases} 0 & : \quad s \leq t \\ \log\left(\frac{s}{t}\right) & : \quad s > t \end{cases}$$

definieren. Wir erhalten somit

$$\frac{dw_t}{ds}(s) = \begin{cases} 0 & : \quad s \leq t \\ \frac{1}{s} & : \quad s > t \end{cases}$$

und daher insbesondere $\| \ (w_t)' \ \|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq \frac{1}{t} < \infty$, sodass insbesondere die Verkettung $w_t \circ G^\rho \in W_0^{1,2}(\Omega)$ ist. Wegen

$$D_\beta \psi_t = \begin{cases} 0 & : \quad \text{auf } [G^\rho \leq t] \\ \frac{D_\beta G^\rho}{G^\rho} & : \quad \text{auf } \Omega(t) := \{G^\rho > t\} \end{cases}$$

folgt nun aus der Sobolev-Ungleichung und aus (3.40):

$$\Big(\int_{\Omega(t)} \log\left(\frac{G^\rho}{t}\right)^{\frac{2n}{n-2}} dx \Big)^{\frac{n-2}{n}} \equiv \Big(\int_\Omega |\psi_t|^{\frac{2n}{n-2}} \, dx \Big)^{\frac{n-2}{n}}$$
$$\leq K(n) \int_\Omega |\nabla \psi_t|^2 \, dx = K(n) \int_{\Omega(t)} \frac{|\nabla G^\rho|^2}{|G^\rho|^2} \, dx \leq \frac{K(n)}{\lambda t},$$

für eine Konstante $K(n) > 0$. Wegen $\frac{G^\rho}{t} \geq 2$ auf $\Omega(2t)$ folgt hieraus

$$(\log(2))^2 \, \mathcal{L}^n(\Omega(2t))^{\frac{n-2}{n}} \leq \Big(\int_{\Omega(2t)} \log\left(\frac{G^\rho}{t}\right)^{\frac{2n}{n-2}} dx \Big)^{\frac{n-2}{n}}$$
$$\leq \Big(\int_{\Omega(t)} \log\left(\frac{G^\rho}{t}\right)^{\frac{2n}{n-2}} dx \Big)^{\frac{n-2}{n}} \leq \frac{2\,K(n)}{\lambda\,(2t)}$$

und daher

$$\mathcal{L}^n(\Omega(\sigma))^{\frac{n-2}{n}} \leq \frac{K(n)}{\lambda\,\sigma} \qquad \forall \sigma := 2t > 0.$$

Per Definition 3.2 folgt hieraus in der Tat $\| \, G^\rho \, \|_{L_w^{\frac{n}{n-2}}(\Omega)} \leq \frac{K(n)}{\lambda}$, und wir bemerken, dass die Konstante $K(n)$ in der Tat weder von ρ noch von y abhängt.

Zu (vi): Hiermit schätzen wir nun $\| G^\rho \|_{W^{1,s}(\Omega)}$ für ein beliebig fixiertes $s \in (1, \frac{n}{n-1})$ ab. Zu diesem Zweck betrachten wir jetzt die Verkettung $\phi_\gamma := \omega_\gamma \circ G^\rho$, wobei wir

$$\omega_\gamma(s) := \begin{cases} 0 & : \quad s < 0 \\ 1 - \left(\frac{1}{1+s}\right)^{1-\gamma} & : \quad s \geq 0 \end{cases}$$

für ein festes $\gamma \in (0,1)$ definieren. Wir berechnen

$$\frac{d\omega_\gamma}{ds}(s) = \begin{cases} 0 & : \quad s < 0 \\ (1-\gamma)\left(\frac{1}{1+s}\right)^{2-\gamma} & : \quad s \geq 0 \end{cases}$$

und sehen hieran insbesondere, dass $\| (\omega_\gamma)' \|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq 1 - \gamma$, woraus insbesondere folgt, dass die Verkettung $\phi_\gamma \in W_0^{1,2}(\Omega)$ ist. Wegen $G^\rho \geq 0$ auf Ω gilt $D_\beta \phi_\gamma = (1-\gamma)\left(\frac{1}{1+G^\rho}\right)^{2-\gamma} D_\beta G^\rho$ auf ganz Ω. Somit erhalten wir durch Testen von (3.28) mittels ϕ_γ, bei Beachtung von $0 \leq \phi_\gamma \leq 1$ auf Ω:

$$(1-\gamma) \int_\Omega a^{\alpha\beta} \frac{D_\alpha G^\rho \, D_\beta G^\rho}{(1+G^\rho)^{2-\gamma}} \, dx = a(G^\rho, \phi_\gamma) = \frac{1}{\mathcal{L}^n(B_\rho(y))} \int_{B_\rho(y)} \phi_\gamma \, dx \leq 1$$

also zusammen mit der Elliptizität der $a^{\alpha\beta}$:

$$\int_\Omega \frac{|\nabla G^\rho|^2}{(1+G^\rho)^{2-\gamma}} \, dx \leq \frac{1}{(1-\gamma)\,\lambda}. \tag{3.41}$$

Wir setzen nun

$$\gamma := \frac{-n + 2s(n-1)}{s\,(n-1)} \qquad \text{und} \qquad \epsilon := \frac{n}{n-2} - \frac{(2-\gamma)\,s}{2-s}.$$

Elementare Rechnungen zeigen, dass aus $s \in (1, \frac{n}{n-1})$ folgt: $\gamma \in (\frac{n-2}{n-1}, 1)$ und $\epsilon \in (0, \frac{n}{n-2} - \frac{n}{n-1}) \subset (0, \frac{n}{n-2} - 1)$. Nun wenden wir die Hölder-Ungleichung mit Hölder-Exponenten $\frac{2}{s}$ und $\left(1 - \frac{s}{2}\right)^{-1} = \frac{2}{2-s}$ an und erhalten mittels (3.41), Lemma 3.1 – hier für $p = \frac{n}{n-2}$ und $\epsilon = \frac{n}{n-2} - \frac{(2-\gamma)\,s}{2-s}$ – und der Abschätzung (3.29) des bereits bewiesenen Punkts (ii):

$$\begin{aligned}
\| \nabla G^\rho \|_{L^s(\Omega)}^s &= \int_\Omega |\nabla G^\rho|^s (1+G^\rho)^{\frac{s}{2}(\gamma-2)} \, (1+G^\rho)^{\frac{s}{2}(2-\gamma)} \, dx \\
&\leq \Big(\int_\Omega |\nabla G^\rho|^2 \, (1+G^\rho)^{\gamma-2} \, dx \Big)^{s/2} \Big(\int_\Omega (1+G^\rho)^{\frac{s}{2}(2-\gamma)\frac{2}{2-s}} \, dx \Big)^{\frac{2-s}{2}} \\
\leq \Big(\frac{1}{(1-\gamma)\,\lambda} \Big)^{s/2} \Big(\int_\Omega (1+G^\rho)^{\frac{s}{2}(2-\gamma)\frac{2}{2-s}} \, dx \Big)^{\frac{2-s}{2}} &\equiv \Big(\frac{1}{(1-\gamma)\,\lambda} \Big)^{s/2} \; \| 1 + G^\rho \|_{L^{\frac{n}{n-2}-\epsilon}(\Omega)}^{(2-\gamma)\frac{s}{2}} \\
&\leq \Big(\frac{1}{(1-\gamma)\,\lambda} \Big)^{s/2} \; \| 1 + G^\rho \|_{L_w^{\frac{n}{n-2}}(\Omega)}^{(2-\gamma)\frac{s}{2}} \; \Big(\frac{n}{\epsilon\,(n-2)} \Big)^{\frac{2-s}{2}} \mathcal{L}^n(\Omega)^{\frac{1}{2}\,(2-s-\frac{n-2}{n-1})} \\
&\leq \Big(\frac{1}{(1-\gamma)\,\lambda} \Big)^{s/2} \Big(2\,\mathcal{L}^n(\Omega)^{\frac{n-2}{n}} + 2\,K(n,\lambda) \Big)^{\frac{n}{2n-2}} \Big(\frac{n}{\epsilon\,(n-2)} \Big)^{\frac{2-s}{2}} \mathcal{L}^n(\Omega)^{\frac{1}{2}\,(2-s-\frac{n-2}{n-1})} \\
&= \mathrm{const}(n, s, \lambda, \mathcal{L}^n(\Omega)),
\end{aligned}$$

wobei wir $(2-\gamma)\frac{s}{2} = \frac{n}{2n-2}$, $\frac{n}{n-2} - \epsilon = (2-\gamma)\frac{s}{2-s}$, $\frac{(2-\gamma)\,s/2}{\frac{n}{n-2}-\epsilon} = \frac{2-s}{2} > 0$ und $\frac{\epsilon\,(2-\gamma)\,s/2}{\frac{n}{n-2}(\frac{n}{n-2}-\epsilon)} = \frac{1}{2}(2-s-\frac{n-2}{n-1}) > 0$ für $s \in (1, \frac{n}{n-1})$ verwandten. Zusammen mit der Poincare-Ungleichung liefert dies in der Tat:

$$\| G^\rho \|_{W^{1,s}(\Omega)} \leq \mathrm{const}(n, s, \lambda, \mathcal{L}^n(\Omega))$$

für alle $\rho > 0$ und für jedes $s \in (1, \frac{n}{n-1})$, wie in (vi) behauptet. Wir wählen nun eine Nullfolge $\rho_\nu \searrow 0$ und eine Folge $\sigma_\nu \nearrow \frac{n}{n-1}$. Für $\nu = 1$ folgt aus obiger Abschätzung die Existenz einer Teilfolge $\{G^{\rho^1_\nu}\}$ mit

$$G^{\rho^1_\nu} \rightharpoonup \tilde{G}_1 \qquad \text{schwach in } W^{1,\sigma_1}(\Omega),$$

für eine Funktion $\tilde{G}_1 \in W_0^{1,\sigma_1}(\Omega)$. Für $\nu = 2$ wählen wir aus dieser Teilfolge wiederum eine Teilfolge $\{G^{\rho^2_\nu}\}$ aus, welche

$$G^{\rho^2_\nu} \rightharpoonup \tilde{G}_2 \qquad \text{schwach in } W^{1,\sigma_2}(\Omega)$$

für eine Funktion $\tilde{G}_2 \in W_0^{1,\sigma_2}(\Omega)$ erfüllt. Da der schwache Limes einer schwach-konvergenten Folge in einem Banachraum eindeutig und $\{G^{\rho^2_\nu}\}$ eine Teilfolge von $\{G^{\rho^1_\nu}\}$ ist, folgt $\tilde{G}_1 = \tilde{G}_2 \in W_0^{1,\sigma_2}(\Omega)$. Fortsetzung dieses Auswahlverfahrens für $\nu = 3, 4, 5\ldots$ liefert eine Folge von Teilfolgen $\{G^{\rho^i_\nu}\}$, $i = 1, 2, 3\ldots$, mit übereinstimmendem schwachen Limes $G \equiv G(\,\cdot\,, y) = \tilde{G}_1 = \tilde{G}_2 = \ldots = \tilde{G}_i = \ldots$, sodass wir eine Diagonalfolge $\{G^j\}$ auswählen können, die $G^j \rightharpoonup G$ in $W_0^{1,\sigma_\nu}(\Omega)$ für jedes $\nu \in \mathbb{N}$ erfüllt. Wegen $\sigma_\nu \nearrow \frac{n}{n-1}$ gilt somit

$$G^j \rightharpoonup G \qquad \text{schwach in } W^{1,s}(\Omega),$$

für jedes $s \in (1, \frac{n}{n-1})$, also die Behauptung (3.33). Insbesondere gilt $G \in W_0^{1,s}(\Omega)$ für jedes $s \in (1, \frac{n}{n-1})$ anhand der schwachen Abgeschlossenheit dieser Räume und

$$\| G \|_{W^{1,s}(\Omega)} \leq \liminf_{j \to \infty} \| G^j \|_{W^{1,s}(\Omega)} \leq \mathrm{const}(n, s, \lambda, \mathcal{L}^n(\Omega)),$$

für jedes $s \in (1, \frac{n}{n-1})$, anhand der Unterhalbstetigkeit der Norm eines Banachraums bzgl. schwacher Konvergenz. Ausserdem folgt $G \geq 0$ $\mathcal{L}^n -$ f.ü. auf Ω direkt aus der bewiesenen Konvergenz (3.33) und Teil (i).
Zu (viii): Desweiteren folgt die Eigenschaft (3.34) von $G = G(\,\cdot\,, y)$ sofort aus der Konvergenz (3.33) und der definierenden Eigenschaft (3.28) der G^ρ.
Zu (iii): Wir wählen ein beliebiges $x \in \Omega$, $x \neq y$, und ein $\rho < \frac{|x-y|}{2} =: R^*$. Wir unterscheiden die beiden Fälle: $B_{R^*}(x) \subset \Omega$ und $B_{R^*}(x) \not\subset \Omega$. Im ersten Fall bemerken wir zuerst:

$$a(G^\rho, \phi) = \frac{1}{\mathcal{L}^n(B_\rho(y))} \int_{B_\rho(y)} \phi \, dx = 0$$

für alle $\phi \in C_c^\infty(B_{R^*}(x))$, falls $\rho < R^*$, da $B_{R^*}(x) \cap B_\rho(y) = \emptyset$ für $\rho < R^*$ gilt. Da ausserdem $G^\rho \geq 0$ auf Ω ist, folgt aus Trudingers lokaler Maximums-Abschätzung:

$$(G^\rho(x))^\alpha \leq K(n, \mu, \lambda, \alpha)\,(R^*)^{-n} \;\| G^\rho \|^\alpha_{L^\alpha(B_{R^*}(x))} \tag{3.42}$$

für jedes $\alpha > 1$. Wir kombinieren nun Lemma 3.1, (ii), mit Exponenten $p = \frac{n}{n-2}$ und einem beliebigen $\epsilon \in (0, p-1)$ mit Abschätzung (3.42), für $\alpha := p - \epsilon > 1$, und Abschätzung

(3.29) und erhalten:

$$
\begin{aligned}
(G^\rho(x))^\alpha &\le K(n,\mu,\lambda,\alpha)\,(R^*)^{-n}\left(\frac{n}{(n-2)\,\epsilon}\right)\mathcal{L}^n(B_{R^*}(x))^{\frac{(n-2)\,\epsilon}{n}}\ \|\, G^\rho\,\|^\alpha_{L_w^{\frac{n}{n-2}}(B_{R^*}(x))}\\
&\le K(n,\mu,\lambda,\alpha)\,(R^*)^{-n+(n-2)\,\epsilon}\left(\frac{n}{(n-2)\,\epsilon}\right)\left(\frac{K(n)}{\lambda}\right)^\alpha .
\end{aligned}
$$

Wenn wir hierbei $\epsilon = \frac{1}{2}\,(\frac{n}{n-2} - 1) = \frac{1}{n-2}$ und somit $\alpha = \frac{n}{n-2} - \frac{1}{n-2} = \frac{n-1}{n-2} > 1$ wählen, so erhalten wir wegen $-n + (n-2)\,\epsilon = 1 - n$:

$$
G^\rho(x,y) \le \tilde{K}(n,\mu,\lambda)\,(R^*)^{2-n} = \tilde{K}(n,\mu,\lambda)\,|x-y|^{2-n}. \tag{3.43}
$$

Zur Behandlung von Fall 2 betrachten wir ein grösseres Gebiet $\tilde{\Omega} \supset\supset \Omega$, welches auch den Ball $B_{R^*}(x)$ enthält, und setzen die Koeffizienten $a^{\alpha\beta}$ durch

$$
\tilde{a}^{\alpha\beta}(x) := \begin{cases} a^{\alpha\beta}(x) & : \quad x \in \Omega \\ \lambda\,\delta^{\alpha\beta} & : \quad x \in \tilde{\Omega}\setminus\Omega \end{cases}
$$

auf $\tilde{\Omega}$ elliptisch und beschränkt fort. Zu den Koeffizienten $\tilde{a}^{\alpha\beta}$ existiert wiederum eine Familie gemittelter Greensfunktionen $\tilde{G}^\rho$ mit allen bereits für G^ρ bewiesenen Eigenschaften, nun auf $\tilde{\Omega}$. Insbesondere sehen wir

$$
G^\rho \equiv 0 \le \tilde{G}^\rho \qquad \text{auf } \partial\Omega. \tag{3.44}
$$

Da wir aus (3.28) auch $a(G^\rho - \tilde{G}^\rho, \phi) = 0$ für alle $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$ entnehmen, folgt aus dem Maximumprinzip der L^2-Theorie und (3.44):

$$
G^\rho \le \tilde{G}^\rho \qquad \text{auf ganz } \Omega.
$$

Somit erhalten wir aus (3.43) für $\tilde{G}^\rho$:

$$
G^\rho(x,y) \le \tilde{G}^\rho(x,y) \le \tilde{K}(n,\mu,\lambda)\,|x-y|^{2-n}
$$

für jedes $x \in \Omega \setminus \{y\}$ und jedes $\rho < \frac{|x-y|}{2}$, also (3.30).
Zu (iv): Hiermit schätzen wir nun $\int_{\Omega\setminus B_R(y)} |\nabla G^\rho|^2\,dx$ gleichmässig für alle $\rho > 0$ ab. Wir wählen hierzu ein beliebiges $R > 0$ und ein $\eta \in C^\infty(\Omega)$ mit $\eta \equiv 1$ auf $\Omega \setminus B_R(y)$ und $\eta \equiv 0$ auf $\overline{B_{R/2}(y)}$ und testen (3.28) mittels der Testfunktion $\phi := \eta^2\,G^\rho$. Wegen $D_\beta\phi = 2\eta\,D_\beta\eta\,G^\rho + \eta^2\,D_\beta G^\rho$ erhalten wir aus (3.28):

$$
\int_{\Omega\setminus\overline{B_{R/2}(y)}} a^{\alpha\beta} D_\alpha G^\rho (2\eta\,D_\beta\eta\,G^\rho + \eta^2\,D_\beta G^\rho)\,dx = a(G^\rho,\phi) = \frac{1}{\mathcal{L}^n(B_\rho(y))}\int_{B_\rho(y)} \eta^2\,G^\rho\,dx = 0
$$

für $\rho < R/2$. Mittels Elliptizität der $a^{\alpha\beta}$ erhalten wir somit zusammen mit „Cauchy-Schwarz":

$$
\begin{aligned}
\lambda \int_{\Omega\setminus\overline{B_{R/2}(y)}} |\nabla G^\rho|^2\,\eta^2\,dx &\le -2\int_{T_R(y)} a^{\alpha\beta}\,\eta\,D_\alpha G^\rho\,D_\beta\eta\,G^\rho\,dx\\
&\le \frac{\lambda}{2}\int_{T_R(y)} |\nabla G^\rho|^2\,\eta^2\,dx + \frac{C(\lambda,\mu)}{R^2}\int_{T_R(y)} |G^\rho|^2\,dx.
\end{aligned}
$$

Absorption liefert somit wegen $\eta \equiv 1$ auf $\Omega \setminus B_R(y)$:

$$\int_{\Omega \setminus \overline{B_R(y)}} |\nabla G^\rho|^2 \, dx \leq \frac{C(\lambda, \mu)}{R^2} \int_{T_R(y)} |G^\rho|^2 \, dx, \tag{3.45}$$

für jedes $\rho < R/2$. In Kombination mit Abschätzung (3.30) erhalten wir:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega \setminus \overline{B_R(y)}} |\nabla G^\rho|^2 \, dx &\leq \frac{C(\lambda, \mu)}{R^2} \left(\tilde{K}(n, \mu, \lambda)\right)^2 \int_{T_R(y)} |x-y|^{4-2n} \, dx \\ &\leq K(n, \mu, \lambda) \, R^{-2+n+(4-2n)} = K(n, \mu, \lambda) \, R^{2-n}, \end{aligned}$$

also (3.31), wenn wir $|x-y| > \frac{R}{2}$ für $x \in T_R(y)$ beachten und zur Gültigkeit von Abschätzung (3.30) nur $\rho < \frac{R}{4}$ zulassen. Zur Behandlung des Falls „$\rho \geq \frac{R}{4}$" testen wir (3.28) mit G^ρ selbst und erhalten aus der Elliptizität der $a^{\alpha\beta}$, der Hölder- und der Sobolev-Poincare-Ungleichung:

$$\begin{aligned} \lambda \int_\Omega |\nabla G^\rho|^2 \, dx &\leq \int_\Omega a^{\alpha\beta} \, D_\alpha G^\rho \, D_\beta G^\rho \, dx = \frac{1}{\mathcal{L}^n(B_\rho(y))} \int_{B_\rho(y)} G^\rho \, dx \\ \leq \omega_n^{-1} \, \rho^{-n} \, (\mathcal{L}^n(B_\rho(y)))^{\frac{n+2}{2n}} &\left(\int_{B_\rho(y)} |G^\rho|^{\frac{2n}{n-2}} \, dx \right)^{\frac{n-2}{2n}} \leq C(n) \, \rho^{\frac{2-n}{2}} \, \| \nabla G^\rho \|_{L^2(\Omega)}, \end{aligned}$$

für jedes $\rho > 0$. Dies zeigt erstens die Abschätzung

$$\int_\Omega |\nabla G^\rho|^2 \, dx \leq \frac{C(n)^2}{\lambda^2} \, \rho^{2-n} \qquad \text{für alle } \rho > 0 \tag{3.46}$$

und beweist ausserdem die Abschätzung (3.31) für $\rho \geq \frac{R}{4}$.
Zu (xii): Abschätzung (3.37) folgt sofort aus (3.30) und der schwachen Konvergenz (3.33).
Zu (ix): Wir erhalten ausserdem aus (3.31) in Kombination mit (3.30), dass $\| G^\rho(\,\cdot\,, y) \|_{W^{1,2}(\Omega \setminus \overline{B_R(y)})}$ für jedes fixierte $R > 0$ uabhängig von $\rho < \frac{R}{2}$ beschränkt bleibt, sodass sich Abschätzung (3.31) anhand der schwachen Konvergenz (3.33) und anhand der Unterhalbstetigkeit der Dirichlet-Energie bzgl. schwacher $W^{1,2}-$Konvergenz auf den schwachen Limes $G(\,\cdot\,, y)$ überträgt, d.h. wir erhalten

$$\int_{\Omega \setminus \overline{B_R(y)}} |\nabla G(x,y)|^2 \, dx \leq K(n, \mu, \lambda) \, R^{2-n},$$

für jedes $R > 0$, wie in (3.35) behauptet.
Zu (vii): Wir beweisen nun $\| \nabla G^\rho \|_{L_w^{\frac{n}{n-1}}(\Omega)} \leq K(n, \mu, \lambda)$, für jedes $\rho > 0$. Wir fixieren hierzu ein $\rho > 0$, betrachten die Subniveau-Mengen $\Omega(t)^* := \{x \in \Omega | |\nabla G^\rho(x)| > t\}$ und wenden Abschätzung (3.31) mit $R := t^{\frac{1}{1-n}}$ an. Wir erhalten

$$\begin{aligned} t^2 \, \mathcal{L}^n(\Omega(t)^* \cap (\Omega \setminus B_R(y))) &\leq \int_{\Omega(t)^* \cap (\Omega \setminus B_R(y))} |\nabla G^\rho|^2 \, dx \\ \leq \int_{\Omega \setminus B_R(y)} |\nabla G^\rho|^2 \, dx &\leq K(n, \mu, \lambda) \, R^{2-n} = K(n, \mu, \lambda) \, t^{\frac{2-n}{1-n}}. \end{aligned}$$

Hieraus folgt also

$$\mathcal{L}^n(\Omega(t)^* \setminus B_R(y))) \leq K(n, \mu, \lambda) \, t^{\frac{n}{1-n}}.$$

Andererseits gilt

$$\mathcal{L}^n(\Omega(t)^* \cap B_R(y)) \leq \omega_n \, R^n = \omega_n \, t^{\frac{n}{1-n}},$$

also insgesamt

$$\mathcal{L}^n(\Omega(t)^*) \leq K(n, \mu, \lambda) \, t^{\frac{n}{1-n}}$$

oder auch

$$t \, \mathcal{L}^n(\Omega(t)^*)^{\frac{n-1}{n}} \leq K(n, \mu, \lambda) \qquad \forall \, t > 0.$$

Dies impliziert gerade die behauptete Abschätzung $\| \nabla G^\rho \|_{L_w^{\frac{n}{n-1}}(\Omega)} \leq K(n, \mu, \lambda)$.

