Universität Tübingen
Fachbereich Mathematik

PD Dr. Ruben Jakob 12.01.2015

Nichtlineare Funktionalanalysis
WS 2014/15
10. Übungsblatt

AUFGABE 26: (Lineare elliptische Differentialgleichung, Calderon-Zygmund-Theorie, Teil I)
Es sei $\emptyset \neq \Omega \subset\subset \mathbb{R}^n$ offen mit C^∞-glattem Rand und $1 < p < \infty$. Wir führen folgende „Strukturbedingungen" an eine Klasse elliptischer Differential-Operatoren

$$L := -a_{ij}\,\partial_{ij} + b_i\,\partial_i + c \,:\, X := W^{2,p}(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega) \to L^p(\Omega)$$

2. Ordnung ein:
$a_{ij} \in C^0(\overline{\Omega}),\ b_i,\ c \in L^\infty(\Omega)$ mit

$$a_{ij}\xi_i\xi_j \geq \tfrac{1}{\Lambda}|\xi|^2 \quad \text{auf } \bar{\Omega} \quad \text{und für alle } \xi \in \mathbb{R}^n$$
$$|a_{ij}(x) - a_{ij}(y)| \leq \omega(|x-y|), \quad \text{für } x, y \in \bar{\Omega}$$
$$\| a_{ij}, b_i, c \|_{L^\infty(\Omega)} \leq \Lambda,$$

für ein $\Lambda \geq 1$, wobei ω ein gegebener „Stetigkeitsmodul" sei, d.h. eine stetige Funktion von $\mathbb{R}_+$ nach $\mathbb{R}_+$ mit $\lim_{t\downarrow 0}\omega(t) = 0$. Aus der Calderon-Zygmund-Theorie elliptischer Differentialgleichungen ist bekannt, daß für $u \in W^{2,p}(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega)$, welches die lineare elliptische Differentialgleichung in Nicht-Divergenzform

$$L(u) = -a_{ij}\partial_{ij}u + b_i\partial_i u + cu = \varphi \quad \text{fast überall in } \Omega \tag{1}$$

mit $\varphi \in L^p(\Omega)$ erfüllt, unter obigen Strukturbedingungen an L die folgenden Calderon-Zygmund-Abschätzungen gelten:

$$\| u \|_{W^{2,p}(\Omega)} \leq C(\Omega, p, \Lambda, \omega)(\| \varphi \|_{L^p(\Omega)} + \| u \|_{L^p(\Omega)}),$$

siehe z.B. [Gilbarg-Trudinger], Theorem 9.14. Solches u heißt eine „starke Lösung" von (1). Kombiniert man die Calderon-Zygmund-Abschätzungen, siehe [GT] Lemma 9.16, mit dem Alexandroffschen-Maximumprinzip, siehe [GT] Theorem 9.5, so folgt für $u \in W^{2,p}(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega)$, daß

$$L(u) = -a_{ij}\partial_{ij}u + b_i\partial_i u + cu \equiv 0 \Rightarrow u \equiv 0$$

gilt, falls $c \geq 0$ auf Ω zusätzlich angenommen wird, also dass jeder solche Differential-Operator L eine injektive, lineare Abbildung von X nach $L^p(\Omega)$ ist, falls zusätzlich $c \geq 0$ auf Ω gilt. Zeigen Sie nun:

(i) Jedes L ist unter den obigen Strukturbedingungen ein *stetiger* Operator von $X := W^{2,p}(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega)$ nach $L^p(\Omega)$. Können Sie seine Operatoren-Norm abschätzen ?

(ii) Im Falle $c \geq 0$ kann die obige Calderon-Zygmund-Abschätzung für jeden zulässigen Operator L wesentlich verbessert werden: Es existiert eine Konstante $\tilde{C}(\Omega, p, \Lambda, \omega)$, für die bereits

$$\| u \|_{W^{2,p}(\Omega)} \leq \tilde{C}(\Omega, p, \Lambda, \omega) \ \| L(u) \|_{L^p(\Omega)} \tag{2}$$

für jedes $u \in X$ gilt. Versuchen Sie, dies durch einen Widerspruchsbeweis zu zeigen, bei dem Sie (u.a.) die Strukturbedingungen an die Klasse aller zugelassener Operatoren L mit dem Satz von Arzela-Ascoli und der Reflexivität von $L^q(\Omega)$, für $q := (1 - \frac{1}{p})^{-1} \in (1, \infty)$, zu kombinieren versuchen. Benötigt man für diesen Beweis wirklich die Injektivität von L ?

<u>AUFGABE 27:</u> (Lineare elliptische Differentialgleichung, Calderon-Zygmund-Theorie, Teil II)
Es sei $\emptyset \neq \Omega \subset\subset \mathbb{R}^n$ offen mit C^∞-glattem Rand, $1 < p < \infty$.

(i) Zeigen Sie zunächst, dass $-\triangle$ ein Isomorphismus von $X = W^{2,p}(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega)$ auf $L^p(\Omega)$ ist. Starten Sie hierbei, indem Sie nach Theorem 6.0.9, Punkt 3, der Vorlesung insbesondere zu jedem $f \in C^\infty(\bar{\Omega})$ die Existenz genau einer Funktion $u = u_f \in W_0^{1,2}(\Omega)$ garantieren können, welche die schwache Poisson-Gleichung

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \phi \, d\mathcal{L}^n = \int_\Omega f \, \phi \, d\mathcal{L}^n$$

$\forall \, \phi \in W_0^{1,2}(\Omega)$ löst. Kann man nun (bei offenem $\Omega \subset\subset \mathbb{R}^n$ mit C^∞-glattem Rand) für $f \in C^\infty(\bar{\Omega})$ eine höhere Regularität von u_f beweisen, sodass dieses u_f insbesondere in X liegt und $-\triangle(u_f) = f$ $\mathcal{L}^n$-f.ü. auf Ω erfüllt ?

(ii) Kombinieren Sie nun dieses Ergebnis mit Abschätzung (2) aus Aufgabe 26, um zu beweisen, dass jeder Differential-Operator L, der die Strukturbedingungen aus Aufgabe 26 und ausserdem „$c \geq 0$" erfüllt, ein Isomorphismus von $X = W^{2,p}(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega)$ auf $L^p(\Omega)$ ist.

Abgabetermin ist Montag, der 19.01.2015.