Universität Tübingen
Fachbereich Mathematik

PD Dr. R. Jakob 13.10.2014

Nicht-lineare Funktionalanalysis
WS 2014/15
1.Übung

AUFGABE 1:
Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ eine offene, nicht-leere Teilmenge, und wir messen den Inhalt von Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ mit dem n-dimensionalen Lebesgue-Mass $\mathcal{L}^n$. Beweisen Sie unter der Annahme, dass der Raum $L^\infty(\Omega, \mathcal{L}^n)$ der auf Ω beschränkten Funktionen vollständig ist, die Vollständigkeit der folgenden, in der Vorlesung eingeführten Räume: $C_b^0(\Omega, \mathbb{R})$, $C_b^1(\Omega, \mathbb{R})$ und $C^{1,\alpha}(\Omega, \mathbb{R})$, für ein $\alpha \in (0, 1]$.

AUFGABE 2:
Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ eine offene, nicht-leere Teilmenge, und wir messen den Inhalt von Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ mit dem n-dimensionalen Lebesgue-Mass $\mathcal{L}^n$. Beweisen Sie unter der Annahme, dass der Raum $L^p(\Omega, \mathcal{L}^n)$, für $p \in [1, \infty)$, vollständig ist, die Vollständigkeit der Sobolev-Räume $W^{k,p}(\Omega)$ und $W_0^{k,p}(\Omega)$ bzgl. der Norm

$$\| u \|_{W^{k,p}(\Omega)} := \sum_{|\gamma| \le k} \| D^\gamma u \|_{L^p(\Omega)} := \sum_{|\gamma| \le k} \| u^\gamma \|_{L^p(\Omega)}$$

(wie auch in der Vorlesung angegeben), für $k \in \mathbb{N}$ und $p \in [1, \infty)$.

AUFGABE 3:
Es sei $u(t) := 1 - |t|$, für $|t| < 1$. Zeigen Sie, dass u in $W_0^{1,2}((-1,1)) \cap W^{1,\infty}((-1,1))$ liegt, jedoch dass es keine Folge $\{u_l\} \subset C_b^1((-1,1))$ mit $\| u_l - u \|_{W^{1,\infty}((-1,1))} \to 0$ geben kann.

Hinweis: Verwenden Sie zur Lösung des letzten Aufgabenteils von Aufgabe 3 eines der Resultate von Aufgabe 1.

Abgabetermin ist Montag, der 27.10.2014, in der Vorlesung.