Zu (x): Mittels Punkt (vi) und (3.29) beweisen wir nun $G(\,\cdot\,, y) \in L_w^{\frac{n}{n-2}}(\Omega)$ mit Abschätzung (3.36). Kombinieren wir die Abschätzung $\| G^\rho \|_{W^{1,s}(\Omega)} \leq \mathrm{const}(n, s, \lambda, \Omega)$, für $s < \frac{n}{n-1}$, und die schwache Konvergenz (3.33) aus Punkt (vi) mit der Kompaktheit der Sobolev-Einbettung $W^{1,s}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ für $1 \leq q < \frac{sn}{n-s}$, so folgern wir die Existenz einer Folge $\rho_j \searrow 0$, für die $G^{\rho_j} \to G$ stark in $L^q(\Omega)$ für jedes $q < \frac{n}{n-2}$, insbesondere $G^{\rho_j} \to G$ stark in $L^q(\Omega(t))$, für jedes $q < \frac{n}{n-2}$, auf den Teilmengen $\Omega(t) := \{x \in \Omega | G(x) > t\}$ gilt. Zusammen mit Lemma 3.1, (ii), für $p = \frac{n}{n-2}$, und beliebigem $\epsilon \in (0, \frac{n}{n-2} - 1)$, und (3.29) erhalten wir:

$$\begin{aligned}
\| G \|_{L^{\frac{n}{n-2}-\epsilon}(\Omega(t))}^{\frac{n}{n-2}-\epsilon} &= \lim_{j\to\infty} \| G^{\rho_j} \|_{L^{\frac{n}{n-2}-\epsilon}(\Omega(t))}^{\frac{n}{n-2}-\epsilon} \\
\leq \liminf_{j\to\infty} \left(\frac{n}{(n-2)\,\epsilon} \right) &\mathcal{L}^n(\Omega(t))^{\frac{(n-2)\,\epsilon}{n}} \;\; \| G^{\rho_j} \|_{L_w^{\frac{n}{n-2}}(\Omega(t))}^{\frac{n}{n-2}-\epsilon} \\
&\leq \left(\frac{n}{(n-2)\,\epsilon} \right) \mathcal{L}^n(\Omega(t))^{\frac{(n-2)\,\epsilon}{n}} \left(\frac{K(n)}{\lambda} \right)^{\frac{n}{n-2}-\epsilon}
\end{aligned}$$

und somit

$$t^{\frac{n}{n-2}-\epsilon} \, \mathcal{L}^n(\Omega(t)) \leq \int_{\Omega(t)} G^{\frac{n}{n-2}-\epsilon} \, dx \leq \left(\frac{n}{(n-2)\,\epsilon} \right) \mathcal{L}^n(\Omega(t))^{\frac{(n-2)\,\epsilon}{n}} \left(\frac{K(n)}{\lambda} \right)^{\frac{n}{n-2}-\epsilon}$$

bzw.

$$t \, \mathcal{L}^n(\Omega(t))^{\frac{n-2}{n}} \leq \left(\frac{n}{(n-2)\,\epsilon} \right)^{\frac{1}{\frac{n}{n-2}-\epsilon}} \frac{K(n)}{\lambda}$$

wegen $\frac{1}{\frac{n}{n-2}-\epsilon} - \frac{\epsilon\,(n-2)}{n\,(\frac{n}{n-2}-\epsilon)} = \frac{n-2}{n}$. Für $\epsilon \nearrow \frac{n}{n-2} - 1$ ergibt sich $\left(\frac{n}{(n-2)\,\epsilon} \right)^{\frac{1}{\frac{n}{n-2}-\epsilon}} \to \frac{n}{2}$, also

$$t \, \mathcal{L}^n(\Omega(t))^{\frac{n-2}{n}} \leq \frac{n}{2} \, \frac{K(n)}{\lambda} = \frac{\tilde{K}(n)}{\lambda} \qquad \forall \, t > 0,$$

unabhängig von y. Per Definition bedeutet dies gerade $G(\,\cdot\,, y) \in L_w^{\frac{n}{n-2}}(\Omega)$ mit Abschätzung (3.36).

Zu (xi): Analog zur Kombination von Punkt (vi) und (3.29), die soeben zur Abschätzung (3.36) führte, kann man die Abschätzung $\| \nabla G \|_{L_w^{\frac{n}{n-1}}(\Omega)} \leq K(n, \mu, \lambda)$ aus einer Kombination von Punkt (vi) und der Abschätzung $\| \nabla G^\rho \|_{L_w^{\frac{n}{n-1}}(\Omega)} \leq K(n, \mu, \lambda)$ aus Punkt (vii) erhalten. Wir setzen hier $\Omega(t) := \{x \in \Omega | |\nabla G(x)| > t\}$ und kombinieren nun die schwache

Konvergenz aus Punkt (vi) für $s < \frac{n}{n-1}$ mit der Unterhalbstetigkeit der L^s–Norm, Lemma 3.1, (ii), für $p = \frac{n}{n-1}$, und beliebigem $\epsilon \in (0, \frac{n}{n-1} - 1)$, und (vii) und erhalten:

$$
\begin{aligned}
& \| \nabla G \|^{\frac{n}{n-1}-\epsilon}_{L^{\frac{n}{n-1}-\epsilon}(\Omega(t))} \\
\leq \liminf_{j\to\infty} \| \nabla G^{\rho_j} \|^{\frac{n}{n-1}-\epsilon}_{L^{\frac{n}{n-1}-\epsilon}(\Omega(t))} \leq \liminf_{j\to\infty} \left(\frac{n}{(n-1)\,\epsilon} \right) & \mathcal{L}^n(\Omega(t))^{\frac{(n-1)\,\epsilon}{n}} \| \nabla G^{\rho_j} \|^{\frac{n}{n-1}-\epsilon}_{L_w^{\frac{n}{n-1}}(\Omega(t))} \\
& \leq \left(\frac{n}{(n-1)\,\epsilon} \right) \mathcal{L}^n(\Omega(t))^{\frac{(n-1)\,\epsilon}{n}} K(n, \mu, \lambda)^{\frac{n}{n-1}-\epsilon}
\end{aligned}
$$

und somit

$$
t^{\frac{n}{n-1}-\epsilon} \mathcal{L}^n(\Omega(t)) \leq \left(\frac{n}{(n-1)\,\epsilon} \right) \mathcal{L}^n(\Omega(t))^{\frac{(n-1)\,\epsilon}{n}} K(n, \mu, \lambda)^{\frac{n}{n-1}-\epsilon}
$$

bzw.

$$
t\, \mathcal{L}^n(\Omega(t))^{\frac{n-1}{n}} \leq \left(\frac{n}{(n-1)\,\epsilon} \right)^{\frac{1}{\frac{n}{n-1}-\epsilon}} K(n, \mu, \lambda)
$$

wegen $\frac{1}{\frac{n}{n-1}-\epsilon} - \frac{\epsilon\,(n-1)}{n\,(\frac{n}{n-1}-\epsilon)} = \frac{n-1}{n}$. Für $\epsilon \nearrow \frac{n}{n-1} - 1$ ergibt sich $\left(\frac{n}{(n-1)\,\epsilon} \right)^{\frac{1}{\frac{n}{n-1}-\epsilon}} \to n$, also

$$
t\, \mathcal{L}^n(\Omega(t))^{\frac{n-1}{n}} \leq n\, K(n, \mu, \lambda) \qquad \forall\, t > 0,
$$

unabhängig von y. Per Definition bedeutet dies gerade $\nabla G(\,\cdot\,, y) \in L_w^{\frac{n}{n-1}}(\Omega)$ mit behaupteter Abschätzung $\| \nabla G \|_{L_w^{\frac{n}{n-1}}(\Omega)} \leq K(n, \mu, \lambda)$.

Zu (xiii): Wir beweisen nun (3.38). Wir beachten zunächst, dass wir wegen $\nabla G \in L^2(\Omega \backslash \overline{B_R(y)}, \mathbb{R}^n)$ [nach Abschätzung (3.35)] mittels Approximation einer beliebigen Funktion $\phi \in W_0^{1,2}(\Omega \setminus \overline{B_R(y)})$ auch die Gleichung

$$
\int_{\Omega \backslash \overline{B_R(y)}} a^{\alpha\beta}\, D_\alpha G(z, y)\, D_\beta \phi(z)\, dz = 0 \tag{3.47}
$$

für jedes $\phi \in W_0^{1,2}(\Omega \setminus \overline{B_R(y)})$ und für jedes $R > 0$ aus Formel (3.34) gewinnen. Diese Gleichung kann insbesondere mit einer Testfunktion der Form $\phi = G\,\eta^2$ getestet werden, wobei η eine Abschneidefunktion mit $\mathrm{supp}(\eta) \subset \Omega \setminus \overline{B_R(y)}$, für beliebig kleines $R > 0$, sei. Wählt man insbesondere einen Ball $\overline{B_{2r}(x_0)} \subset\subset \Omega \setminus \{y\}$ und eine Abschneide-Funktion $\eta \in C_c^\infty(B_{2r}(x_0))$ mit $\mathrm{supp}(\eta) = \overline{B_{\frac{7}{4}r}(x_0)}$, $\eta \equiv 1$ auf $B_r(x_0)$ und $|\nabla \eta| \leq 2/r$ auf $\overline{B_{\frac{7}{4}r}(x_0)} \setminus B_r(x_0)$, so ist $\phi := G\,\eta^2 \in W_0^{1,2}(\Omega \setminus \overline{B_{\frac{r}{4}}(y)})$, und man erhält aus (3.47) zusammen mit der Elliptizität und Beschränktheit der $a^{\alpha\beta}$ – und durch Verwendung der Cauchy-Schwarz-Ungleichung und Absorption – die Cacciopoli-Ungleichung

$$
\int_{B_r(x_0)} |\nabla G|^2\, dz \leq \frac{C(\mu, \lambda, n)}{r^2} \int_{T_{2r}(x_0)} G^2\, dz \tag{3.48}
$$

für G auf $B_r(x_0)$, wobei $T_{2r}(x_0) = B_{2r}(x_0) \backslash \overline{B_r(x_0)}$ wie bereits oben bezeichne. Nun wählen wir ein $x \in \Omega \setminus \{y\}$ mit $|x - y| < \frac{3}{4}\,\mathrm{dist}(y, \partial\Omega)$ und setzen $r := |x - y|$. Wir überdecken $T_r(y) := B_r(y) \setminus \overline{B_{\frac{r}{2}}(y)}$ mittels einer endlichen Familie von Bällen $\{B_{\frac{r}{8}}(x_i)\}_{i=1,\ldots,M(n)}$, deren Zentren x_i in $T_r(y)$ liegen mögen. Wir beachten, dass aus $r < \frac{3}{4}\,\mathrm{dist}(y, \partial\Omega)$ und

$\frac{r}{2} < |x_i - y| < r$ insbesondere $B_{\frac{r}{4}}(x_i) \subset\subset B_{\frac{4r}{3}}(y) \setminus \overline{B_{\frac{r}{8}}(y)} =: T^*(y) \subset\subset \Omega \setminus \{y\}$, für $i = 1, \dots, M(n)$, folgt. Somit kann die Cacciopoli-Ungleichung (3.48) auf jedem der Bälle $B_{\frac{r}{8}}(x_i)$ angewandt werden, und wir erhalten zusammen mit der Hölder-Ungleichung:

$$\begin{aligned} \int_{T_r(y)} |\nabla G| \, dz \leq \sum_{i=1}^{M} \int_{B_{\frac{r}{8}}(x_i)} |\nabla G| \, dz &\leq (\omega_n)^{\frac{1}{2}} \, r^{n/2} \sum_{i=1}^{M} \Big(\int_{B_{\frac{r}{8}}(x_i)} |\nabla G|^2 \, dz \Big)^{1/2} \\ &\leq K(n,\mu,\lambda) \, r^{n/2} \sum_{i=1}^{M} \Big(r^{-2} \int_{T_{\frac{r}{4}}(x_i)} |G|^2 \, dz \Big)^{1/2} \\ \leq K(n,\mu,\lambda) \, r^{n/2} \, r^{-1} \, r^{n/2} \sum_{i=1}^{M} \sup_{T_{\frac{r}{4}}(x_i)} G &\leq K(n,\mu,\lambda) \, r^{n-1} \sup_{T^*(y)} G. \end{aligned} \tag{3.49}$$

In der letzten Zeile benutzten wir erneut $B_{\frac{r}{4}}(x_i) \subset\subset T^*(y)$ und dass die Anzahl der Bälle, mit denen wir $T_r(y)$ überdeckten, nur von der Dimension n dieses Annulus abhängt. Nun testen wir Gleichung (3.34) gerade umgekehrt mit einer Test-Funktion $\phi \in C_c^\infty(B_r(y))$, die ausserdem $\phi \equiv 1$ auf $B_{\frac{r}{2}}(y)$, also insbesondere $\mathrm{supp}(\nabla\phi) \subset \overline{T_r(y)}$ erfüllt. Wir erhalten zusammen mit (3.49):

$$1 = \phi(y) = \int_{T_r(y)} a^{\alpha\beta} \, D_\alpha G \, D_\beta \phi \, dz \leq C(\mu, n) \, \frac{1}{r} \int_{T_r(y)} |\nabla G| \, dz \leq K(n,\mu,\lambda) \, r^{n-2} \sup_{T^*(y)} G. \tag{3.50}$$

Da die schwache Gleichung (3.47) für G für jedes $\phi \in W_0^{1,2}(\Omega \setminus \overline{B_R(y)})$ und für jedes $R > 0$ gilt und da G nicht-negativ ist, können wir Trudingers Harnack-Ungleichung auf G auf dem Annulus $T^*(y) \subset\subset \Omega \setminus \{y\}$ anwenden, d.h.

$$\sup_{T^*(y)} G \leq \tilde{K}(\mu, \lambda, n) \inf_{T^*(y)} G$$

schliessen, wenn wir noch beachten, dass die hierbei auftretende Konstante $\tilde{K}$ zwar vom Quotienten des Aussen- und Innenradius' des Annuli $T^*(y) = B_{\frac{4r}{3}}(y) \setminus \overline{B_{\frac{r}{8}}(y)}$ abhängt, dieser jedoch $\frac{32}{3}$ für jedes Paar $x \neq y$ und unabhängig von der Gestalt von Ω beträgt. Zusammen mit (3.50) und wegen $x \in \partial B_r(y) \subset T^*(y)$ folgt:

$$\begin{aligned} G(x,y) \geq \inf_{T^*(y)} G \geq \tilde{K}(\mu,\lambda,n)^{-1} \sup_{T^*(y)} G &\geq \tilde{K}(\mu,\lambda,n)^{-1} \, K(n,\mu,\lambda)^{-1} \, r^{2-n} \\ &= K(\mu,\lambda,n) \, |x-y|^{2-n} \end{aligned}$$

für alle $x \neq y \in \Omega$ mit $|x - y| < \frac{3}{4} \, \mathrm{dist}(y, \partial\Omega)$, also (3.38).
Punkt (v) beweisen wir nun mithilfe der ,,Mittelwert-Formel" für $G^\rho(\,\cdot\,, y)$ aus dem weiter unten folgenden Korollar 3.5. Wir fixieren hierzu ein $\rho > 0$ und einen beliebigen Lebesgue-Punkt $x \in \Omega \setminus \{y\}$ von $G^\rho(\,\cdot\,, y)$ und kombinieren die Mittelwertformel aus Korollar 3.5 mit Abschätzung (3.37):

$$G^\rho(x,y) = \frac{1}{\mathcal{L}^n(B_\rho(y))} \int_{B_\rho(y)} G(x,z) \, dz \leq K(n,\mu,\lambda) \, \frac{1}{\mathcal{L}^n(B_\rho(y))} \int_{B_\rho(y)} |x-z|^{2-n} \, dz. \tag{3.51}$$

Somit folgt

$$
\begin{aligned}
\omega_n\rho^n\, G^\rho(x,y) &\le K(n,\mu,\lambda)\,\Big(\int_{B_\rho(y)\cap B_\rho(x)} |x-z|^{2-n}\,dz + \int_{B_\rho(y)\setminus B_\rho(x)} |x-z|^{2-n}\,dz\Big)\\
&\le K(n,\mu,\lambda)\,\Big(\int_{B_\rho(y)\cap B_\rho(x)} |x-z|^{2-n}\,dz + \mathcal{L}^n(B_\rho(y)\setminus B_\rho(x))\,\rho^{2-n}\Big),
\end{aligned}
$$

wenn wir $|x-z|\ge\rho$ für alle $z\in B_\rho(y)\setminus B_\rho(x)$ beachten. Wegen $\mathcal{L}^n(B_\rho(y)\setminus B_\rho(x)) = \mathcal{L}^n(B_\rho(x)\setminus B_\rho(y))$ erhalten wir hieraus

$$
\omega_n\,\rho^n\, G^\rho(x,y) \le K(n,\mu,\lambda)\,\Big(\int_{B_\rho(y)\cap B_\rho(x)} |x-z|^{2-n}\,dz + \int_{B_\rho(x)\setminus B_\rho(y)} \rho^{2-n}\,dz\Big)
$$

und wegen $|x-z|<\rho$ für alle $z\in B_\rho(x)\setminus B_\rho(y)$ weiter:

$$
\begin{aligned}
&\le K(n,\mu,\lambda)\,\Big(\int_{B_\rho(y)\cap B_\rho(x)} |x-z|^{2-n}\,dz + \int_{B_\rho(x)\setminus B_\rho(y)} |x-z|^{2-n}\,dz\Big)\\
= K(n,\mu,\lambda)\int_{B_\rho(x)} |x-z|^{2-n}\,dz &= K(n,\mu,\lambda)\int_0^\rho r^{2-n}\,r^{n-1}\,dr = K(n,\mu,\lambda)\,\frac{\rho^2}{2}.
\end{aligned}
$$

Insgesamt folgt also die behauptete Abschätzung (3.32), d.h. $G^\rho(x,y)\le K(n,\mu,\lambda)\,\rho^{2-n}$, in jedem Lebesgue-Punkt $x\in\Omega\setminus\{y\}$ von $G^\rho(\,\cdot\,,y)$, insbesondere in $\mathcal{L}^n$–fast jedem $x\in\Omega$ und für jedes $\rho>0$, woraus insbesondere $G^\rho(\,\cdot\,,y)\in L^\infty(\Omega)$ für jedes $\rho>0$ folgt.

///

Als einen kleinen Zusatz zu Formel (3.30) erhalten wir mittels der soeben bewiesenen Formel (3.32):

Korollar 3.2 *Seien Ω eine offene Teilmenge des $\mathbb{R}^n$, welche eine gleichmässige äussere Kegelbedingung mit Kegeldaten ϱ_0, θ erfülle, und $y\in\Omega$ ein fixierter Punkt. Dann gilt für jedes $\rho>0$:*

$$
G^\rho(x,y)\le K(n,\mu,\lambda)\,|x-y|^{2-n}
$$

in jedem Lebesgue-Punkt $x\in\Omega\setminus\{y\}$ von $G^\rho(\,\cdot\,,y)$.

Beweis:
Wir fixieren ein $\rho>0$ und einen beliebigen Lebesgue-Punkt $x\in\Omega\setminus\{y\}$ von $G^\rho(\,\cdot\,,y)$. Wir erhalten die Behauptung sofort aus (3.30), falls $\rho<\frac{|x-y|}{2}$ ist. Falls $\rho\ge\frac{|x-y|}{2}$ gilt, folgt ebenfalls sofort aus (3.32):

$$
G^\rho(x,y)\le K(n,\mu,\lambda)\,\rho^{2-n}\le K(n,\mu,\lambda)\,\Big(\frac{|x-y|}{2}\Big)^{2-n} = K(n,\mu,\lambda)\,|x-y|^{2-n}.
$$

///

Mithilfe der Integral-Identitäten (3.28), (3.34) und der Abschätzungen (3.31), (3.35), (3.32) und (3.37) werden wir nun die Sätze von Nash-Moser (Sätze 10.1, 10.2 bzw. Korollar 10.3 aus der Vorlesung über „nicht-lineare PDG") anwenden, um zu zeigen:

Theorem 3.3 *Seien Ω eine offene Teilmenge des $\mathbb{R}^n$, welche eine gleichmässige äussere Kegelbedingung mit Kegeldaten ϱ_0, θ erfülle, $y \in \Omega$ ein fixierter Punkt und $\delta \leq \min\{\varrho_0, \frac{dist(y,\partial\Omega)}{4}\}$ beliebig fixiert. Dann existiert ein $\alpha = \alpha(\lambda, \mu, n, \Omega) \in (0,1)$, für welches $G^\rho(\,\cdot\,, y) \in C^{0,\alpha}(\bar{\Omega} \setminus B_{2\delta}(y))$ mit*

$$[G^\rho(\,\cdot\,, y)]_{\alpha, \bar{\Omega}\setminus B_{2\delta}(y)} \leq Konst(\lambda, \mu, n, \Omega, \delta) \tag{3.52}$$

für alle $\rho < \frac{\delta}{2}$, und ebefalls $G(\,\cdot\,, y) \in C^{0,\alpha}_{loc}(\bar{\Omega} \setminus \{y\})$ mit

$$[G(\,\cdot\,, y)]_{\alpha, \bar{\Omega}\setminus B_R(y)} \leq Konst(\lambda, \mu, n, \Omega, R) \tag{3.53}$$

für jedes $R > 0$ gilt.

Beweis:
i) Per Definition 3.1 wissen wir: $G^\rho(\,\cdot\,, y) \in W^{1,2}_0(\Omega)$ und insbesondere

$$\int_\Omega a^{\alpha\beta}(x)\, D_\alpha G^\rho(x,y)\, D_\beta \phi(x)\, dx \equiv a(G^\rho(\,\cdot\,, y), \phi) = \frac{1}{\mathcal{L}^n(B_\rho(y))} \int_{B_\rho(y)} \phi(x)\, dx = 0$$

für alle $\phi \in W^{1,2}_0(\Omega \setminus \overline{B_\rho(y)})$, d.h.

$$-D_\beta(a^{\alpha\beta}\, D_\alpha G^\rho(\,\cdot\,, y)) = 0 \qquad \text{schwach auf } \Omega \setminus \overline{B_\rho(y)}, \tag{3.54}$$

für jedes $\rho > 0$. Desweiteren wissen wir anhand von Abschätzung (3.30) und wegen $\rho = \frac{2\rho}{2} < \frac{|x-y|}{2}$ für alle $x \in \Omega \setminus \overline{B_{2\rho}(y)}$:

$$|G^\rho(x,y)| \leq K(n, \mu, \lambda)\, (2\rho)^{2-n} < \infty \qquad \text{für alle } x \in \Omega \setminus \overline{B_{2\rho}(y)},$$

also insbesondere $G^\rho(\,\cdot\,, y) \in L^\infty(\Omega \setminus \overline{B_\delta(y)})$, und genauso

$$|G^\rho(x,y)| \leq K(n, \mu, \lambda)\, \delta^{2-n} \qquad \text{für alle } x \in \Omega \setminus \overline{B_{2\rho+\delta}(y)} \tag{3.55}$$

für jedes $\rho < \frac{\delta}{2}$. Anhand von (3.54) folgt aus den Beweisen der Sätze 10.1 und 10.2 der Vorlesung über „nicht-lineare PDG", dass für jeden Ball $B_{R_0}(x_0) \subset\subset \Omega \setminus \overline{B_{2\rho+\delta}(y)}$ Konstanten $C = C(n, \lambda, \mu) < \infty$ und $\alpha = \alpha(n, \lambda, \mu) > 0$ existieren, sodass

$$\operatorname{osc}_{B_\varrho(x_0)} G^\rho(\,\cdot\,, y) \leq C\, \varrho^\alpha \parallel G^\rho(\,\cdot\,, y) \parallel_{L^\infty(B_{R_0}(x_0))}$$

für $\varrho \leq R_0/2$ und alle $\rho < \frac{\delta}{2}$ gilt, und dass um jeden Randpunkt $x_0 \in \partial\Omega$ bei Beachtung von $G^\rho(\,\cdot\,, y) \equiv 0$ auf $\partial\Omega$ ebenfalls Konstanten $C = C(\lambda, \mu, n, \varrho_0, \theta) < \infty$ und $\alpha = \alpha(\lambda, \mu, n, \varrho_0, \theta) > 0$ (ϱ_0 und θ aus der Kegelbedingung an Ω) mit

$$\operatorname{osc}_{\Omega\cap B_\varrho(x_0)} G^\rho(\,\cdot\,, y) \leq C\, \varrho^\alpha \parallel G^\rho(\,\cdot\,, y) \parallel_{L^\infty(B_\delta(x_0)\cap\Omega)}$$

für $0 < \varrho \leq \frac{\delta}{2}$ und alle $\rho < \frac{\delta}{2}$ existieren. Kombinieren wir dies mit (3.55), so erhalten wir für jeden Ball $B_{R_0}(x_0) \subset\subset \Omega \setminus \overline{B_{2\rho+\delta}(y)}$:

$$\operatorname{osc}_{B_\varrho(x_0)} G^\rho(\,\cdot\,, y) \leq C\, \varrho^\alpha\, K(n, \mu, \lambda)\, \delta^{2-n} = \tilde{C}(n, \mu, \lambda)\, \delta^{2-n}\, \varrho^\alpha \tag{3.56}$$

für $\varrho \leq R_0/2$ und alle $\rho < \frac{\delta}{2}$, und um jeden Randpunkt $x_0 \in \partial\Omega$:

$$\operatorname{osc}_{\Omega\cap B_\varrho(x_0)} G^\rho(\,\cdot\,, y) \leq C\, \varrho^\alpha\, K(n, \mu, \lambda)\, \delta^{2-n} = \tilde{C}(\lambda, \mu, n, \varrho_0, \theta)\, \delta^{2-n}\, \varrho^\alpha \tag{3.57}$$

für $0 < \varrho \leq \frac{\delta}{2}$ und alle $\rho < \frac{\delta}{2}$. Für $\rho < \frac{\delta}{2}$ ist $2\rho + \delta < 2\delta$ und somit $\bar\Omega \setminus \overline{B_{2\delta}(y)} \subset\subset \bar\Omega \setminus \overline{B_{2\rho+\delta}(y)}$. Somit lässt sich $\bar\Omega \setminus B_{2\delta}(y)$ derart durch endlich viele der oben betrachteten Bälle überdecken, dass wir aus (3.56) und (3.57) $G^\rho(\,\cdot\,, y) \in C^{0,\alpha}(\bar\Omega \setminus B_{2\delta}(y))$ für alle $\rho < \frac{\delta}{2}$, zusammen mit Abschätzung (3.52) mit Konstanten, die nur von λ, μ, n, Ω und δ abhängen, erhalten.

ii) Wir fixieren ein $R > 0$ beliebig klein und erhalten aus Abschätzung (3.35) zunächst $\int_{\Omega \setminus \overline{B_R(y)}} |\nabla G|^2\, dx \leq K(n, \mu, \lambda)\, R^{2-n} < \infty$ für alle $R > 0$. Da wir aus Abschätzung (3.37) auch

$$0 \leq G(\,\cdot\,, y) \leq K(n, \mu, \lambda)\, R^{2-n} \tag{3.58}$$

$\mathcal{L}^n-$ f.ü. auf $\Omega \setminus \overline{B_R(y)}$ und anhand von (3.33) $G(\,\cdot\,, y) \in W_0^{1,s}(\Omega)$, für jedes $s \in (1, \frac{n}{n-1})$, wissen, folgt $G(\,\cdot\,, y) \in W^{1,2}(\Omega \setminus \overline{B_R(y)})$ und offenbar auch $G(\,\cdot\,, y) \in L^\infty(\Omega \setminus \overline{B_R(y)})$. Somit folgt anhand von (3.34) (mittels Approximation) die schwache Gleichung

$$\int_\Omega a^{\alpha\beta}(x)\, D_\alpha G(x, y)\, D_\beta \phi(x)\, dx = 0 \qquad \forall\, \phi \in W_0^{1,2}(\Omega \setminus \overline{B_R(y)}).$$

Somit sind erneut die Beweise der Sätze 10.1 und 10.2 der Vorlesung über ,,nicht-lineare PDG" anwendbar und liefern in Kombination mit (3.58) für jeden Ball $B_{R_0}(x_0) \subset\subset \Omega \setminus \overline{B_R(y)}$:

$$\operatorname{osc}_{B_\varrho(x_0)} G(\,\cdot\,, y) \leq C\, \varrho^\alpha\, K(n, \mu, \lambda)\, R^{2-n} = \tilde C(n, \mu, \lambda)\, R^{2-n}\, \varrho^\alpha$$

für $\varrho \leq R_0/2$, und um jeden Randpunkt $x_0 \in \partial\Omega$:

$$\operatorname{osc}_{\Omega \cap B_\varrho(x_0)} G(\,\cdot\,, y) \leq C\, \varrho^\alpha\, K(n, \mu, \lambda)\, R^{2-n} = \tilde C(\lambda, \mu, n, \varrho_0, \theta)\, R^{2-n}\, \varrho^\alpha$$

für $0 < \varrho \leq \frac{\delta}{2}$. Überdeckung von $\bar\Omega \setminus B_{2R}(y)$ durch geeignete Bälle liefert somit $G(\,\cdot\,, y) \in C^{0,\alpha}(\bar\Omega \setminus B_{2R}(y))$, für jedes $R > 0$, zusammen mit Abschätzung (3.53) mit Konstanten, die nur von λ, μ, n, Ω und R abhängen, und insbesondere $G(\,\cdot\,, y) \in C^{0,\alpha}_{loc}(\bar\Omega \setminus \{y\})$.

///

Theorem 3.4 *Sei Ω eine offene Teilmenge des $\mathbb{R}^n$, welche eine gleichmässige äussere Kegelbedingung mit Kegeldaten ϱ_0, θ erfülle. Die Greensfunktion G auf $\Omega \times \Omega$ ist in ihren beiden Argumenten symmetrisch, d.h. erfüllt $G(x, y) = G(y, x)$ für alle Paare $x \neq y$ aus $\Omega \times \Omega$.*

Beweis:
Es seien $x \neq y$ aus $\Omega \times \Omega$ beliebig, fest gewählt. Nach (3.33) und dem Satz von Rellich existieren Nullfolgen $\{\rho_\nu\}, \{\sigma_\mu\}$, für die

$$G^{\rho_\nu}(\,\cdot\,, y) \rightharpoonup G(\,\cdot\,, y) \qquad \text{schwach in } W_0^{1,s}(\Omega) \qquad \text{für } \nu \to \infty$$

$$G^{\sigma_\mu}(\,\cdot\,, x) \rightharpoonup G(\,\cdot\,, x) \qquad \text{schwach in } W_0^{1,s}(\Omega) \qquad \text{für } \mu \to \infty$$

$$G^{\rho_\nu}(\,\cdot\,, y) \longrightarrow G(\,\cdot\,, y) \qquad \text{stark in } L^s(\Omega) \qquad \text{für } \nu \to \infty \tag{3.59}$$

$$G^{\sigma_\mu}(\,\cdot\,, x) \longrightarrow G(\,\cdot\,, x) \qquad \text{stark in } L^s(\Omega) \qquad \text{für } \mu \to \infty \tag{3.60}$$

$\forall\, s \in (1, \frac{n}{n-1})$, und ausserdem $\rho_\nu, \sigma_\mu < \frac{\delta}{2}$ für ein fixiertes

$$\delta \leq \min\{\varrho_0, \frac{\operatorname{dist}(y, \partial\Omega)}{4}, \frac{\operatorname{dist}(x, \partial\Omega)}{4}, \frac{|x - y|}{4}\}$$

$\forall \nu, \mu \in \mathbb{N}$ gilt. Desweiteren folgern wir aus (3.28) erst

$$A_{\mu\,\nu} := a(G^{\rho_\nu}(\,\cdot\,, y), G^{\sigma_\mu}(\,\cdot\,, x)) = \frac{1}{\mathcal{L}^n(B_{\rho_\nu}(y))} \int_{B_{\rho_\nu}(y)} G^{\sigma_\mu}(z, x)\, dz$$

und anhand der Symmetrie der Koeffizienten $a^{\alpha\beta}$ bzw. der Bilinearform a andererseits:

$$A_{\mu\,\nu} = a(G^{\sigma_\mu}(\,\cdot\,, x), G^{\rho_\nu}(\,\cdot\,, y)) = \frac{1}{\mathcal{L}^n(B_{\sigma_\mu}(x))} \int_{B_{\sigma_\mu}(x)} G^{\rho_\nu}(z, y)\, dz.$$

Da wir nach Korollar 3.3 (und wegen $\rho_\nu < \frac{\delta}{2}$) $G^{\rho_\nu}(\,\cdot\,, y) \in C^{0,\alpha}(\bar{\Omega} \setminus B_{2\delta}(y))$ $\forall\, \nu \in \mathbb{N}$ wissen, folgt zusammen mit (3.60) und bei Beachtung von $\sigma_\mu + 2\delta < 3\delta < |x-y|$, also $B_{\sigma_\mu}(x) \cap B_{2\delta}(y) = \emptyset$:

$$\lim_{\mu\to\infty} A_{\mu\,\nu} = \frac{1}{\mathcal{L}^n(B_{\rho_\nu}(y))} \int_{B_{\rho_\nu}(y)} G(z, x)\, dz = G^{\rho_\nu}(x, y) =: A_\nu \tag{3.61}$$

und zusammen mit $G(\,\cdot\,, x) \in C^{0,\alpha}_{loc}(\bar{\Omega} \setminus \{x\})$ nach Korollar 3.3 auch

$$\lim_{\nu\to\infty} \lim_{\mu\to\infty} A_{\mu\,\nu} = G(y, x) = \lim_{\nu\to\infty} A_\nu. \tag{3.62}$$

Andererseits erhalten wir analog aus (3.59) und $G^{\sigma_\mu}(\,\cdot\,, x) \in C^{0,\alpha}(\bar{\Omega} \setminus B_{2\delta}(x))$ $\forall\, \mu \in \mathbb{N}$ (jetzt wegen $\sigma_\mu < \frac{\delta}{2}$ und $\rho_\nu + 2\delta < 3\delta < |x-y|$):

$$\lim_{\nu\to\infty} A_{\mu\,\nu} = G^{\sigma_\mu}(y, x) (=: A_\mu) = \frac{1}{\mathcal{L}^n(B_{\sigma_\mu}(x))} \int_{B_{\sigma_\mu}(x)} G(z, y)\, dz \tag{3.63}$$

und zusammen mit $G(\,\cdot\,, y) \in C^{0,\alpha}_{loc}(\bar{\Omega} \setminus \{y\})$ nach Korollar 3.3 auch

$$\lim_{\mu\to\infty} \lim_{\nu\to\infty} A_{\mu\,\nu} = G(x, y) = \lim_{\mu\to\infty} A_\mu. \tag{3.64}$$

Wir müssen im Hinblick auf das angestrebte Ziel also die Vertauschbarkeit der Limites, d.h. $\lim_{\mu\to\infty} \lim_{\nu\to\infty} A_{\mu\,\nu} = \lim_{\nu\to\infty} \lim_{\mu\to\infty} A_{\mu\,\nu}$ zeigen. Mittels $G^{\sigma_\mu}(\,\cdot\,, x) \in C^{0,\alpha}(\bar{\Omega} \setminus B_{2\delta}(x))$ mit Abschätzung (3.52) und (3.63) gilt einerseits

$$\begin{aligned} |A_{\mu\nu} - A_\mu| &= \Big|\frac{1}{\mathcal{L}^n(B_{\rho_\nu}(y))} \int_{B_{\rho_\nu}(y)} G^{\sigma_\mu}(z, x)\, dz - G^{\sigma_\mu}(y, x)\Big| \\ &\le \frac{1}{\mathcal{L}^n(B_{\rho_\nu}(y))} \int_{B_{\rho_\nu}(y)} |G^{\sigma_\mu}(z, x) - G^{\sigma_\mu}(y, x)|\, dz \end{aligned}$$

$$\le \text{Konst.}(\lambda, \Omega, n, \delta)\, \frac{1}{\mathcal{L}^n(B_{\rho_\nu}(y))} \int_{B_{\rho_\nu}(y)} |z-y|^\alpha\, dz \le \text{Konst.}(\lambda, \Omega, n, \delta)\, \rho_\nu^\alpha \qquad \text{für alle } \nu,$$

mit obigem $\alpha > 0$, wenn wir noch $\rho_\nu + 2\delta < 3\delta < |x-y|$, also insbesondere $B_{\rho_\nu}(y) \cap B_{2\delta}(x) = \emptyset$ beachten. Insbesondere erhalten wir hieraus zu jedem $\epsilon > 0$ die Existenz einer natürlichen Zahl $\nu_0(\epsilon)$ (unabhängig von μ), sodass

$$|A_{\mu\nu} - A_\mu| < \epsilon \qquad \text{für alle } \nu > \nu_0(\epsilon) \tag{3.65}$$

gilt. Analog erhalten wir mittels $G^{\rho_\nu}(\,\cdot\,,y) \in C^{0,\alpha}(\bar\Omega \setminus B_{2\delta}(y))$ mit Abschätzung (3.52), (3.61) und $\sigma_\mu + 2\delta < 3\delta < |x-y|$:

$$|A_{\mu\nu} - A_\nu| = |\frac{1}{\mathcal{L}^n(B_{\sigma_\mu}(x))} \int_{B_{\sigma_\mu}(x)} G^{\rho_\nu}(z,y)\,dz - G^{\rho_\nu}(x,y)|$$

$$\leq \frac{1}{\mathcal{L}^n(B_{\sigma_\mu}(x))} \int_{B_{\sigma_\mu}(x)} |G^{\rho_\nu}(z,y) - G^{\rho_\nu}(x,y)|\,dz \leq \text{Konst.}(\lambda,\Omega,n,\delta)\,\sigma_\mu^\alpha \qquad \text{für alle } \mu,$$

woraus wir zu jedem $\epsilon > 0$ die Existenz einer natürlichen Zahl $\mu_0(\epsilon)$ (unabhängig von ν) erhalten, für die

$$|A_{\mu\nu} - A_\nu| < \epsilon \qquad \text{für alle } \mu > \mu_0(\epsilon) \tag{3.66}$$

gilt. Kombinieren wir (3.62), (3.64), (3.65) und (3.66), so folgt:

$$|G(y,x) - G(x,y)| = |\lim_{\nu\to\infty} A_\nu - \lim_{\mu\to\infty} A_\mu|$$

$$\leq |\lim_{\nu\to\infty} A_\nu - A_\nu| + |A_\nu - A_{\mu\nu}| + |A_{\mu\nu} - A_\mu| + |A_\mu - \lim_{\mu\to\infty} A_\mu| \leq 4\,\epsilon$$

für jedes $\epsilon > 0$, falls wir μ und ν – abhängig von $\epsilon > 0$ – hinreichend gross wählen, und damit $G(y,x) = G(x,y)$.

///

Korollar 3.5 *Seien Ω eine offene Teilmenge des $\mathbb{R}^n$, welche eine gleichmässige äussere Kegelbedingung mit Kegeldaten ϱ_0, θ erfülle, und $y \in \Omega$ ein fixierter Punkt. Dann gilt für jedes $\rho > 0$:*

$$G^\rho(x,y) = \frac{1}{\mathcal{L}^n(B_\rho(y))} \int_{B_\rho(y)} G(x,z)\,dz$$

in jedem Lebesgue-Punkt $x \in \Omega$ von $G^\rho(\,\cdot\,,y)$.

Beweis:
Wir wählen ein $\rho > 0$ und einen beliebigen Lebesgue-Punkt $x \in \Omega$ von $G^\rho(\,\cdot\,,y)$, und wir testen zunächst (3.28) sowohl mittels $G^\sigma(\,\cdot\,,x)$, für ein beliebiges $\sigma > 0$, als auch mittels $G^\rho(\,\cdot\,,y)$ und erhalten anhand der Symmetrie der Bilinearform a:

$$\frac{1}{\mathcal{L}^n(B_\sigma(x))} \int_{B_\sigma(x)} G^\rho(z,y)\,dz = a(G^\sigma(\,\cdot\,,x), G^\rho(\,\cdot\,,y)) = a(G^\rho(\,\cdot\,,y), G^\sigma(\,\cdot\,,x))$$

$$= \frac{1}{\mathcal{L}^n(B_\rho(y))} \int_{B_\rho(y)} G^\sigma(z,x)\,dz.$$

Anhand der Konvergenz in (3.33), zusammen mit dem Satz von Rellich (vgl. (3.60)), und da x ein Lebesgue-Punkt von $G^\rho(\,\cdot\,,y)$ ist, erhalten wir hieraus im Limes für eine geeignete Nullfolge $\sigma_\mu \searrow 0$:

$$G^\rho(x,y) = \frac{1}{\mathcal{L}^n(B_\rho(y))} \int_{B_\rho(y)} G(z,x)\,dz.$$

Anhand der Symmetrie von G in seinen beiden Argumenten, nach Theorem 3.4, impliziert dies die Behauptung, d.h.:

$$G^\rho(x,y) = \frac{1}{\mathcal{L}^n(B_\rho(y))} \int_{B_\rho(y)} G(x,z)\,dz.$$

///

4 Lokale Hölder-Stetigkeit schwacher Lösungen elliptischer Systeme in Diagonalgestalt mittels "Lochfüllen"

Wir kombinieren in diesem Kapitel die Resultate der Kapitel 2 und 3, um einige Regularitätssätze herzuleiten, die lokale Hölderstetigkeit schwacher Lösungen elliptischer Systeme in Diagonalgestalt bzw. elliptischer Gleichungen implizieren. Hierzu benötigen wir als letzte Vorbereitungen die zwei folgenden Lemmata.

Lemma 4.1 *Sind $u, v \in W^{1,2}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$, so gilt $uv \in W^{1,2}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ mit*

$$\nabla(uv) = \nabla u\, v + u\, \nabla v.$$

Dies beweist man mittels des Standard-Beweises für die Produktregel für Sobolev-Funktionen, d.h. durch Herleitung der Wälzformel für uv mittels Approximation von u und v durch zwei Folgen von $C^\infty(\mathbb{R}^n)-$Funktionen in $W^{1,2}_{loc}(\Omega)$.

Lemma 4.2 *Seien D eine offene, beschränkte Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ und $a^{\alpha\beta} \in L^\infty(D)$ gleichmässig elliptische, beschränkte Koeffizienten, d.h. die Matrix $(a^{\alpha\beta})$ erfülle*

$$a^{\alpha\beta}(x)\, \xi_\alpha\, \xi_\beta \geq \lambda\, |\xi|^2 \quad \textit{für alle } \xi \in \mathbb{R}^n$$

für fast alle $x \in D$ und für ein $\lambda > 0$, und es existiere ein $\mu \geq \lambda$, sodass $|a^{\alpha\beta}(x)| \leq \mu$ für fast alle $x \in D$ und alle $\alpha, \beta = 1, \ldots, n$ gelte. Desweiteren löse eine Funktion $w \in W^{1,2}(D) \cap L^\infty(D)$ die entsprechende schwache, homogene Gleichung

$$-D_\beta(a^{\alpha\beta}(\,\cdot\,)\, D_\alpha u) = 0 \qquad \textit{auf } D, \tag{4.67}$$

(vgl. (1.3)). Dann gilt auf jeder offenen Teilmenge $D' \subset\subset D$ und für alle $v \in W^{1,2}(D, \mathbb{R}^N) \cap L^\infty(D, \mathbb{R}^N)$:

$$\int_{D'} |v|^2\, |\nabla w|^2\, d\mathcal{L}^n \leq C(\lambda, \mu, n, N) \Big(\frac{1}{s^2} \int_D |v|^2\, w^2\, d\mathcal{L}^n + \int_D w^2\, |Dv|^2\, d\mathcal{L}^n \Big), \tag{4.68}$$

wobei hier $s := dist(\partial D', \partial D)$ gesetzt sei.

Beweis:
Wir wählen eine offene Teilmenge $D' \subset\subset D$, ein $\psi \in C_c^\infty(D)$ mit $0 \leq \psi \leq 1$, $\psi \equiv 1$ auf D' und $|\nabla\psi| \leq \frac{2}{s}$ auf D, und testen (4.67) mittels $\xi := |v|^2\, w\psi^2$ für ein beliebiges $v \in W^{1,2}(D, \mathbb{R}^N) \cap L^\infty(D, \mathbb{R}^N)$. Nach Lemma 4.1 ist $\xi \in W_0^{1,2}(D) \cap L^\infty(D)$ und besitzt die schwachen Ableitungen

$$D_\beta \xi = 2\, v\, D_\beta v\, w\, \psi^2 + |v|^2\, D_\beta w\, \psi^2 + |v|^2\, w\, 2\psi\, D_\beta \psi$$

aus $L^2(D)$. Somit erhalten wir aus (4.67):

$$\int_D a^{\alpha\beta}\, D_\alpha w\, D_\beta w\, |v|^2\, \psi^2\, d\mathcal{L}^n = -2 \int_D a^{\alpha\beta}\, D_\alpha w\, \Big(v\, D_\beta v\, w\, \psi^2 + |v|^2\, w\, \psi\, D_\beta \psi \Big)\, d\mathcal{L}^n.$$

Mittels der Elliptizität und Beschränktheit der $a^{\alpha\beta}$ und der Cauchy-Schwarz-Ungleichung erhalten wir:

$$\lambda \int_D |\nabla w|^2\, |v|^2\, \psi^2\, d\mathcal{L}^n \leq \epsilon \int_D |\nabla w|^2\, |v|^2\, \psi^2\, d\mathcal{L}^n + \frac{C(\mu,n,N)}{\epsilon} \int_D |Dv|^2\, w^2\, \psi^2\, d\mathcal{L}^n$$
$$+\epsilon \int_D |\nabla w|^2\, |v|^2\, \psi^2\, d\mathcal{L}^n + \frac{C(\mu,n,N)}{\epsilon} \int_D |v|^2\, w^2\, |\nabla\psi|^2\, d\mathcal{L}^n.$$

Wählen wir hier $\epsilon := \frac{\lambda}{4}$ und beachten wir $\psi \equiv 1$ auf D' und $|\nabla\psi|^2 \leq \frac{4}{s^2}$ auf D, so folgt die Behauptung (4.68) mittels Absorption des ersten und dritten Terms auf der rechten Seite in die linke Seite.

///

Theorem 4.1 *[Hildebrandt, Widman, 1974] Sei Ω eine offene, beschränkte Teilmenge des $\mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, wie in Theorem 3.1 und $u \in W^{1,2}(\Omega,\mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\Omega,\mathbb{R}^N)$ eine schwache Lösung eines elliptischen Systems (1.3) in Diagonalform auf Ω, welche ausserdem $osc_\Omega u < \frac{\lambda}{a}$ erfülle. Dann ist u von der Klasse $C^{0,\alpha}_{loc}(\Omega,\mathbb{R}^N)$ für ein $\alpha \in (0,1)$, welches nur von $n, N, \lambda, \mu, b, \lambda - a\, osc_\Omega u$ und $\| u \|_{L^\infty(\Omega)}$ abhängt, und es existiert zu jeder offenen Teilmenge $\Omega_\epsilon \subset\subset \Omega$ (siehe Definition 2.1 , (ii)) eine Konstante K, die von $\lambda, \mu, n, N, b, \lambda - a\, osc_\Omega u, \| u \|_{L^\infty(\Omega)}$, Ω und ϵ abhängt, sodass*

$$|u(x) - u(y)| \leq K\, |x-y|^\alpha \qquad \forall x, y \in \Omega_\epsilon$$

gilt.

Beweis:
Wir wählen einen beliebigen Punkt $x_0 \in \Omega$, einen Ball $B_{2R}(x_0) \subset\subset \Omega$ und ein $\eta \in C^\infty_c(B_{2R}(x_0),[0,1])$ mit $\eta \equiv 1$ auf $\overline{B_{\frac{5R}{4}}(x_0)}$, $\eta \equiv 0$ auf $\mathbb{R}^n \setminus B_{\frac{7R}{4}}(x_0)$ und $|\nabla\eta| \leq \frac{3}{R}$. Zu den elliptischen, beschränkten Koeffizienten $a^{\alpha\beta} := \tilde{A}^{\alpha\beta}(\,\cdot\,,u(\,\cdot\,))$ verwenden wir die gemittelten Greensfunktionen $G^\rho := G^\rho(\,\cdot\,,x_0)$, $\rho > 0$, um x_0 und wählen als Testfunktionen

$$\varphi := \eta^2\, G^\rho\, (u - \bar{u}_R) \qquad \text{für jedes } \rho < \frac{R}{2},$$

wobei wir die Abkürzung $\bar{u}_R := \overline{u_{T_{2R}(x_0)}}$ benutzten. Anhand von Lemma 4.1 folgt $\varphi \in W^{1,2}_0(B_{2R}(x_0)) \cap L^\infty(B_{2R}(x_0))$ aus $G^\rho(\,\cdot\,,x_0) \in W^{1,2}_0(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ und $u \in W^{1,2}(\Omega,\mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\Omega,\mathbb{R}^N)$ und dass φ die schwachen Ableitungen

$$D_\beta\varphi = 2\eta\, D_\beta\eta\, G^\rho\, (u - \bar{u}_R) + \eta^2\, D_\beta G^\rho\, (u - \bar{u}_R) + \eta^2\, G^\rho\, D_\beta u$$

in $L^2(\Omega,\mathbb{R}^N)$ hat. Testen wir nun (1.3) mit φ, so ergibt sich (erneut mit $a^{\alpha\beta} := \tilde{A}^{\alpha\beta}(\,\cdot\,,u(\,\cdot\,))$)

$$\int_{B_{2R}(x_0)} a^{\alpha\beta}\, D_\alpha u \Big(2\eta\, D_\beta\eta\, G^\rho\, (u - \bar{u}_R) + \eta^2\, D_\beta G^\rho\, (u - \bar{u}_R) + \eta^2\, G^\rho\, D_\beta u\Big)\, d\mathcal{L}^n \tag{4.69}$$
$$= \int_{B_{2R}(x_0)} f(\,\cdot\,,u,\nabla u)\, \eta^2\, G^\rho\, (u - \bar{u}_R)\, d\mathcal{L}^n.$$

Aus Punkt (iv) der GV entnehmen wir sofort:

$$
\begin{aligned}
&|\int_{B_{2R}(x_0)} f(\,\cdot\,,u,\nabla u)\,\eta^2\,G^\rho\,(u-\bar{u}_R)\,d\mathcal{L}^n| \\
&\leq a \int_{B_{2R}(x_0)} |\nabla u|^2\,\mathrm{osc}_\Omega u\;\eta^2\,G^\rho\,d\mathcal{L}^n + 2b\;\|\,u\,\|_{L^\infty(\Omega)}\int_{B_{2R}(x_0)} G^\rho\,d\mathcal{L}^n.
\end{aligned}
$$

Mittels Korollar 3.2 schätzen wir ab:

$$
\begin{aligned}
\int_{B_{2R}(x_0)} G^\rho\,d\mathcal{L}^n &\leq K(n,\mu,\lambda)\int_{B_{2R}(x_0)} |x-x_0|^{2-n}\,dx \\
&= K(n,\mu,\lambda)\,n\omega_n\int_0^{2R} r^{2-n}\,r^{n-1}\,dr = \tilde{K}(n,\mu,\lambda)\,R^2
\end{aligned}
$$

und erhalten somit

$$
\begin{aligned}
&|\int_{B_{2R}(x_0)} f(\,\cdot\,,u,\nabla u)\,\eta^2\,G^\rho\,(u-\bar{u}_R)\,d\mathcal{L}^n| \qquad (4.70)\\
&\leq a \int_{B_{2R}(x_0)} |Du|^2\,\mathrm{osc}_\Omega u\;\eta^2\,G^\rho\,d\mathcal{L}^n + 2b\;\|\,u\,\|_{L^\infty(\Omega)}\;\tilde{K}(n,\mu,\lambda)\,R^2.
\end{aligned}
$$

Desweiteren erhalten wir aus $\mathrm{supp}(\nabla\eta)\subset T_{2R}(x_0)$, Cauchy-Schwarz, (3.30) und der skalierten Poincare-Ungleichung für den ersten Summanden der linken Seite von (4.69):

$$
\begin{aligned}
&|\int_{B_{2R}(x_0)} a^{\alpha\beta}\,D_\alpha u\,2\eta\,D_\beta\eta\,G^\rho\,(u-\bar{u}_R)\,d\mathcal{L}^n| \qquad (4.71)\\
&\leq C(\mu,n)\int_{T_{2R}(x_0)} |Du|^2\,G^\rho\,d\mathcal{L}^n + C(\mu,n)\int_{T_{2R}(x_0)} |u-\bar{u}_R|^2\,G^\rho\,|\nabla\eta|^2\,d\mathcal{L}^n \\
&\leq 2\,K(n,\mu,\lambda)\,R^{2-n}\int_{T_{2R}(x_0)} |Du|^2\,d\mathcal{L}^n.
\end{aligned}
$$

Desweiteren setzen wir $T^*_{2R}(x_0) := B_{\frac{7R}{4}}(x_0)\setminus\overline{B_{\frac{5R}{4}}(x_0)}$ und erhalten aus $\mathrm{supp}(\nabla\eta)\subset\overline{T^*_{2R}(x_0)}$ und (3.28) für den zweiten Summanden der linken Seite von (4.69):

$$
\begin{aligned}
&\int_{B_{2R}(x_0)} a^{\alpha\beta}\,D_\alpha u\,\eta^2\,D_\beta G^\rho\,(u-\bar{u}_R)\,d\mathcal{L}^n \qquad (4.72)\\
&=\frac{1}{2}\int_{B_{2R}(x_0)} a^{\alpha\beta}\,D_\alpha(|u-\bar{u}_R|^2\,\eta^2)\,D_\beta G^\rho\,d\mathcal{L}^n - \int_{T^*_{2R}(x_0)} a^{\alpha\beta}\,|u-\bar{u}_R|^2\,\eta\,D_\alpha(\eta)\,D_\beta G^\rho\,d\mathcal{L}^n \\
&=\frac{1}{2}\,\frac{1}{\mathcal{L}^n(B_\rho(x_0))}\int_{B_\rho(x_0)} |u-\bar{u}_R|^2\,d\mathcal{L}^n - \int_{T^*_{2R}(x_0)} a^{\alpha\beta}\,|u-\bar{u}_R|^2\,\eta\,D_\alpha(\eta)\,D_\beta G^\rho\,d\mathcal{L}^n
\end{aligned}
$$

für $\rho<\frac{R}{2}$. Den Betrag des letzten hierbei auftretenden Terms schätzen wir mittels Cauchy-Schwarz und der skalierten Poincare-Ungleichung durch

$$
R^{n-2}\int_{T^*_{2R}(x_0)} |\nabla G^\rho|^2\,|u-\bar{u}_R|^2\,d\mathcal{L}^n + C(\mu,n)\,R^{2-n}\int_{T^*_{2R}(x_0)} |Du|^2\,d\mathcal{L}^n \qquad (4.73)
$$

ab. Beachten wir nun, dass nach (3.28) die Funktion $G^\rho\in W^{1,2}(\Omega)\cap L^\infty(\Omega)$ – insbesondere für $\rho<\frac{R}{2}$ – eine schwache Lösung der Gleichung (4.67) auf dem Annulus $D := T_{2R}(x_0)$ ist, so können wir Lemma 4.2 auf die Funktionen $w := G^\rho$ und $v := u - \bar{u}_R \in W^{1,2}(\Omega, \mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^N)$ auf den Gebieten $D := T_{2R}(x_0)$ und $D' := T^*_{2R}(x_0)$ anwenden und erhalten:

$$R^{n-2} \int_{T^*_{2R}(x_0)} |\nabla G^\rho|^2 \, |u - \bar{u}_R|^2 \, d\mathcal{L}^n$$

$$\leq R^{n-2} \, C(\lambda, \mu, n, N) \Big(\frac{16}{R^2} \int_{T_{2R}(x_0)} |G^\rho|^2 \, |u - \bar{u}_R|^2 \, d\mathcal{L}^n + \int_{T_{2R}(x_0)} |G^\rho|^2 \, |Du|^2 \, d\mathcal{L}^n \Big).$$

Kombinieren wir dies mit (3.30) – bei Beachtung von $\rho < \frac{R}{2} < \frac{|x-x_0|}{2}$ und $|x - x_0|^{2-n} < R^{2-n}$ für $x \in T_{2R}(x_0)$ – und mit der skalierten Poincare-Ungleichung, so erhalten wir:

$$R^{n-2} \int_{T^*_{2R}(x_0)} |\nabla G^\rho|^2 \, |u - \bar{u}_R|^2 \, d\mathcal{L}^n$$

$$\leq R^{n-2} \, C(\lambda, \mu, n, N) \Big(\frac{16}{R^2} \, R^{4-2n} \int_{T_{2R}(x_0)} |u - \bar{u}_R|^2 \, d\mathcal{L}^n + R^{4-2n} \int_{T_{2R}(x_0)} |Du|^2 \, d\mathcal{L}^n \Big)$$

$$= C(\lambda, \mu, n, N) \, R^{2-n} \int_{T_{2R}(x_0)} |Du|^2 \, d\mathcal{L}^n.$$

Insgesamt folgt somit aus (4.72) und (4.73):

$$\Big| \int_{B_{2R}(x_0)} a^{\alpha\beta} \, D_\alpha u \, \eta^2 \, D_\beta G^\rho \, (u - \bar{u}_R) \, d\mathcal{L}^n - \frac{1}{2} \, \frac{1}{\mathcal{L}^n(B_\rho(x_0))} \int_{B_\rho(x_0)} |u - \bar{u}_R|^2 \, d\mathcal{L}^n \Big|$$

$$\leq C(\lambda, \mu, n, N) \, R^{2-n} \int_{T_{2R}(x_0)} |Du|^2 \, d\mathcal{L}^n. \tag{4.74}$$

Beachten wir, dass der dritte Summand der linken Seite von (4.69) durch $\lambda \int_{B_{2R}(x_0)} |Du|^2 \, G^\rho(\,\cdot\,, x_0) \, \eta^2 \, d\mathcal{L}^n$ nach unten abgeschätzt werden kann, so erhalten wir aus (4.69), (4.70), (4.71) und (4.74):

$$\lambda \int_{B_{2R}(x_0)} |Du|^2 \, G^\rho(\,\cdot\,, x_0) \, \eta^2 \, d\mathcal{L}^n + \frac{1}{2} \, \frac{1}{\mathcal{L}^n(B_\rho(x_0))} \int_{B_\rho(x_0)} |u - \bar{u}_R|^2 \, d\mathcal{L}^n$$

$$\leq \tilde{C}(\lambda, \mu, n, N) \, R^{2-n} \int_{T_{2R}(x_0)} |Du|^2 \, d\mathcal{L}^n$$

$$+ a \int_{B_{2R}(x_0)} |Du|^2 \, \mathrm{osc}_\Omega u \; \eta^2 \, G^\rho \, d\mathcal{L}^n + 2b \, \| \, u \, \|_{L^\infty(\Omega)} \; \tilde{K}(n, \mu, \lambda) \, R^2.$$

Beachten wir nun die Voraussetzung $\mathrm{osc}_\Omega u < \frac{\lambda}{a}$ und $\eta \equiv 1$ auf $B_R(x_0)$, so erhalten wir durch Absorption:

$$\int_{B_R(x_0)} |Du|^2 \, G^\rho(\,\cdot\,, x_0) \, d\mathcal{L}^n$$

$$\leq \tilde{C}(\lambda, \mu, n, N, \lambda - a \, \mathrm{osc}_\Omega u) \, R^{2-n} \int_{T_{2R}(x_0)} |Du|^2 \, d\mathcal{L}^n$$

$$+ \tilde{K}(n, \mu, \lambda, \lambda - a \, \mathrm{osc}_\Omega u) \, b \, \| \, u \, \|_{L^\infty(\Omega)} \; R^2,$$

für alle $\rho < \frac{R}{2}$. Zusammen mit (3.33), dem Lemma von Fatou und (3.38) – bei Beachtung von $R < \frac{3}{4} \, 2R < \frac{3}{4} \, \mathrm{dist}(x_0, \partial\Omega)$ – erhalten wir somit:

$$\Phi(R) := \int_{B_R(x_0)} |Du|^2 \, |x - x_0|^{2-n} \, d\mathcal{L}^n \leq \tilde{K}(n, \mu, \lambda)^{-1} \int_{B_R(x_0)} |Du|^2 \, G(x, x_0) \, d\mathcal{L}^n$$

$$\leq \tilde{C}'(\lambda, \mu, n, N, \lambda - a\,\mathrm{osc}_\Omega u)\, R^{2-n} \int_{T_{2R}(x_0)} |Du|^2\, d\mathcal{L}^n$$
$$+\tilde{K}(n, \mu, \lambda, \lambda - a\,\mathrm{osc}_\Omega u)\, b \parallel u \parallel_{L^\infty(\Omega)} R^2$$
$$\leq \tilde{C}'(\lambda, \mu, n, N, \lambda - a\,\mathrm{osc}_\Omega u) \int_{T_{2R}(x_0)} |Du|^2\, |x - x_0|^{2-n}\, d\mathcal{L}^n + \tilde{K}\, b \parallel u \parallel_{L^\infty(\Omega)} R^2$$
$$\equiv \tilde{C}'\,(\Phi(2R) - \Phi(R)) + \tilde{K}\, b \parallel u \parallel_{L^\infty(\Omega)} R^2,$$

für alle $R < \frac{\mathrm{dist}(x_0, \partial\Omega)}{2}$ und somit für alle $R \leq \frac{\mathrm{dist}(x_0, \partial\Omega)}{2}$, da $\parallel Du \parallel_{L^2(\Omega)} < \infty$. Diese Abschätzung zeigt, dass Φ eine auf $(0, \mathrm{dist}(x_0, \partial\Omega)]$ wohldefinierte, monoton nicht-fallende Funktion ist, die ausserdem der Voraussetzung von Lemma 2.4, (ii), für $\sigma := 2$ und $R_0 := \frac{\mathrm{dist}(x_0, \partial\Omega)}{2}$ genügt. Somit folgt aus diesem Lemma, dass das Wachstum von Φ durch

$$\Phi(R) \leq \frac{1}{\Theta^*}\,(\Phi(R_0) + R_0^{2-\epsilon}) \left(\frac{R}{R_0}\right)^\gamma \quad \text{für } 0 < R \leq R_0,$$

für ein geeignetes $\epsilon \in (0,1)$, ein $\Theta^* = \Theta^*(\lambda, \mu, n, N, b, \lambda - a\,\mathrm{osc}_\Omega u, \parallel u \parallel_{L^\infty(\Omega)}) \in (0,1)$ und $\gamma = \log_2(1/\Theta^*)$, beschränkt ist. Wegen $R^{2-n} \int_{B_R(x_0)} |Du|^2\, d\mathcal{L}^n \leq \Phi(R)$ zeigt dies wiederum:

$$R^{2-n} \int_{B_R(x_0)} |Du|^2\, d\mathcal{L}^n \leq \Phi(R) \leq$$
$$\leq K(\lambda, \mu, n, N, b, \lambda - a\,\mathrm{osc}_\Omega u, \parallel u \parallel_{L^\infty(\Omega)}, \mathrm{dist}(x_0, \partial\Omega))\, R^{2\alpha},$$

für alle $R \leq \frac{\mathrm{dist}(x_0, \partial\Omega)}{2}$, mit $\alpha = \frac{1}{2}\log_2(1/\Theta^*) \in (0,1)$. Da x_0 beliebig in Ω gewählt wurde, folgt aus Morrey's Growth-Theorem, Theorem 2.1: $u \in C^{0,\alpha}_{loc}(\Omega, \mathbb{R}^N)$, für dieses $\alpha \in (0,1)$, welches – wie Θ^* – nur von $\lambda, \mu, n, N, b, \lambda - a\,\mathrm{osc}_\Omega u$ und $\parallel u \parallel_{L^\infty(\Omega)}$ abhängt. Schliesslich folgt aus der letzten Abschätzung und aus Morrey's Growth-Theorem, dass

$$|u(x) - u(y)| \leq C(n, \alpha, \Omega, \epsilon) \sqrt{K(\lambda, \mu, n, N, b, \lambda - a\,\mathrm{osc}_\Omega u, \parallel u \parallel_{L^\infty(\Omega)}, \epsilon)}\, |x - y|^\alpha$$
$$= \tilde{K}(\lambda, \mu, n, N, b, \lambda - a\,\mathrm{osc}_\Omega u, \parallel u \parallel_{L^\infty(\Omega)}, \Omega, \epsilon)\, |x - y|^\alpha \qquad \forall x, y \in \Omega_\epsilon$$

gilt.

///

Theorem 4.2 *[Ladyzenskaja, Uralceva] Sei Ω eine offene, beschränkte Teilmenge des $\mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, wie in Theorem 3.1 und $u \in W^{1,2}(\Omega, \mathbb{R}) \cap L^\infty(\Omega, \mathbb{R})$ eine schwache Lösung einer elliptischen Gleichung der Form (1.3) auf Ω. Dann ist u von der Klasse $C^{0,\alpha}_{loc}(\Omega, \mathbb{R})$ für ein $\alpha \in (0,1)$, welches nur von n, λ, μ, b, a und $\parallel u \parallel_{L^\infty(\Omega)}$ abhängt, und es existiert zu jeder offenen Teilmenge $\Omega_\epsilon \subset\subset \Omega$ (siehe Definition 2.1 , (ii)) eine Konstante K, die von $\lambda, \mu, n, b, a, \parallel u \parallel_{L^\infty(\Omega)}$, Ω und ϵ abhängt, sodass*

$$|u(x) - u(y)| \leq K\, |x - y|^\alpha \qquad \forall x, y \in \Omega_\epsilon$$

gilt.

Beweis:
Wie im Beweis von Theorem 4.1 wählen wir einen beliebigen Punkt $x_0 \in \Omega$, einen Ball $B_{2R}(x_0) \subset\subset \Omega$ und ein $\eta \in C_c^\infty(B_{2R}(x_0), [0,1])$ mit $\eta \equiv 1$ auf $\overline{B_{\frac{5R}{4}}(x_0)}$, $\eta \equiv 0$ auf $\mathbb{R}^n \setminus B_{\frac{7R}{4}}(x_0)$ und $|\nabla \eta| \le \frac{3}{R}$. Wir setzen $\bar{u}_R := \overline{u_{T_{2R}(x_0)}}$ und $v := |u - \bar{u}_R|^2$. Anstatt der gemittelten Greensfunktionen $G^\rho(\,\cdot\,, x_0)$ zu den Koeffizienten $a^{\alpha\beta} := \tilde{A}^{\alpha\beta}(\,\cdot\,, u(\,\cdot\,))$ verwenden wir hier die gemittelten Greensfunktionen $\tilde{G}^\rho(\,\cdot\,, x_0)$ (um x_0) zu den elliptischen, beschränkten Koeffizienten $\tilde{a}^{\alpha\beta} := e^{tv}\, \tilde{A}^{\alpha\beta}(\,\cdot\,, u(\,\cdot\,))$ mit $t := \frac{a^2}{4\,\lambda^2}$ und wählen als Testfunktionen

$$\varphi := 2\,\eta^2\, \tilde{G}^\rho\, (u - \bar{u}_R)\, e^{tv} \qquad \text{für jedes } \rho < \frac{R}{2}.$$

Da mit u auch v und e^{tv} aus $W^{1,2}(\Omega, \mathbb{R}) \cap L^\infty(\Omega, \mathbb{R})$ sind, folgt wie im Beweis von Theorem 4.1 mittels Lemma 4.1, dass $\varphi \in W_0^{1,2}(B_{2R}(x_0)) \cap L^\infty(B_{2R}(x_0))$ ist und die schwachen Ableitungen

$$D_\beta \varphi = 2\,(2\,\eta\, D_\beta \eta\, \tilde{G}^\rho\, (u - \bar{u}_R)\, e^{tv} + \eta^2\, D_\beta \tilde{G}^\rho\, (u - \bar{u}_R)\, e^{tv} + \eta^2\, G^\rho\, D_\beta u\, e^{tv} + \eta^2\, \tilde{G}^\rho\, (u - \bar{u}_R)\, t\, D_\beta v\, e^{tv})$$

in $L^2(\Omega)$ hat. Beachten wir $D_\alpha v = 2\,(u - \bar{u}_R)\, \partial_\alpha u$, so erhalten wir durch Testen von (1.3) mittels φ:

$$\begin{aligned} & 2 \int_{B_{2R}(x_0)} a^{\alpha\beta}\, D_\alpha u\, D_\beta u\, e^{tv}\, \tilde{G}^\rho\, \eta^2\, d\mathcal{L}^n \\ & + t \int_{B_{2R}(x_0)} a^{\alpha\beta}\, D_\alpha v\, D_\beta v\, e^{tv}\, \tilde{G}^\rho\, \eta^2\, d\mathcal{L}^n \\ +2 \int_{T_{2R}^*(x_0)} a^{\alpha\beta}\, D_\alpha v\, D_\beta \eta\, \eta\, e^{tv}\, \tilde{G}^\rho\, d\mathcal{L}^n & + \int_{B_{2R}(x_0)} a^{\alpha\beta}\, D_\alpha v\, D_\beta \tilde{G}^\rho\, \eta^2\, e^{tv}\, d\mathcal{L}^n \\ & = \int_{B_{2R}(x_0)} f(\,\cdot\,, u, \nabla u)\, 2\,\eta^2\, \tilde{G}^\rho\, (u - \bar{u}_R)\, e^{tv}\, d\mathcal{L}^n, \end{aligned} \tag{4.75}$$

erneut mit $T_{2R}^*(x_0) := B_{\frac{7R}{4}}(x_0) \setminus \overline{B_{\frac{5R}{4}}(x_0)}$. Aus Punkt (iv) der GV und wegen $|\nabla v| = 2\,|u - \bar{u}_R|\,|\nabla u|$ (wegen $N = 1$) schätzen wir zunächst ab:

$$\begin{aligned} & \left| \int_{B_{2R}(x_0)} f(\,\cdot\,, u, \nabla u)\, 2\,\eta^2\, \tilde{G}^\rho\, (u - \bar{u}_R)\, e^{tv}\, d\mathcal{L}^n \right| \\ \le a & \int_{B_{2R}(x_0)} |\nabla v|\, \eta^2\, |\nabla u|\, \tilde{G}^\rho\, e^{tv}\, d\mathcal{L}^n + 2b \int_{B_{2R}(x_0)} \eta^2\, \tilde{G}^\rho\, |u - \bar{u}_R|\, e^{tv}\, d\mathcal{L}^n \\ & \le \frac{a\,\delta}{2} \int_{B_{2R}(x_0)} \tilde{G}^\rho\, \eta^2\, e^{tv}\, |\nabla u|^2\, d\mathcal{L}^n + \frac{a}{2\,\delta} \int_{B_{2R}(x_0)} \tilde{G}^\rho\, \eta^2\, e^{tv}\, |\nabla v|^2\, d\mathcal{L}^n \\ & \quad + 4\,b\, \| u \|_{L^\infty(\Omega)}\, e^{4\,t\,\|u\|^2_{L^\infty(\Omega)}} \int_{B_{2R}(x_0)} \tilde{G}^\rho\, d\mathcal{L}^n \\ & \le \frac{a\,\delta}{2} \int_{B_{2R}(x_0)} \tilde{G}^\rho\, \eta^2\, e^{tv}\, |\nabla u|^2\, d\mathcal{L}^n + \frac{a}{2\,\delta} \int_{B_{2R}(x_0)} \tilde{G}^\rho\, \eta^2\, e^{tv}\, |\nabla v|^2\, d\mathcal{L}^n \\ & \quad + \text{const.}(n, \lambda, \mu, b, \| u \|_{L^\infty(\Omega)}, t)\, R^2. \end{aligned}$$

Wir schätzten hierbei erneut

$$\begin{aligned} \int_{B_{2R}(x_0)} \tilde{G}^\rho\, d\mathcal{L}^n & \le K(n, \mu, \lambda, t, \| u \|_{L^\infty(\Omega)}) \int_{B_{2R}(x_0)} |x - x_0|^{2-n}\, d\mathcal{L}^n \\ & = \tilde{K}(n, \mu, \lambda, t, \| u \|_{L^\infty(\Omega)})\, R^2 \end{aligned}$$

mittels Korollar 3.2 ab, wobei zu beachten ist, dass die Koeffizienten $\tilde{a}^{\alpha\beta} = e^{tv}\,\tilde{A}^{\alpha\beta}(\,\cdot\,, u(\,\cdot\,))$ nicht durch μ sondern durch $\mu\, e^{4\,t\,\|u\|^2_{L^\infty(\Omega)}}$ nach oben beschränkt sind. Hiermit und mittels der Elliptizität der Koeffizienten $a^{\alpha\beta}$ schätzen wir in (4.75) nun weiter ab:

$$\begin{aligned} 2\,\lambda \int_{B_{2R}(x_0)} |\nabla u|^2\, e^{tv}\, \tilde{G}^\rho\, \eta^2\, d\mathcal{L}^n + t\,\lambda \int_{B_{2R}(x_0)} |\nabla v|^2\, e^{tv}\, \tilde{G}^\rho\, \eta^2\, d\mathcal{L}^n \\ + \int_{B_{2R}(x_0)} a^{\alpha\beta}\, e^{tv}\, D_\alpha v\, [2\,\eta\, D_\beta \eta\, \tilde{G}^\rho + \eta^2\, D_\beta \tilde{G}^\rho]\, d\mathcal{L}^n \\ \le \frac{a\,\delta}{2} \int_{B_{2R}(x_0)} \tilde{G}^\rho\, \eta^2\, e^{tv}\, |\nabla u|^2\, d\mathcal{L}^n + \frac{a}{2\,\delta} \int_{B_{2R}(x_0)} \tilde{G}^\rho\, \eta^2\, e^{tv}\, |\nabla v|^2\, d\mathcal{L}^n \\ + \text{const.}(n, \lambda, \mu, b, \|\, u\,\|_{L^\infty(\Omega)}, t)\, R^2. \end{aligned} \tag{4.76}$$

Wir wählen nun $\delta := \frac{2\,\lambda}{a}$, so können wir wegen $\frac{a\,\delta}{2} = \lambda$ das erste Integral auf der rechten Seite in das erste auf der linken Seite absorbieren. Zweitens sehen wir anhand der Wahl $t = \frac{a^2}{4\,\lambda^2}$: $t\,\lambda = \frac{a^2}{4\,\lambda} = \frac{a}{2\,\delta}$, sodass sich das zweite Integral auf der linken Seite und das zweite Integral auf der rechten Seite gegeneinander aufheben. Es folgt:

$$\begin{aligned} \lambda \int_{B_{2R}(x_0)} |\nabla u|^2\, e^{tv}\, \tilde{G}^\rho\, \eta^2\, d\mathcal{L}^n + \int_{B_{2R}(x_0)} a^{\alpha\beta}\, e^{tv}\, D_\alpha v\, [2\,\eta\, D_\beta \eta\, \tilde{G}^\rho + \eta^2\, D_\beta \tilde{G}^\rho]\, d\mathcal{L}^n \\ \le C(a, b, n, \lambda, \mu, \|\, u\,\|_{L^\infty(\Omega)})\, R^2. \end{aligned} \tag{4.77}$$

Zur Behandlung des letzten Summanden in (4.77) formen wir anhand von $D_\alpha v = 2\,(u - \bar{u}_R)\, D_\alpha u$, $\tilde{a}^{\alpha\beta} \equiv a^{\alpha\beta}\, e^{tv}$ und (3.28) um:

$$\begin{aligned} \int_{B_{2R}(x_0)} \tilde{a}^{\alpha\beta}\, D_\alpha v\, \eta^2\, D_\beta \tilde{G}^\rho\, d\mathcal{L}^n \\ = \int_{B_{2R}(x_0)} \tilde{a}^{\alpha\beta}\, D_\alpha((u - \bar{u}_R)^2\, \eta^2)\, D_\beta \tilde{G}^\rho\, d\mathcal{L}^n - \int_{T^*_{2R}(x_0)} 2\, \tilde{a}^{\alpha\beta}\, (u - \bar{u}_R)^2\, \eta\, D_\alpha \eta\, D_\beta \tilde{G}^\rho\, d\mathcal{L}^n \\ = \frac{1}{\mathcal{L}^n(B_\rho(x_0))} \int_{B_\rho(x_0)} (u - \bar{u}_R)^2\, \eta^2\, d\mathcal{L}^n - \int_{T^*_{2R}(x_0)} 2\, \tilde{a}^{\alpha\beta}\, (u - \bar{u}_R)^2\, \eta\, D_\alpha \eta\, D_\beta \tilde{G}^\rho\, d\mathcal{L}^n. \end{aligned} \tag{4.78}$$

Wir können den letzten Term hierin wie in (4.73) im Beweis von Theorem 4.1 abschätzen. Hier ist die Funktion $\tilde{G}^\rho \in W^{1,2}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ – insbesondere für $\rho < \frac{R}{2}$ – eine schwache Lösung der Gleichung (4.67) auf dem Annulus $D := T_{2R}(x_0)$, sodass wir Lemma 4.2 auf die Funktionen $w := \tilde{G}^\rho$ und $v := u - \bar{u}_R \in W^{1,2}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ auf den Gebieten $D := T_{2R}(x_0)$ und $D' := T^*_{2R}(x_0)$ anwenden können. Beachten wir erneut $\rho < \frac{R}{2} < \frac{|x - x_0|}{2}$ und $|x - x_0|^{2-n} < R^{2-n}$ für $x \in T_{2R}(x_0)$ und den einzigen Unterschied, dass hier die Koeffizienten $\tilde{a}^{\alpha\beta} = e^{tv}\, \tilde{A}^{\alpha\beta}(\,\cdot\,, u(\,\cdot\,))$ nicht durch μ sondern durch $\mu\, e^{\frac{a^2}{\lambda^2}\, \|u\|^2_{L^\infty(\Omega)}}$, also durch eine von μ, a, λ und $\|\, u\,\|_{L^\infty(\Omega)}$ abhängige Konstante nach oben beschränkt sind, so erhalten wir zusammen mit (3.30) und mit der skalierten Poincare-Ungleichung:

$$\begin{aligned} R^{n-2} \int_{T^*_{2R}(x_0)} |\nabla \tilde{G}^\rho|^2\, |u - \bar{u}_R|^2\, d\mathcal{L}^n \\ \le R^{n-2}\, C(a, n, \lambda, \mu, \|\, u\,\|_{L^\infty(\Omega)}) \left(\frac{16}{R^2} \int_{T_{2R}(x_0)} |\tilde{G}^\rho|^2\, |u - \bar{u}_R|^2\, d\mathcal{L}^n + \int_{T_{2R}(x_0)} |\tilde{G}^\rho|^2\, |\nabla u|^2\, d\mathcal{L}^n \right) \\ \le C(a, n, \lambda, \mu, \|\, u\,\|_{L^\infty(\Omega)})\, R^{2-n} \int_{T_{2R}(x_0)} |\nabla u|^2\, d\mathcal{L}^n. \end{aligned} \tag{4.79}$$

Zur Abschätzung von $\int_{B_{2R}(x_0)} a^{\alpha\beta}\, e^{tv}\, D_\alpha v\, 2\,\eta\, D_\beta\eta\, \tilde{G}^\rho\, d\mathcal{L}^n$ in (4.77) beachten wir $\operatorname{supp}(|\nabla\eta|) = \overline{T^*_{2R}(x_0)}$ und $D_\alpha v = 2\,(u - \bar{u}_R)\, D_\alpha u$. Wenden wir also Cauchy-Schwarz an, so können wir [wegen $\rho < \frac{R}{2}$] (3.30) mit der skalierten Poincare-Ungleichung kombinieren:

$$\begin{aligned}
&|\int_{T^*_{2R}(x_0)} a^{\alpha\beta}\, e^{tv}\, D_\alpha v\, 2\,\eta\, D_\beta\eta\, \tilde{G}^\rho\, d\mathcal{L}^n| \\
&\leq C(a,n,\lambda,\mu,\|\, u\,\|_{L^\infty(\Omega)}) \Big(\int_{T^*_{2R}(x_0)} |\nabla u|^2\, \tilde{G}^\rho\, d\mathcal{L}^n + \int_{T^*_{2R}(x_0)} |u - \bar{u}_R|^2\, \tilde{G}^\rho\, |\nabla\eta|^2\, d\mathcal{L}^n \Big) \\
&\leq \tilde{C}(a,n,\lambda,\mu,\|\, u\,\|_{L^\infty(\Omega)})\, R^{2-n} \int_{T^*_{2R}(x_0)} |\nabla u|^2\, d\mathcal{L}^n. \qquad (4.80)
\end{aligned}$$

Insgesamt folgt nun aus (4.77) – (4.80):

$$\begin{aligned}
\lambda \int_{B_R(x_0)} |\nabla u|^2\, \tilde{G}^\rho\, d\mathcal{L}^n &\leq \lambda \int_{B_{2R}(x_0)} |\nabla u|^2\, e^{tv}\, \tilde{G}^\rho\, \eta^2\, d\mathcal{L}^n + \frac{1}{\mathcal{L}^n(B_\rho(x_0))} \int_{B_\rho(x_0)} (u - \bar{u}_R)^2\, d\mathcal{L}^n \\
&\leq \tilde{C}(a,n,\lambda,\mu,\|\, u\,\|_{L^\infty(\Omega)})\, R^{2-n} \int_{T_{2R}(x_0)} |\nabla u|^2\, d\mathcal{L}^n + \mathrm{C}(n,\lambda,\mu,b,a,\|\, u\,\|_{L^\infty(\Omega)})\, R^2.
\end{aligned}$$

Zusammen mit (3.33), dem Lemma von Fatou und (3.38) – bei Beachtung von $R < \frac{3}{4}\, 2R < \frac{3}{4}\operatorname{dist}(x_0, \partial\Omega)$ – erhalten wir wie im Beweis von Theorem 4.1:

$$\begin{aligned}
\Phi(R) &:= \int_{B_R(x_0)} |\nabla u|^2\, |x - x_0|^{2-n}\, d\mathcal{L}^n \\
&\leq \tilde{K}(a,n,\lambda,\mu,\|\, u\,\|_{L^\infty(\Omega)})^{-1} \int_{B_R(x_0)} |\nabla u|^2\, \tilde{G}(x, x_0)\, d\mathcal{L}^n \\
&\leq \tilde{C}(a,n,\lambda,\mu,\|\, u\,\|_{L^\infty(\Omega)})\, R^{2-n} \int_{T_{2R}(x_0)} |\nabla u|^2\, d\mathcal{L}^n + K(n,\lambda,\mu,b,a,\|\, u\,\|_{L^\infty(\Omega)})\, R^2 \\
&\leq \tilde{C}(a,n,\lambda,\mu,\|\, u\,\|_{L^\infty(\Omega)}) \int_{T_{2R}(x_0)} |\nabla u|^2\, |x - x_0|^{2-n}\, d\mathcal{L}^n + K(n,\lambda,\mu,b,a,\|\, u\,\|_{L^\infty(\Omega)})\, R^2 \\
&\equiv \tilde{C}\,(\Phi(2R) - \Phi(R)) + K\, R^2,
\end{aligned}$$

für alle $R < \frac{\operatorname{dist}(x_0,\partial\Omega)}{2}$ und somit für alle $R \leq \frac{\operatorname{dist}(x_0,\partial\Omega)}{2}$, da $\|\, \nabla u\,\|_{L^2(\Omega)} < \infty$. Wie im Beweis von Theorem 4.1 zeigt dies, dass Φ eine auf $(0, \operatorname{dist}(x_0, \partial\Omega)]$ wohldefinierte, monoton nicht-fallende Funktion ist, die allen Voraussetzungen von Lemma 2.4, (ii), für $\sigma := 2$ und $R_0 := \frac{\operatorname{dist}(x_0,\partial\Omega)}{2}$ genügt. Somit folgt aus diesem Lemma:

$$\Phi(R) \leq \frac{1}{\Theta^*}\,(\Phi(R_0) + R_0^{2-\epsilon}) \Big(\frac{R}{R_0}\Big)^\gamma \quad \text{für } 0 < R \leq R_0,$$

für ein geeignetes $\epsilon \in (0,1)$, ein $\Theta^* = \Theta^*(\lambda,\mu,n,b,a,\|\, u\,\|_{L^\infty(\Omega)}) \in (0,1)$ und $\gamma = \log_2(1/\Theta^*)$. Wegen $R^{2-n} \int_{B_R(x_0)} |\nabla u|^2\, d\mathcal{L}^n \leq \Phi(R)$ folgt:

$$R^{2-n} \int_{B_R(x_0)} |\nabla u|^2\, d\mathcal{L}^n \leq K(\lambda,\mu,n,b,a,\|\, u\,\|_{L^\infty(\Omega)}, \operatorname{dist}(x_0,\partial\Omega))\, R^{2\alpha},$$

für alle $R \leq \frac{\operatorname{dist}(x_0,\partial\Omega)}{2}$, mit $\alpha = \frac{1}{2}\,\log_2(1/\Theta^*) \in (0,1)$. Da x_0 beliebig in Ω gewählt wurde, folgt aus Morrey's Growth-Theorem, Theorem 2.1: $u \in C^{0,\alpha}_{loc}(\Omega)$, für dieses $\alpha \in (0,1)$, welches – wie Θ^* – nur von λ, μ, n, b, a und $\| u \|_{L^\infty(\Omega)}$ abhängt. Schliesslich folgt aus der letzten Abschätzung und aus Morrey's Growth-Theorem, dass

$$\begin{aligned} |u(x) - u(y)| &\le C(n, \alpha, \Omega, \epsilon) \sqrt{K(\lambda, \mu, n, b, a, \| u \|_{L^\infty(\Omega)}, \epsilon)}\, |x - y|^\alpha \\ &= \tilde{K}(\lambda, \mu, n, b, a, \| u \|_{L^\infty(\Omega)}, \Omega, \epsilon)\, |x - y|^\alpha \qquad \forall x, y \in \Omega_\epsilon \end{aligned}$$

gilt.

///

5 Höhere lokale $W^{1,p}$- und Hölder-Regularität schwacher Lösungen elliptischer Systeme mittels der "Umgekehrten Hölderungleichung"

Wir beweisen in diesem Kapitel die ,,Umgekehrte Hölder-Ungleichung", um höhere lokale $W^{1,p}$- und Hölder-Regularität schwacher Lösungen $u \in W^{1,2}(\Omega, \mathbb{R}^N)$ $[N \ge 1]$ homogener elliptischer Systeme der Form

$$-D_\beta(A_{ik}^{\alpha\beta}(\,\cdot\,, u(\,\cdot\,))\, D_\alpha u^i(\,\cdot\,)) = 0 \tag{5.81}$$

auf einer offenen, beschränkten Teilmenge Ω des $\mathbb{R}^n$ zu beweisen. u erfülle also die Integralgleichung

$$\int_\Omega A_{ik}^{\alpha\beta}(x, u(x))\, D_\alpha u^i(x)\, D_\beta \phi^k(x)\, d\mathcal{L}^n(x) = 0 \tag{5.82}$$

für alle $\phi \in W_0^{1,2}(\Omega, \mathbb{R}^N)$ auf einer offenen, beschränkten Teilmenge Ω eines $\mathbb{R}^n$, $n \ge 2$. Um den Wunsch nach einer bzw. den Begriff der ,,Umgekehrten Hölder-Ungleichung" zu motivieren, betrachten wir eine Lösung $u \in W^{1,2}(\Omega, \mathbb{R}^N)$, wählen einen Ball $B_{2R}(x_0) \subset\subset \Omega$ und ein $\eta \in C_c^\infty(B_{2R}(x_0))$ mit $\eta \equiv 1$ auf $\overline{B_R(x_0)}$ (und $\eta \equiv 0$ auf $\mathbb{R}^n \setminus B_{2R}(x_0)$), setzen wie im vorherigen Kapitel $\bar{u}_R := \overline{u_{T_{2R}(x_0)}}$ und testen (5.82) mittels der Testfunktion $\phi := \eta^2 (u - \bar{u}_R)$. Wir erhalten mit $a_{ik}^{\alpha\beta}(x) := A_{ik}^{\alpha\beta}(x, u(x))$:

$$\int_{B_{2R}(x_0)} a_{ik}^{\alpha\beta}\, D_\alpha u^i\, D_\beta u^k\, \eta^2\, d\mathcal{L}^n = -2 \int_{T_{2R}(x_0)} a_{ik}^{\alpha\beta}\, \eta\, D_\beta \eta\, D_\alpha u^i\, (u^k - \bar{u}_R^k)\, d\mathcal{L}^n.$$

Mittels der Elliptizität und Beschränktheit der Koeffizienten $a_{ik}^{\alpha\beta}$ und mittels ,,Cauchy-Schwarz" erhalten wir hieraus:

$$\lambda \int_{B_{2R}(x_0)} |Du|^2\, \eta^2\, d\mathcal{L}^n \le \frac{\lambda}{2} \int_{T_{2R}(x_0)} |Du|^2\, \eta^2\, d\mathcal{L}^n + \frac{C(\mu, \lambda)}{R^2} \int_{T_{2R}(x_0)} |u - \bar{u}_R|^2\, d\mathcal{L}^n.$$

Absorption und die Sobolev-Poincare-Ungleichung (5.107) aus Satz 5.4 unten (hier mit p*=2 und somit $p = \frac{2n}{n+2}$) liefern bei Beachtung von $\eta \equiv 1$ auf $\overline{B_R(x_0)}$:

$$\int_{B_R(x_0)} |Du|^2\, d\mathcal{L}^n \le \frac{C(\mu, \lambda, n, N)}{R^2} \Big(\int_{B_{2R}(x_0)} |Du|^{\frac{2n}{n+2}}\, d\mathcal{L}^n \Big)^{\frac{n+2}{n}}.$$

Hieraus folgt sofort:

$$\frac{1}{\mathcal{L}^n(B_R(x_0))}\int_{B_R(x_0)}|Du|^2\,d\mathcal{L}^n \le C(\mu,\lambda,n,N)\,R^{-2-n}\Big(\int_{B_{2R}(x_0)}|Du|^{\frac{2n}{n+2}}\,d\mathcal{L}^n\Big)^{\frac{n+2}{n}} \tag{5.83}$$
$$= C(\mu,\lambda,n,N)\Big(\frac{1}{\mathcal{L}^n(B_{2R}(x_0))}\int_{B_{2R}(x_0)}|Du|^{\frac{2n}{n+2}}\,d\mathcal{L}^n\Big)^{\frac{n+2}{n}}.$$

Wir erhalten also eine Ungleichung für Mittelwerte verschiedener Potenzen von $|Du|$ [auf Bällen mit verschiedenen Radien], wobei besonders bemerkenswert und erstaunlich ist, dass der Exponent auf der linken Seite ($= 2$) grösser als der Exponent auf der rechten Seite ($= \frac{2n}{n+2}$) ist, sodass $|Du|$ bzw. deren Potenz $|Du|^{\frac{2n}{n+2}}$ eine Art ,,Umgekehrter Hölder-Ungleichung" auf jedem Ball $B_{2R}(x_0) \subset\subset \Omega$ erfüllt. Diese Eigenschaft von $|Du|$ führt in der Tat zu $u \in W^{1,p}_{loc}(\Omega,\mathbb{R}^N)$ für ein $p > 2$, wie der folgende allgemeine Satz der Analysis zeigt (siehe Proposition 1.1 in [Giaq], Kapitel 5):

Theorem 5.1 *[Umgekehrte Hölderungleichung] Sei $\tilde{Q}$ ein n-dimensionaler offener Würfel im $\mathbb{R}^n$, $n \ge 2$, g eine nicht-negative Funktion der Klasse $L^q(\tilde{Q})$, $q > 1$, welche eine Ungleichung der Form*

$$\frac{1}{\mathcal{L}^n(B_R(x_0))}\int_{B_R(x_0)} g^q\,d\mathcal{L}^n \le b\Big(\frac{1}{\mathcal{L}^n(B_{2R}(x_0))}\int_{B_{2R}(x_0)} g\,d\mathcal{L}^n\Big)^q \tag{5.84}$$

für alle Bälle $B_{2R}(x_0) \subset\subset \tilde{Q}$ und für ein $b \ge 1$ erfüllt. Dann existiert ein $\epsilon = \epsilon(n,q,b) > 0$, sodass $g \in L^p_{loc}(\tilde{Q})$ für alle $p \in [q, q+\epsilon)$ ist, und ausserdem gilt die Abschätzung

$$\Big(\frac{1}{\mathcal{L}^n(B_R(x_0))}\int_{B_R(x_0)} g^p\,d\mathcal{L}^n\Big)^{1/p} \le K\Big(\frac{1}{\mathcal{L}^n(\tilde{Q})}\int_{\tilde{Q}} g^q\,d\mathcal{L}^n\Big)^{1/q} \tag{5.85}$$

für alle Bälle $B_R(x_0) \subset\subset \tilde{Q}$, wobei die hierbei auftretende Konstante K von p, n, q, b, R und $dist(B_R(x_0), \partial\tilde{Q})$ abhängt.

Denn, kombinieren wir dieses Theorem mit (5.83), indem wir $g := |Du|^{\frac{2n}{n+2}}$ und $q := \frac{n+2}{n} > 1$ auf kleinen Würfeln $\tilde{Q} \subset\subset \Omega$ wählen, so erhalten wir das folgende

Korollar 5.2 *Eine schwache Lösung $u \in W^{1,2}(\Omega,\mathbb{R}^N)$ [$N \ge 1$] eines homogenen elliptischen Systems der Form*

$$-D_\beta(A^{\alpha\beta}_{ik}(\,\cdot\,,u(\,\cdot\,))\,D_\alpha u^i(\,\cdot\,)) = 0 \tag{5.86}$$

auf einer offenen, beschränkten Teilmenge Ω des $\mathbb{R}^n$, $n \ge 2$, ist von der Klasse $W^{1,p}_{loc}(\Omega,\mathbb{R}^N)$ für ein $p > 2$. Insbesondere im Spezialfall $n \equiv dim(\Omega) = 2$ ist jede solche Lösung von der Klasse $C^{0,\alpha}_{loc}(\Omega,\mathbb{R}^N)$, für $\alpha = 1 - \frac{2}{p}$.

Wir werden im unten folgenden Theorem 5.3 ein etwas stärkeres Resultat als Theorem 5.1 auf dem Einheitswürfel Q beweisen (siehe Theorem 1.2 in [Giaq], Kapitel 5). Wir benötigen hierzu

Definition 5.1 *Für $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$, $n \geq 1$, mit $f \geq 0$ definieren wir mit*

$$M(f)(x) := \sup_{R>0} \frac{1}{\mid B_R(x) \mid} \int_{B_R(x)} f \qquad \text{und} \tag{5.87}$$

$$M_{R_0}(f)(x) := \sup_{0<R<R_0} \frac{1}{\mid B_R(x) \mid} \int_{B_R(x)} f \qquad \text{für} \quad R_0 > 0 \tag{5.88}$$

die globale bzw. lokale Maximalfunktion von f.

Desweiteren definieren wir $Q_R(y_0) := \{x \in \mathbb{R}^n \mid\mid x_i - y_{0i} \mid< R,\ i = 1, \ldots, n\} \equiv y_0 + [-R, R]^n$, $\mid Q_R(y_0) \mid := \mathcal{L}^n(Q_R(y_0)) \equiv (2R)^n$, $Q := Q_1(0)$, und verwenden die Abkürzung $R(x) := R_0(x)$ im Spezialfall $\Omega = Q = Q_1(0)$, wobei wir die Notation $R_0(x) := \operatorname{dist}(x, \partial\Omega)$ für $x \in \Omega$ aus Definition 2.1, hier speziell für $\Omega := Q$, benutzten.

Theorem 5.3 *Sei $g \in L^q(Q)$, $q > 1$, $g \geq 0$ in Q, und für $\mathcal{L}^n$−f.a. x aus Q gelte*

$$M_{\frac{1}{2}R(x)}(g^q)(x) \leq b\,(M(g)(x))^q \tag{5.89}$$

für ein $b \geq 1$, so liegt g bereits in $L^p_{loc}(Q)$ $\forall\, p \in [q, q+\epsilon)$, für ein $\epsilon = \epsilon(n, q, b) > 0$, und es gilt die Abschätzung

$$\Big(\frac{1}{\mathcal{L}^n(Q^*)} \int_{Q^*} g^p \, d\mathcal{L}^n\Big)^{1/p} \leq K \Big(\frac{1}{\mid Q \mid} \int_Q g^q \, d\mathcal{L}^n\Big)^{1/q} \tag{5.90}$$

für alle $\mathcal{L}^n$-messbaren Teilmengen $Q^* \subset\subset Q$, wobei die Konstante K nur von $p, n,\ q,\ b, \mathcal{L}^n(Q^*)$ und dist$(Q^*, \partial Q)$ abhängt.

In (5.89) und auch im Folgenden sei $g \equiv 0$ auf $\mathbb{R}^n \setminus Q$ fortgesetzt.

5.1 Vorbereitende Lemmata für den Beweis von Theorem 5.3

Im Hinblick auf die folgenden Lemmata 5.1 und 5.2 sei hier zur Definition und den Eigenschaften des Riemann-Stieltjes-Integrals auf die Paragraphen 6 in Kapitel VIII und 7 in Kapitel IX aus [Natan] und auf Kapitel 6 in [Walter] verwiesen.

Lemma 5.1 *[Gehring-Lemma] Seien $\beta \in (0, \infty)$ und $a \in (1, \infty)$, $h : [1, \infty) \longrightarrow [0, \infty)$ eine schwach monoton fallende Funktion mit $\lim_{t\to\infty} h(t) = 0$ und*

$$\int_t^\infty -s^\beta \, dh(s) \leq a\, t^\beta h(t) \qquad \forall\ t \in [1, \infty). \tag{5.91}$$

Dann gilt für alle $\alpha \in [\beta, \beta + \epsilon)$, mit $\epsilon := \frac{\beta}{a-1} > 0$:

$$\int_1^\infty -t^\alpha \, dh(t) \leq C \int_1^\infty -t^\beta \, dh(t), \tag{5.92}$$

wobei $C := \frac{\beta}{a\beta - (a-1)\alpha}$.

Beweis:
Wir setzen $h_j := \chi_{[1,j)}h$ für ein beliebiges $j \in (1,\infty)$. Aus der Monotonie von h_j folgt $h_j \in \mathrm{BV}([1,j]) \subset L^1([1,j])$, sodass wir mittels partieller Integration und Transformation des resultierenden Riemann-Stieltjes-Integrals in ein gewöhnliches Lebesgue-Integral

$$\int_t^j -s^\beta \, dh_j(s) \overset{P.I.}{=} \int_t^j h_j(s)\, ds^\beta - [s^\beta h_j(s)]_t^j \overset{T.F.}{=} \int_t^j h_j(s)\,\beta\, s^{\beta-1}\, ds + t^\beta h_j(t)$$

$\forall\, t \in [1,j)$ erhalten. Für ein beliebiges $\alpha > \beta$ erhalten wir hieraus:

$$\int_1^j t^{\alpha-\beta-1} \int_t^j -s^\beta \, dh_j(s)\, dt = \int_1^j t^{\alpha-\beta-1} \int_t^j h_j(s)\,\beta\, s^{\beta-1}\, ds\, dt + \int_1^j t^{\alpha-1}\, h_j(t)\, dt$$
$$=: A + B, \quad (5.93)$$

und mittels partieller Integration ergibt sich:

$$\begin{aligned} A &\overset{P.I.}{=} \Big[\frac{t^{\alpha-\beta}}{\alpha-\beta} \int_t^j h_j(s)\,\beta\, s^{\beta-1}\, ds\Big]_1^j - \int_1^j \frac{t^{\alpha-\beta}}{\alpha-\beta}(-h_j(t)\,\beta\, t^{\beta-1})\, dt \\ &= -\frac{1}{\alpha-\beta} \int_1^j h_j(s)\,\beta\, s^{\beta-1}\, ds + \frac{\beta}{\alpha-\beta} \int_1^j t^{\alpha-1}\, h_j(t)\, dt. \end{aligned} \quad (5.94)$$

Multiplizieren wir also (5.93) mit $\alpha - \beta$, so erhalten wir zusammen mit (5.94), anschliessender Rücktransformation in ein Riemann-Stieltjes-Integral und partieller Integration:

$$\begin{aligned} (\alpha-\beta) \int_1^j t^{\alpha-\beta-1} \int_t^j -s^\beta \, dh_j(s)\, dt &= -\int_1^j h_j(s)\,\beta s^{\beta-1}\, ds + \alpha \int_1^j t^{\alpha-1}\, h_j(t)\, dt \\ &= \int_1^j s^\beta \, dh_j(s) - [s^\beta\, h_j(s)]_1^j - \int_1^j s^\alpha \, dh_j(s) + [s^\alpha\, h_j(s)]_1^j =: I_j(\alpha) - I_j(\beta). \end{aligned} \quad (5.95)$$

Nun folgt aus den Voraussetzungen $h \searrow 0$ und (5.91):

$$\int_t^j -s^\beta \, dh_j(s) \leq \int_t^\infty -s^\beta \, dh(s) \qquad \forall\ t \in [1,j), \quad (5.96)$$

denn: da $-h$ nichtfallend ist, ergibt sich aus dem Mittelwertsatz für Stieltjes-Integrale:

$$\int_j^N s^\beta \, d(-h)(s) \geq \inf_{[j,N]} s^\beta\, ((-h)(N) - (-h(j))) = j^\beta\, ((h)(j) - h(N)).$$

Wegen Voraussetzung (5.91) und dem Satz der monotonen Folge, in Kombination mit der Voraussetzung $h \searrow 0$ erhalten wir hieraus für $N \to \infty$:

$$j^\beta h(j) \leq \int_j^\infty -s^\beta \, dh(s). \quad (5.97)$$

Desweiteren ergibt sich für ein beliebiges $t \in [1,j)$:

$$\int_t^j -s^\beta \, dh_j(s) = \int_t^j h_j(s)\,\beta\, s^{\beta-1}\, ds - [s^\beta\, h_j(s)]_t^j = \int_t^j h(s)\,\beta\, s^{\beta-1}\, ds + t^\beta\, h(t), \quad (5.98)$$

wobei ausgenutzt wurde, dass h_j und h ausser im Punkt j auf $[1, j]$ übereinstimmen und $h_j(j) = 0$ gilt. Transformieren wir in (5.98) zurück, so erhalten wir aus (5.97) in der Tat die Behauptung (5.96):

$$\int_t^j -s^\beta\, dh_j(s) = \int_t^j -s^\beta\, dh(s) + [s^\beta h(s)]_t^j + t^\beta\, h(t) \leq \int_t^j -s^\beta\, dh(s) + \int_j^\infty -s^\beta\, dh(s)$$
$$= \int_t^\infty -s^\beta\, dh(s).$$

Somit gewinnen wir zusammen mit Voraussetzung (5.91):

$$\int_t^j -s^\beta\, dh_j(s) \leq a\, t^\beta\, h(t) = a\, t^\beta\, h_j(t) \qquad \forall\, t \in [1, j). \tag{5.99}$$

Multiplikation mit $t^{\alpha-\beta-1}$ und Integration ergibt:

$$\begin{aligned} \int_1^j t^{\alpha-\beta-1} \int_t^j -s^\beta\, dh_j(s)\, dt &\leq a \int_1^j t^{\alpha-1}\, h_j(t)\, dt \\ &\overset{T.F.}{=} \frac{a}{\alpha} \int_1^j h_j(t)\, dt^\alpha \overset{P.I.}{=} -\frac{a}{\alpha} \int_1^j t^\alpha\, dh_j(t) + \left[\frac{a}{\alpha}\, h_j(t)\, t^\alpha\right]_1^j \\ &= \frac{a}{\alpha}\, I_j(\alpha) - \frac{a}{\alpha}\, h_j(1) \overset{(5.99)}{\leq} \frac{a}{\alpha}\, I_j(\alpha) - \frac{1}{\alpha}\, I_j(\beta). \end{aligned}$$

Zusammen mit (5.95) schliessen wir also:

$$\frac{I_j(\alpha) - I_j(\beta)}{\alpha - \beta} \leq \frac{a}{\alpha}\, I_j(\alpha) - \frac{1}{\alpha}\, I_j(\beta)$$
$$\iff I_j(\alpha) \leq \frac{\beta}{a\beta - (a-1)\alpha}\, I_j(\beta), \tag{5.100}$$

$\forall\, \alpha \in (\beta, \frac{a}{a-1}\beta) = (\beta, \beta + \frac{1}{a-1}\beta)$. Wegen (5.98) (für $t = 1$) ist $\{I_j(\beta)\}_{j\in\mathbb{N}}$ eine monoton wachsende Folge, welche nach (5.96) und (5.91) durch $I(\beta) := \int_1^\infty -s^\beta\, dh(s) \leq a\, h(1)$ nach oben beschränkt ist. Desweiteren folgt aus dem Mittelwertsatz für Riemann-Stieltjes-Integrale, $\forall\, N \in [1, j)$:

$$\int_N^j t^\beta\, d(-h_j(t)) \geq \inf_{[N,j]} t^\beta\, (-h_j(j) - (-h_j(N))) = N^\beta\, h(N) \geq 0$$

und somit:

$$\int_1^N -t^\beta\, dh(t) = \int_1^N -t^\beta\, dh_j(t) \leq \int_1^N -t^\beta\, dh_j(t) + \int_N^j -t^\beta\, dh_j(t) = I_j(\beta) \leq I(\beta)$$

$\forall\, N \in [1, j)$. Für $j \to \infty$ und $N := j - 1$ liefert also der Satz der monotonen Folge:

$$I(\beta) = \int_1^\infty -t^\beta\, dh(t) \leq \lim_{j\to\infty} I_j(\beta) \leq I(\beta) \tag{5.101}$$

und somit $I_j(\beta) \longrightarrow I(\beta)$. Ausserdem sehen wir zusammen mit (5.100):

$$\int_1^{j-1} -t^\alpha\, dh(t) \leq I_j(\alpha) \leq C\, I_j(\beta) \qquad \forall\, j \geq 2,$$

mit $C := \frac{\beta}{a\beta-(a-1)\alpha}$, sodass wir erneut aus dem Satz der monotonen Folge und der aus (5.101) gewonnenen Konvergenz schliesslich $I(\alpha) \leq C\, I(\beta)$ erhalten, $\forall\, \alpha \in (\beta, \beta+\epsilon)$ mit $\epsilon := \frac{1}{a-1}\beta > 0$. Für $\alpha = \beta$ ist die behauptete Ungleichung trivialerweise erfüllt.

///

Lemma 5.2 *Sei Ω eine $\mathcal{L}^n$-messbare, beschränkte Teilmenge des $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, und u eine nichtnegative Funktion der Klasse $L^1(\Omega, \mathcal{L}^n)$. Bezeichne weiterhin $\Omega(t) := \{x \in \Omega \mid u(x) > t\}$ und $h(t) := \int_{\Omega(t)} u\, d\mathcal{L}^n$ für $t \in [0, \infty)$, so gilt für alle $r \in [1, \infty)$:*

$$\int_{\Omega(t)\backslash\Omega(t^*)} u^r\, d\mathcal{L}^n = \int_t^{t^*} -s^{r-1}\, dh(s) \qquad \text{für } t < t^*. \tag{5.102}$$

Beweis:
Wir wählen eine Zerlegung $Z:\ t = t_0 < \ldots < t_N = t^*$ von $[t, t^*]$. Da u und damit u^r $\mathcal{L}^n$-messbare und nicht-negative Funktionen sind, existieren die Integrale $\int_{\Omega(t_{j-1})\backslash\Omega(t_j)} u^r\, d\mathcal{L}^n$ und haben alle einen durch $\mathcal{L}^n(\Omega)\,(t^*)^r$ beschränkten Wert. Insbesondere existiert (z.B. anhand des Satzes über monotone Konvergenz) eine Zerlegung der Form

$$\int_{\Omega(t)\backslash\Omega(t^*)} u^r\, d\mathcal{L}^n = \sum_{j=1}^{N} \int_{\Omega(t_{j-1})\backslash\Omega(t_j)} u^r\, d\mathcal{L}^n. \tag{5.103}$$

Weiterhin können wir abschätzen:

$$t_{j-1}^{r-1} \int_{\Omega(t_{j-1})\backslash\Omega(t_j)} u\, d\mathcal{L}^n \leq \int_{\Omega(t_{j-1})\backslash\Omega(t_j)} u^r\, d\mathcal{L}^n \leq t_j^{r-1} \int_{\Omega(t_{j-1})\backslash\Omega(t_j)} u\, d\mathcal{L}^n.$$

Setzt man dies in (5.103) ein, so folgt mit $h(t) := \int_{\Omega(t)} u\, d\mathcal{L}^n$:

$$\sum_{j=1}^{N} t_{j-1}^{r-1}\,(h(t_{j-1}) - h(t_j)) \leq \int_{\Omega(t)\backslash\Omega(t^*)} u^r\, d\mathcal{L}^n \leq \sum_{j=1}^{N} t_j^{r-1}\,(h(t_{j-1}) - h(t_j)). \tag{5.104}$$

Nun fallen das linke bzw. rechte Glied der obigen Ungleichung gerade mit der Riemann-Stieltjes-Untersumme $\underline{S}(s^{r-1}, -h, \mathcal{Z})$ bzw. Riemann-Stieltjes-Obersumme $\overline{S}(s^{r-1}, -h, \mathcal{Z})$ der nichtfallenden Funktionen $s \mapsto s^{r-1}$ und $-h$ zusammen. Da h insbesondere in $BV([t, t^*])$ liegt, existiert das entsprechende Riemann-Stieltjes-Integral auf $[t, t^*]$, sodass

$$\underline{S}(s^{r-1}, -h, Z) \nearrow \int_t^{t^*} s^{r-1} d(-h)(s) \swarrow \overline{S}(s^{r-1}, -h, Z)$$

für $\triangle(Z) := \max_{j=1,\ldots,N}(t_j - t_{j-1}) \to 0$ gilt. Zusammen mit (5.104) folgt also die Behauptung.

///

Lemma 5.3 *[Vitali-Überdeckungssatz] Sei Ω eine beliebige Teilmenge des $\mathbb{R}^n$, die von einer Familie offener Kugeln $\{B_j\}_{j\in J}$ mit $\sup_{j\in J} diam(B_j) < \infty$ überdeckt werde. Dann kann man aus dieser eine abzählbare Teilfamilie disjunkter Bälle $\{K_l\}_{l\in\mathbb{N}}$ auswählen, sodass die Bälle $\hat{K}_l$ mit gleichem Zentrum wie K_l, jedoch fünf-fachem Radius der K_l, bereits Ω überdecken, d.h. es gilt $\Omega \subset \bigcup_{l\in\mathbb{N}} \hat{K}_l$ und insbesondere:*

$$\mathcal{L}^n(\Omega) \leq 5^n \sum_{l\in\mathbb{N}} \mathcal{L}^n(K_l).$$

Beweis:
Siehe [Stein], S.9.

///

Hiermit lässt sich folgendes Resultat über Maximalfunktionen beweisen, welches insbesondere die Vernünftigkeit der Bedingung (5.89) garantiert (man sehe hierzu auch Aufgabe 12).

Lemma 5.4 *Für $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $f \geq 0$, gilt*

$$t\,\mathcal{L}^n(M(f) > t) \leq 5^n \parallel f \parallel_{L^1(\mathbb{R}^n)}$$

für alle $t > 0$. Insbesondere ist die Maximalfunktion einer $L^1(\mathbb{R}^n)-$Funktion in $\mathcal{L}^n-$ f.a. Punkten des $\mathbb{R}^n$ endlich.

Beweis:
Siehe [Stein], S.5.

///

Schliesslich geben wir die folgende "Calderon-Zygmund-Zerlegung" für $L^1(\mathbb{R}^n)$-Funktionen auf dem Einheitswürfel Q und die Sobolev-Poincare-Ungleichung an:

Lemma 5.5 *[Calderon-Zygmund-Zerlegung] Sei $f \in L^1(Q)$, $f \geq 0$ und $\overline{f_Q} \leq \lambda$, für ein $\lambda \geq 0$. Dann gibt es eine abzählbare (eventuell leere) Familie disjunkter, offener Würfel $W_j \subset Q$ mit*

$$\lambda < \overline{f_{W_j}} \leq 4^n\lambda \qquad \text{und mit} \quad f(x) \leq \lambda \qquad \textit{für } \mathcal{L}^n\textit{-f.a. } x \in Q \setminus \overset{\circ}{\bigcup_{j\in\mathbb{N}}} W_j. \tag{5.105}$$

Beweis: Wir zerlegen Q in 4^n (achsenparallele) Würfel mit Kantenlänge $\frac{1}{2}$ und wählen diejenigen aus, für die $\overline{f_W} > \lambda$ erfüllt ist. Wir zerlegen die übrigen Würfel in je 2^n (achsenparallele) Würfel mit Kantenlänge $\frac{1}{4}$ und wählen erneut diejenigen aus, für die $\overline{f_W} > \lambda$ gilt, usw.... Wir erhalten somit eine abzählbare (eventuell leere) Familie disjunkter, offener Würfel $\{W_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ mit $\overline{f_{W_j}} > \lambda$. Ist nun V_j derjenige Würfel, aus dem ein W_j ausgewählt wurde, so sehen wir:

$$\overline{f_{W_j}} = \frac{\mid V_j \mid}{\mid W_j \mid}\frac{\mid 1 \mid}{\mid V_j \mid}\int_{W_j} f \leq 4^n \bar{f}_{V_j} \leq 4^n\lambda.$$

Schliesslich ist jedes $x \in Q \setminus \bigcup_{j\in\mathbb{N}} W_j$ der "Limes-Punkt" einer Würfelschachtelung $\{V_j\}_{j\in\mathbb{N}}$, d.h. $\{x\} = \bigcap_{j\in\mathbb{N}} V_j$, mit $\overline{f_{V_j}} \leq \lambda$ für alle $j \in \mathbb{N}$, sodass wir $\overline{f_{V_j}} \longrightarrow f(x) \leq \lambda$ für $\mathcal{L}^n-$ f.a. $x \in Q \setminus \bigcup_{j\in\mathbb{N}} W_j$ erhalten (siehe hierzu Aufgabe 12).

///

Theorem 5.4 *[Sobolev-Poincare-Ungleichungen]* *(i) Für jedes $p \in [1, \infty)$ und $n \geq 2$ gilt mit der Konstanten $C(n,p) = \frac{2^{n+p}n}{n+p-1}$ die „skalierte Poincare-Ungleichung"*

$$\int_{B^n_R(x)} |f - \bar{f}_{x,R}|^p \, d\mathcal{L}^n \leq C(n,p)\, R^p \int_{B^n_R(x)} |\nabla f|^p \, d\mathcal{L}^n \tag{5.106}$$

für jede Funktion $f \in W^{1,p}(B^n_R(x))$.

(ii) Desweiteren existiert für jedes $p \in [1, n)$ und $n \geq 2$ eine Konstante $C = C(n,p)$, sodass

$$\Big(\frac{1}{\mathcal{L}^n(B^n_R(x))} \int_{B^n_R(x)} |f - \bar{f}_{x,R}|^{p^*} \, d\mathcal{L}^n\Big)^{1/p^*} \leq C(n,p)\, R \Big(\frac{1}{\mathcal{L}^n(B^n_R(x))} \int_{B^n_R(x)} |\nabla f|^p \, d\mathcal{L}^n\Big)^{1/p} \tag{5.107}$$

für jede Funktion $f \in W^{1,p}(B_R(x))$ gilt, wobei hier $p^* = \frac{np}{n-p}$ gesetzt sei (man beachte hierbei die Notation aus Definition 2.1).

Beweis: Wir nehmen OBDA $f \in C^1(\overline{B_R(x)})$ an. Denn falls wir beide behauptete Ungleichungen bereits für $f \in C^1(\overline{B_R(x)})$ bewiesen hätten, so könnten wir eine vorgelegte Funktion $f \in W^{1,p}(B_R(0))$ mittels einer Folge $\{f_i\} \subset C^1(\overline{B_R(x)})$ in $W^{1,p}(B_R(x))$ approximieren und erhielten sofort beide behauptete Ungleichungen anhand des Lemmas von Fatou. Für $f \in C^1(\overline{B_R(x)})$ rechnen wir mit der Jensen-Ungleichung, der unten folgenden Proposition 5.6 und dem Satz von Fubini zunächst:

$$\begin{aligned}
&\int_{B_R(x)} |f(y) - \bar{f}_{x,R}|^p \, d\mathcal{L}^n(y) \\
&= \int_{B_R(x)} \Big|\frac{1}{\mathcal{L}^n(B_R(x))} \int_{B_R(x)} f(y) - f(z) \, d\mathcal{L}^n(z)\Big|^p \, d\mathcal{L}^n(y) \\
&\leq \int_{B_R(x)} \frac{1}{\mathcal{L}^n(B_R(x))} \int_{B_R(x)} |f(y) - f(z)|^p \, d\mathcal{L}^n(z) \, d\mathcal{L}^n(y) \\
&\leq C(n,p) \frac{1}{\mathcal{L}^n(B_R(x))} \int_{B_R(x)} R^{n+p-1} \int_{B_R(x)} |\nabla f(z)|^p \, |y - z|^{1-n} \, d\mathcal{L}^n(z) \, d\mathcal{L}^n(y) \\
&= C(n,p) \frac{1}{\mathcal{L}^n(B_R(x))} R^{n+p-1} \int_{B_R(x)} |\nabla f(z)|^p \Big(\int_{B_R(x)} |y - z|^{1-n} \, d\mathcal{L}^n(y)\Big) \, d\mathcal{L}^n(z) \\
&= \tilde{C}(n,p)\, R^{p-1} \int_{B_R(x)} |\nabla f(z)|^p \Big(\int_{B_R(x)} |y - z|^{1-n} \, d\mathcal{L}^n(y)\Big) \, d\mathcal{L}^n(z).
\end{aligned}$$

Wegen $B_R(x) \subset B_{2R}(z)$, $\forall\, z \in B_R(x)$, können wir das innere hierin auftretende Integral durch

$$\int_{B_{2R}(z)} |y - z|^{1-n} \, d\mathcal{L}^n(y) = \int_0^{2R} \int_{\partial B_r(z)} r^{1-n} \, d\mathcal{H}^{n-1} \, dr = n\, \omega_n \int_0^{2R} 1 \, dr = 2R\, n\, \omega_n$$

abschätzen. Insgesamt folgt somit die behauptete „skalierte" Poincare-Ungleichung (5.106), und genauere Inspektion zeigt anhand der explizit angegebenen Konstanten in Proposition 5.6 die in (5.106) behauptete Konstante $\frac{2^{n+p}n}{n+p-1}$.
Für jede Funktion $g \in W^{1,p}(B_R(x))$ lässt sich mittels Einführung der skalierten Funktion

$G(\tilde y) := \frac{1}{R}\, g(R\,\tilde y + x)$, $\tilde y \in B_1(0)$, und deren Fortsetzung zu einer $W_0^{1,p}(\mathbb{R}^n)-$Funktion aus dem Sobolevschen Einbettungssatz wegen $1 - \frac{n}{p} = -\frac{n}{p^*}$ leicht die Ungleichung

$$\Big(\frac{1}{\mathcal{L}^n(B_R(x))} \int_{B_R(x)} |g(y)|^{p*}\, d\mathcal{L}^n(y)\Big)^{1/p*}$$
$$\leq C(n,p)\Big(R^p\,\frac{1}{\mathcal{L}^n(B_R(x))}\int_{B_R(x)} |\nabla g(y)|^p\, d\mathcal{L}^n(y) + \frac{1}{\mathcal{L}^n(B_R(x))}\int_{B_R(x)} |g(y)|^p\, d\mathcal{L}^n(y)\Big)^{1/p}$$

beweisen. Wenden wir diese Ungleichung auf die $W^{1,p}(B_R(x))-$Funktion $g := f - \bar f_{x,R}$ an, so erhalten wir in Kombination mit (5.106):

$$\Big(\frac{1}{\mathcal{L}^n(B_R(x))} \int_{B_R(x)} |f(y) - \bar f_{x,R}|^{p*}\, d\mathcal{L}^n(y)\Big)^{1/p*}$$
$$\leq C(n,p)\Big(R^p\,\frac{1}{\mathcal{L}^n(B_R(x))}\int_{B_R(x)} |\nabla f(y)|^p\, d\mathcal{L}^n(y) + \frac{1}{\mathcal{L}^n(B_R(x))}\int_{B_R(x)} |f(y) - \bar f_{x,R}|^p\, d\mathcal{L}^n(y)\Big)^{1/p}$$
$$\leq \tilde C(n,p)\Big(2\,R^p\,\frac{1}{\mathcal{L}^n(B_R(x))}\int_{B_R(x)} |\nabla f(y)|^p\, d\mathcal{L}^n(y)\Big)^{1/p}$$

und somit die behauptete Sobolev-Poincare-Ungleichung (5.107) des Satzes.

///

Im obigen Beweis benutzten wir die folgende klassische Integral-Abschätzung, die man mittels des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung und der ,,Zwiebel-Integral-Formel" beweist:

Proposition 5.6 *Für jedes $p \in [1,\infty)$ und $n \geq 2$ gilt mit der Konstanten $C(n,p) = \frac{2^{n+p-1}}{n+p-1}$ die Abschätzung*

$$\int_{B^n_R(x)} |f(y) - f(z)|^p\, d\mathcal{L}^n(z) \leq C(n,p)\, R^{n+p-1} \int_{B^n_R(x)} |\nabla f(z)|^p\, |y - z|^{1-n}\, d\mathcal{L}^n(z)$$

für ein beliebig gewähltes $y \in B^n_R(x)$ und für jede Funktion $f \in C^1(B_R(x))$.

5.2 Beweis von Theorem 5.3

Es sei OBDA $\overline{g_Q} > 0$. Wir wählen ein $l > 4\sqrt{n}$ und setzen $\alpha_k := l^{\frac{n}{q}}\, 2^{n(k+2)}$ für $k \in \mathbb{N}_0$. Wir sehen $\alpha_0 > 4^{\frac{n}{q}} n^{\frac{n}{2q}} 2^{2n} > 1$ und dass die Folge $\{\alpha_k\}$ (exponentiell schnell) monoton wächst. Wir definieren $G := \frac{g}{((g^q)_Q)^{\frac{1}{q}}}$ und $\Gamma(x) := \frac{G(x)}{\alpha_k}$ für x aus dem ,,Rahmen"

$$C_k := \{x \in Q \mid \frac{1}{2^{k+1}} < R(x) \leq \frac{1}{2^k}\} \qquad k \in \mathbb{N}_0. \tag{5.108}$$

Man beachte hierbei $\mathring{\bigcup}_{k\in\mathbb{N}_0} C_k = Q$. Wir sehen G, $\Gamma \in L^q(Q)$, $\Gamma \leq G$ in Q und $\overline{\Gamma^q_Q} \leq \overline{G^q_Q} = 1$. (Zum Abschluss des Beweises wird sich $\Gamma \in L^p(Q)$ für jedes $p \in [q, q+\epsilon)$ herausstellen !)

<u>Schritt I</u> des Beweises besteht nun im Nachweis der Abschätzung

$$\int_{\Omega(t)} \Gamma^q\, d\mathcal{L}^n \leq \text{const}(n,q,b)\, t^{q-1} \int_{\Omega(t)} \Gamma\, d\mathcal{L}^n \qquad \forall\, t \in [1,\infty), \qquad (I)$$

mit $\Omega(t) := \{x \in Q \mid \Gamma(x) > t\}$. Wir wählen hierzu ein $t \in [1, \infty)$, setzen $s := \vartheta t$ für ein noch zu bestimmendes $\vartheta \gg 1$ und führen eine Calderon-Zygmund-Zerlegung, wie in Lemma 5.5, mit dem Würfel Q zur L^1-Funktion G^q mit $\lambda_k := (s\alpha_k)^q$ $(> 1 = \overline{(G^q)_Q})$ durch, für ein beliebig fixiertes $k \in \mathbb{N}_0$. Wir erhalten also eine abzählbare Familie disjunkter, offener Würfel $\{W_k^j\}_j$ aus Q mit:

$$\lambda_k = s^q\,\alpha_k^q < \overline{(G^q)_{W_k^j}} \leq 4^n s^q \alpha_k^q \qquad \forall\, j \in \mathbb{N} \tag{5.109}$$

$$\text{und} \qquad G^q(x) \leq s^q \alpha_k^q \qquad \text{für } \mathcal{L}^n\text{-f.a. } x \in Q \setminus \mathring{\bigcup}_{j\in\mathbb{N}} W_k^j. \tag{5.110}$$

Nun gilt für jedes $j \in \mathbb{N}$ entweder $W_k^j \subset C_k$ oder $W_k^j \cap C_k = \emptyset$, denn aus (5.109) und $\overline{(G^q)_Q} = 1$ erhalten wir:

$$\lambda_k \mid W_k^j \mid < \int_{W_k^j} G^q \leq \int_Q G^q = \mid Q \mid = 2^n \quad \Rightarrow \mid W_k^j \mid \leq \frac{2^n}{\lambda_k} = \frac{2^n}{s^q l^n 2^{n(k+2)q}} < \Big(\frac{1}{2^{k+2}}\Big)^n \tag{5.111}$$

(da $q, s > 1$ und $l > 4$). Die Würfel W_k^j haben also Kantenlängen $\frac{1}{2^m}$ mit $m > k+2$, sind also Würfel höherer als (k+1)-ter Stufe in Lemma 5.5. Da ∂C_k in der Vereinigung der Ränder der Würfel $(k+1)$-ter Stufe enthalten ist, folgt also die obige Behauptung. Wir wählen nun diejenigen Würfel aus $\{W_k^j\}$ mit $W_k^j \subset C_k$ aus und nennen diese Q_k^j (bei weiterhin beliebig fixiertem k). Wegen $G(x) = \alpha_k\,\Gamma(x)$ für $x \in C_k$ ergeben (5.109) und (5.110):

$$s^q < \overline{(\Gamma^q)_{Q_k^j}} \leq 4^n s^q \qquad \forall\, j \in \mathbb{N},\ \forall\, k \in \mathbb{N} \tag{5.112}$$

$$\text{und} \qquad \Gamma(x) \leq s \quad \text{für } \mathcal{L}^n\text{-f.a. } x \in C_k \setminus \mathring{\bigcup}_{j\in\mathbb{N}} Q_k^j \quad \forall\, k \in \mathbb{N}, \tag{5.113}$$

oder anders formuliert: $\Gamma(x) \leq s$ für $\mathcal{L}^n$-f.a. $x \in Q \setminus \hat{Q}$ mit $\hat{Q} := \mathring{\bigcup}_{j,k\in\mathbb{N}} Q_k^j$. Somit ergibt sich zusammen mit (5.112):

$$\int_{\Omega(s)} \Gamma^q = \int_{\Omega(s)\cap\hat{Q}} \Gamma^q \leq \int_{\hat{Q}} \Gamma^q = \sum_{j,k\in\mathbb{N}} \overline{(\Gamma^q)_{Q_k^j}} \mid Q_k^j \mid \leq 4^n\, s^q \mid \hat{Q} \mid. \tag{5.114}$$

Desweiteren haben wir mit $d_k^j := \operatorname{diam}(Q_k^j)$: trivialerweise $Q_k^j \subset B_{d_k^j}(x)$ $\forall\, x \in Q_k^j$, andererseits aber auch $\mid B_{d_k^j}(x) \mid < (2\sqrt{n})^n \mid Q_k^j \mid$, da der offene Ball mit demselben Zentrum wie Q_k^j und mit Radius $= \frac{d_k^j}{2\sqrt{n}}$ in Q_k^j enthalten ist. Hieraus leiten wir

$$\overline{(G^q)_{Q_k^j}} \leq \frac{1}{\mid Q_k^j \mid} \int_{B_{d_k^j}(x)} G^q < (2\sqrt{n})^n \overline{(G^q)_{B_{d_k^j}(x)}} \qquad \forall\, x \in Q_k^j \tag{5.115}$$

ab. Wir können mit $s, q > 1$ in (5.111) auch schärfer $\mid Q_k^j \mid < \frac{2^n}{l^n\, 2^{n(k+2)}}$ abschätzen, und damit

$$d_k^j = \mid Q_k^j \mid^{\frac{1}{n}} \sqrt{n} < \frac{2}{l\, 2^{k+2}} \sqrt{n} < \frac{1}{2}\,\frac{1}{2^{k+2}} < \frac{1}{2}\, R(x)$$

$\forall\, x \in Q_k^j \subset C_k$, da $l > 4\sqrt{n}$ gewählt wurde. Hieraus ergibt sich sofort nach Definition 5.1 $\overline{(G^q)_{B_{d_k^j}(x)}} \leq M_{\frac{1}{2}R(x)}(G^q)(x)$ $\forall\, x \in Q_k^j$. Bezeichnen wir mit $\tilde{Q}$ die Menge der Punkte

$x \in Q$, für die die Voraussetzung (5.89) gilt, so erhalten wir also insgesamt aus (5.109), (5.115) und (5.89):

$$s^q\,\alpha_k^q < \overline{(G^q)_{Q_k^j}} < (2\sqrt{n})^n\overline{(G^q)_{B_{d_k^j}(x)}} \leq (2\sqrt{n})^n M_{\frac{1}{2}R(x)}(G^q)(x) \leq (2\sqrt{n})^n\, b\,(M(G)(x))^q,$$

$$\text{also} \qquad s < \frac{1}{2^{n(k+2)}}\Big(\frac{2\sqrt{n}}{l}\Big)^{\frac{n}{q}}\, b^{\frac{1}{q}}\, M(G)(x) \qquad \forall\, x \in Q_k^j \cap \tilde{Q},$$

wenn wir noch $\alpha_k := l^{\frac{n}{q}}\, 2^{n(k+2)}$ einsetzen (wobei wir $g \equiv 0$ und somit $G \equiv 0$ auf $\mathbb{R}^n \setminus Q$ fortgesetzt haben). Nach Definition 5.1 existiert also zu jedem $x \in Q_k^j \cap \tilde{Q}$ ein $r_0(x) > 0$ mit

$$s < \frac{1}{2^{n(k+2)}}\Big(\frac{2\sqrt{n}}{l}\Big)^{\frac{n}{q}}\, b^{\frac{1}{q}}\, \overline{G_{B_{r_0(x)}(x)}}. \tag{5.116}$$

Für den weiteren Verlauf des Beweises fixieren wir ein beliebiges $x \in Q_k^j \cap \tilde{Q}$. Bei einer Wahl $\vartheta \geq n^{\frac{n}{2}} b^{\frac{1}{q}}$ zeigen wir nun $r_0(x) < \frac{1}{2^{k+2}}$: wegen $s = t\vartheta \geq \vartheta \geq n^{\frac{n}{2}} b^{\frac{1}{q}}$ erhalten wir zunächst aus (5.116):

$$\overline{G_{B_{r_0(x)}(x)}} > n^{\frac{n}{2}} b^{\frac{1}{q}}\, 2^{n(k+2)}\Big(\frac{l}{2\sqrt{n}}\Big)^{\frac{n}{q}}\, b^{-\frac{1}{q}} > n^{\frac{n}{2}}\, 2^{n(k+2)},$$

da $l > 4\sqrt{n}$ gewählt wurde. Die Hölderungleichung liefert also zusammen mit $\overline{G_Q^q} = 1$:

$$\begin{aligned} \mid B_{r_0(x)}(x) \mid &< \frac{1}{n^{\frac{n}{2}}\, 2^{n(k+2)}} \int_{B_{r_0(x)}(x)} G \leq \frac{1}{n^{\frac{n}{2}} 2^{n(k+2)}} \mid Q \mid^{\frac{q-1}{q}} \Big(\int_Q G^q\Big)^{\frac{1}{q}} \\ &= \frac{1}{n^{\frac{n}{2}} 2^{n(k+2)}} \mid Q \mid = \frac{1}{n^{\frac{n}{2}}\, 2^{n(k+1)}}. \end{aligned}$$

Zusammen mit der ebenfalls elementar-geometrischen Abschätzung $\mid B_{r_0(x)}(x) \mid \geq (\frac{2\, r_0(x)}{\sqrt{n}})^n$ verifizieren wir also die obige Behauptung:

$$r_0(x) \leq \mid B_{r_0(x)}(x) \mid^{\frac{1}{n}} \frac{\sqrt{n}}{2} < \frac{1}{\sqrt{n}\, 2^{k+1}} \frac{\sqrt{n}}{2} = \frac{1}{2^{k+2}}.$$

Hieraus folgt nun $B_{r_0(x)}(x) \subset C_{k-1} \cup C_k \cup C_{k+1}$, denn für ein beliebiges $y \in B_{r_0(x)}(x)$ gilt $\mid R(y) - R(x) \mid \leq \mid y - x \mid < r_0 < \frac{1}{2^{k+2}}$ und ausserdem $\frac{1}{2^{k+1}} < R(x) \leq \frac{1}{2^k}$ für $x \in Q_k^j \subset C_k$, woraus sich mit Definition (5.108) die Behauptung ergibt:

$$R(y) > \frac{1}{2^{k+1}} - \frac{1}{2^{k+2}} = \frac{1}{2^{k+2}} \quad \text{und} \quad R(y) < \frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^{k+2}} < \frac{2}{2^k} = \frac{1}{2^{k-1}}.$$

Anhand der Monontonie der Folge $\{\alpha_m\}$ und wegen $G(y) = \alpha_m\Gamma(y)$ für $y \in C_m$ haben wir $G \leq \alpha_{k+1}\Gamma$ in $\bigcup_{m=0}^{k+1} C_m$, also insbesondere in $B_{r_0(x)}(x)$. Setzen wir dies mit $\alpha_{k+1} = l^{\frac{n}{q}} 2^{n(k+3)}$ in (5.116) ein, so erhalten wir:

$$s < \frac{1}{2^{n(k+2)}}\Big(\frac{2\sqrt{n}}{l}\Big)^{\frac{n}{q}}\, b^{\frac{1}{q}}\, l^{\frac{n}{q}} 2^{n(k+3)}\overline{\Gamma_{B_{r_0(x)}(x)}} = (2\sqrt{n})^{\frac{n}{q}}\, b^{\frac{1}{q}}\, 2^n\, \overline{\Gamma_{B_{r_0(x)}(x)}}. \tag{5.117}$$

Hiermit können wir nun $\int_{\Omega(s)} \Gamma^q$ und somit auch $\int_{\Omega(t)} \Gamma^q$ adäquat abschätzen: Anhand von (5.117) werden wir sogleich erkennen, dass wir nun $\vartheta \geq 2\,(2\sqrt{n})^{\frac{n}{q}}\, b^{\frac{1}{q}}\, 2^n$ benötigen.

Wählen wir also z.B. $\vartheta := 2^{2n+1}\, n^{\frac{n}{2}}\, b^{\frac{1}{q}}$ $(> n^{\frac{n}{2}}\, b^{\frac{1}{q}}$ aus der ersten Wahl von ϑ), so erhalten wir aus (5.117) (zusammen mit $s = \vartheta t$):

$$2\,(2\sqrt{n})^{\frac{n}{q}}\, b^{\frac{1}{q}}\, 2^n\, t \mid B_{r_0(x)}(x) \mid < s \mid B_{r_0(x)}(x) \mid < (2\sqrt{n})^{\frac{n}{q}}\, b^{\frac{1}{q}}\, 2^n \int_{B_{r_0(x)}(x)} \Gamma,$$

$$\text{also} \qquad 2t \mid B_{r_0(x)}(x) \mid < \int_{B_{r_0(x)}(x)} \Gamma = \int_{\Omega(t)\cap B_{r_0(x)}(x)} \Gamma + \int_{B_{r_0(x)}(x)\setminus\Omega(t)} \Gamma$$
$$\leq \int_{\Omega(t)\cap B_{r_0(x)}(x)} \Gamma + t \mid B_{r_0(x)}(x) \mid,$$

$$\text{und somit} \qquad \mid B_{r_0(x)}(x) \mid < \frac{1}{t} \int_{\Omega(t)\cap B_{r_0(x)}(x)} \Gamma \qquad \forall\, x \in Q_k^j \cap \tilde{Q}, \quad \forall\, j,k \in \mathbb{N}. \tag{5.118}$$

Da wir jedem $x \in Q_k^j \cap \tilde{Q}$ einen Ball $B_{r_0(x)}(x)$ mit $r_0(x) < \frac{1}{2^{k+2}}$ zuordneten, $\forall\, j,k \in \mathbb{N}$, erhalten wir eine Überdeckung $\{B_{r_0(x)}(x)\}_{x\in\hat{Q}\cap\tilde{Q}}$ von $\hat{Q} \cap \tilde{Q}$, aus der wir nach Lemma 5.3 eine abzählbare Teilfamilie $\{B_{r_0(x_i)}(x_i)\}_{i\in\mathbb{N}}$ disjunkter Bälle auswählen können, sodass zusammen mit (5.118)

$$\mid \hat{Q} \mid = \mid \hat{Q} \cap \tilde{Q} \mid \leq 5^n \sum_{i\in\mathbb{N}} \mid B_{r_0(x_i)}(x_i) \mid \leq \frac{5^n}{t} \sum_{i\in\mathbb{N}} \int_{\Omega(t)\cap B_{r_0(x_i)}(x_i)} \Gamma \leq \frac{5^n}{t} \int_{\Omega(t)} \Gamma$$

erfüllt ist. Zusammen mit (5.114) schliessen wir:

$$\int_{\Omega(s)} \Gamma^q \leq 4^n\, s^q \mid \hat{Q} \mid \leq 20^n\, \frac{s^q}{t} \int_{\Omega(t)} \Gamma = 20^n\, s^{q-1}\, \vartheta \int_{\Omega(t)} \Gamma. \tag{5.119}$$

Weiterhin erhalten wir aus dem verallgemeinerten Mittelwertsatz ($s \gg t$):

$$\int_{\Omega(t)\setminus\Omega(s)} \Gamma^q \leq s^{q-1} \int_{\Omega(t)\setminus\Omega(s)} \Gamma \leq s^{q-1} \int_{\Omega(t)} \Gamma.$$

Zusammen mit (5.119) ergibt sich also das Ziel von Schritt I:

$$\int_{\Omega(t)} \Gamma^q = \int_{\Omega(t)\setminus\Omega(s)} \Gamma^q + \int_{\Omega(s)} \Gamma^q \leq (1 + 20^n\vartheta)\, s^{q-1} \int_{\Omega(t)} \Gamma$$
$$= (1 + 20^n\vartheta)\, \vartheta^{q-1} t^{q-1} \int_{\Omega(t)} \Gamma \qquad \forall\, t \in [1,\infty),$$

wobei die Konstante $a := (1 + 20^n\vartheta)\,\vartheta^{q-1}$ wegen $\vartheta = 2^{2n+1}\, n^{\frac{n}{2}}\, b^{\frac{1}{q}}$ den exakten Wert

$$a = (1 + 20^n\, 2^{2n+1}\, n^{\frac{n}{2}}\, b^{\frac{1}{q}})\, 2^{(2n+1)(q-1)}\, n^{(\frac{n}{2})(q-1)}\, b^{\frac{q-1}{q}} \tag{5.120}$$

hat und insbesondere nur von n, q und b abhängt.
Schritt II besteht nun in der Anwendung des Gehring-Lemmas auf die Funktion $h(t) := \int_{\Omega(t)} \Gamma$, für $t \in [1,\infty)$. Tatsächlich ist $h : [1,\infty) \to [0,\infty)$ schwach monoton fallend und erfüllt wegen $\mathcal{L}^n(\Omega(t)) \leq \frac{1}{t} \parallel \Gamma \parallel_{L^1(Q)} \to 0$ auch die Bedingung $h(t) \searrow 0$ für $t \to \infty$.

Wenden wir die Transformationsformel (5.102) auf die $L^q(Q)-$Funktion Γ an, so erhalten wir $\forall\, r \in [1,\infty)$:

$$\int_{\Omega(t)\setminus\Omega(t^*)} \Gamma^r = \int_t^{t^*} -s^{r-1}\, dh(s), \qquad \text{für } t < t^* \in [1,\infty). \tag{5.121}$$

Da für $r = q$ wegen $\Gamma \in L^q(Q)$ der Grenzwert der linken Seite in (5.121) für $t^* \nearrow \infty$ existiert, lässt sich (I), das Resultat von Schritt I, gerade in die Voraussetzung (5.91) des Gehring-Lemmas, für $\beta = q-1 > 0$ und $a = a(n,q,b) = (1+20^n\vartheta)\,\vartheta^{q-1} > 1$, umformen:

$$\int_t^\infty -s^{q-1}\, dh(s) = \int_{\Omega(t)} \Gamma^q \le a\, t^{q-1} h(t) \qquad \forall\, t \in [1,\infty). \tag{5.122}$$

Nach dem besagten Lemma gilt also $\forall\, \alpha \in [q-1, q-1+\epsilon)$, mit $\epsilon = \frac{q-1}{a-1} > 0$:

$$\int_1^\infty -t^\alpha\, dh(t) \le C \int_1^\infty -t^{q-1}\, dh(t), \tag{5.123}$$

wobei wir hier anhand der Aussage des Gehring-Lemmas und mit (5.120) exakt

$$C = C(\alpha,n,q,b) := \frac{q-1}{a\,(q-1) - (a-1)\,\alpha}$$
$$\text{mit} \qquad a = (1 + 20^n\, 2^{2n+1}\, n^{\frac{n}{2}}\, b^{\frac{1}{q}})\, 2^{(2n+1)(q-1)}\, n^{(\frac{n}{2})(q-1)}\, b^{\frac{q-1}{q}} \tag{5.124}$$

erhalten. Desweiteren liefert der Satz von Levi über monotone Konvergenz (siehe [Natan], S. 156) in Anwendung auf $\{\chi_{\Omega(1)\setminus\Omega(t^*)}\, \Gamma^{\alpha+1}\}$ wegen $\mathcal{L}^n(\Omega(t^*)) \searrow 0$:

$$\int_{\Omega(1)\setminus\Omega(t^*)} \Gamma^{\alpha+1} = \int_{\Omega(1)} \chi_{\Omega(1)\setminus\Omega(t^*)}\, \Gamma^{\alpha+1} \longrightarrow \int_{\Omega(1)} \Gamma^{\alpha+1} \qquad \text{für } t^* \to \infty.$$

Kombinieren wir dies mit (5.121) für $r = p := \alpha + 1$ und $t = 1$, (5.123), der Gleichung in (5.122) für $t = 1$, und $\overline{\Gamma^q_Q} \le \overline{G^q_Q} = 1$, so erhalten wir schliesslich:

$$\int_{\Omega(1)} \Gamma^p = \int_1^\infty -t^\alpha\, dh(t) \le C \int_1^\infty -t^{q-1}\, dh(t) = C \int_{\Omega(1)} \Gamma^q \le C \int_Q \Gamma^q \le C \mid Q \mid = C\, 2^n$$

$\forall\, p \in [q, q+\epsilon)$. Andererseits haben wir $\int_{Q\setminus\Omega(1)} \Gamma^p \le \mathcal{L}^n(Q \setminus \Omega(1)) \le 2^n$, sodass wir insgesamt

$$\int_Q \Gamma^p = \int_{\Omega(1)} \Gamma^p + \int_{Q\setminus\Omega(1)} \Gamma^p \le 2^n\,(C+1) \qquad \forall\, p \in [q, q+\epsilon) \tag{5.125}$$

gewinnen, insbesondere $\Gamma \in L^p(Q)$ für jedes $p \in [q, q+\epsilon)$. Desweiteren existiert für eine beliebige $\mathcal{L}^n$-messbare Teilmenge $Q^* \subset\subset Q$ ein $N \in \mathbb{N}$ mit $Q^* \subset \bigcup_{k=0}^N C_k$. Anhand der Monotonie der Folge $\{\alpha_k\}$ haben wir $\Gamma(x) = \frac{G(x)}{\alpha_k} \ge \frac{G(x)}{\alpha_N}$ $\forall\, x \in C_k$, für $k = 1,\ldots,N$, also insbesondere $\forall\, x \in Q^*$. Zusammen mit (5.125) erhalten wir somit:

$$\int_{Q^*} G^p \le \alpha_N^p \int_{Q^*} \Gamma^p \le \alpha_N^p \int_Q \Gamma^p \le \alpha_N^p\, 2^n\,(C+1),$$

also $(\bar{G^p}_{Q^*})^{\frac{1}{p}} \leq \left(\frac{\alpha_N^p\, 2^n\,(C+1)}{\mathcal{L}^n(Q^*)}\right)^{\frac{1}{p}} =: K$, wobei die Konstante K wegen $\alpha_N = l^{\frac{n}{q}} 2^{n(N+2)}$, der Forderung $l > 4\sqrt{n}$ und $C = \frac{q-1}{a(q-1)-(a-1)\,(p-1)}$ mit $a = a(n, q, b)$ wie in (5.124) nur von n, q, p, $b, \mathcal{L}^n(Q^*)$ und $\operatorname{dist}(Q^*, \partial Q)$ abhängt. Anhand der Definition $G := \frac{g}{(\bar{g^q}_Q)^{\frac{1}{q}}}$ ist Theorem 5.3 somit für alle $p \in [q, q+\epsilon)$ bewiesen.

///

Literatur

[A] Alt, H.W., (1999) Lineare Funktionalanalysis, Springer Verlag, Berlin - Heidelberg - New York.

[E] Evans, L.C., (1998) Partial differential equations, Providence : American Math. Society, Graduate studies in mathematics 19.

[Giaq] Giaquinta, M., (1983) Multiple integrals in the calculus of variations and nonlinear elliptic systems, Princeton University Press, Princeton, New Jersey.

[GT] Gilbarg, D., Trudinger, N.S., (1998) Elliptic Partial Differential Equations of Second Order, Springer Verlag, 3. Auflage, Berlin - Heidelberg - New York - Tokyo.

[HiWi75] Hildebrandt, S., Widman, K.-O. (1975) Some Regularity Results for Quasilinear Elliptic Systems of Second Order, Math. Zeitschrift, **142**, pp. 67–86.

[LU] Ladyzenskaja, O.A., Uralceva, N.N., (1968) Linear and Quasilinear Elliptic Equations, Academic Press, New York and London.

[Natan] Natanson, I.P. (1969) Theorie der Funktionen einer reellen Veränderlichen, Akademie-Verlag, Berlin.

[Ru] Rudin, W.T., (1973) Functional analysis, McGraw-Hill, New York.

[S97] Simon, L., (1997) Schauder estimates by scaling, Calculus of Variations and Partial Differential Equations, **5**, No. 5, pp. 391–407.

[Stein] Stein, E. (1970) Singular integrals and differentiability properties of functions, Princeton University Press, Princeton, New Jersey.

[SU81] Sacks, J., Uhlenbeck, K.(1981) The Existence of Minimal Immersions of 2-Spheres, Annals of Mathematics, **113**, pp. 1–24.

[Walter] Walter, W. (1990) Analysis II, Grundwissen Mathematik 4, Springer Verlag, Berlin - Heidelberg - New York.