Universität Tübingen
Fachbereich Mathematik

PD Dr. Ruben Jakob 19.01.2015

Nichtlineare Funktionalanalysis
WS 2014/15
11. Übungsblatt

**AUFGABE 28:** In Anschluss an die Aufgaben 23, 24 betrachten wir wieder das Eigenwert-Problem

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \phi \, d\mathcal{L}^n = \lambda \int_\Omega u\, \phi \, d\mathcal{L}^n \qquad \forall \phi \in \mathring{W}^{1,2}(\Omega) \tag{1}$$

des (negativen) Laplace-Operators auf einer offenen, beschränkten Teilmenge $\Omega \subset\subset \mathbb{R}^n$ mit $C^\infty-$glattem Rand. Wie in Aufgabe 24 nennen wir ein Paar $(u,\lambda) \in (\mathring{W}^{1,2}(\Omega)\setminus\{0\}) \times \mathbb{R}_{>0}$ eine „schwache Eigenfunktion" $u$ zum Eigenwert $\lambda$ des (negativen) Laplace-Operators, falls (1) von $(u,\lambda)$ erfüllt wird. Desweiteren definieren wir den „Raleigh-Quotienten"

$$R(u) := \frac{\int_\Omega \mid \nabla u \mid^2 \, d\mathcal{L}^n}{\int_\Omega \mid u \mid^2 \, d\mathcal{L}^n}$$

für $u \in W_0^{1,2}(\Omega) \setminus \{0\}$. Zeigen Sie:

(i) $\lambda^* := \inf\{R(u) \mid u \in W_0^{1,2}(\Omega) \setminus \{0\}\}$ ist positiv, und es existiert ein $u^* \in W_0^{1,2}(\Omega)$ mit $\| u^* \|_{L^2(\Omega)} = 1$, welches $\int_\Omega \mid \nabla u^* \mid^2 \, d\mathcal{L}^n = R(u^*) = \lambda^*$ erfüllt. Ist somit auch $\mid u^* \mid$ ein absoluter Minimierer von $R$ auf $W_0^{1,2}(\Omega) \setminus \{0\}$ mit $\| \mid u^* \mid \|_{L^2(\Omega)} = 1$ ?

(ii) Zeigen Sie mittels des Resultats aus Teil (i), dass sowohl $u^*$ als auch $\mid u^* \mid$ schwache Eigenfunktionen des (negativen) Laplace-Operators zum Eigenwert $\lambda^*$ sind.

(iii) Kann man nun mittels $L^2-$Regularitätstheorie schliessen, dass $\mid u^* \mid$ aus $C^\infty(\bar{\Omega})$ ist ? Und kann $u^*$ eine Nullstelle in $\Omega$ haben ? Beachten Sie hierbei, dass auf eine beliebige glatte, nicht-negative (klassische) Eigenfunktion von $-\triangle$ die „Harnack-Ungleichung" auf Bällen $B \subset\subset \Omega$ angewandt werden kann !

(iv) Sei nun $\tilde{u} \in W_0^{1,2}(\Omega) \setminus \{0\}$ eine beliebige schwache Eigenfunktion von $-\triangle$ zum Eigenwert $\lambda^*$. Kann $\tilde{u}$ eine Nullstelle in $\Omega$ haben ?

**AUFGABE 29:** (Lineare elliptische Differentialgleichung, Schauder-Theorie)
Es sei $\emptyset \neq \Omega \subset\subset \mathbb{R}^n$ offen mit $C^\infty$-glattem Rand und $0 < \alpha < 1$. Wir führen folgende „Strukturbedingungen" an eine Klasse elliptischer Differential-Operatoren

$$L := -a_{ij}\, \partial_{ij} + b_i\, \partial_i + c : C_0^{2,\alpha}(\Omega) := \{u \in C^{2,\alpha}(\Omega) \mid u \equiv 0 \text{ auf } \partial\Omega\} \to C^{0,\alpha}(\Omega)$$

2. Ordnung ein:
$a_{ij}, b_i,\ c \in C^{0,\alpha}(\Omega)$ mit

$$a_{ij}\xi_i\xi_j \geq \frac{1}{\Lambda}|\xi|^2 \quad \text{auf } \bar{\Omega} \quad \text{und für alle } \xi \in \mathbb{R}^n$$
$$\| a_{ij}, b_i, c \|_{C^{0,\alpha}(\Omega)} \leq \Lambda,$$

für ein $\Lambda \geq 1$. Aus der Schauder-Theorie elliptischer Differentialgleichungen ist bekannt, daß für $u \in C_0^{2,\alpha}(\Omega)$, welches die lineare elliptische Differentialgleichung in Nicht-Divergenzform

$$L(u) = -a_{ij}\partial_{ij}u + b_i\partial_i u + cu = \varphi \quad \text{fast überall in } \Omega \tag{2}$$

mit $\varphi \in C^{0,\alpha}(\Omega)$ erfüllt, unter obigen Strukturbedingungen an $L$ die folgenden Schauder-Abschätzungen gelten:

$$\| u \|_{C^{2,\alpha}(\Omega)} \leq C(\Omega, \alpha, \Lambda)(\| \varphi \|_{C^{0,\alpha}(\Omega)} + \| u \|_{L^\infty(\Omega)}),$$

siehe z.B. [Gilbarg-Trudinger], Theorem 6.6. Solches $u$ heißt eine ,,klassische Lösung" von (2). Das klassische (schwache) Maximum-Prinzip, siehe z.B. [GT] Theorem 3.3, liefert für $u \in C_0^{2,\alpha}(\Omega)$, daß

$$L(u) = -a_{ij}\partial_{ij}u + b_i\partial_i u + cu \equiv 0 \Rightarrow u \equiv 0$$

gilt, falls $c \geq 0$ auf $\Omega$ zusätzlich angenommen wird, also dass jeder solche Differential-Operator $L$ eine injektive, lineare Abbildung von $C_0^{2,\alpha}(\Omega)$ nach $C^{0,\alpha}(\Omega)$ ist, falls zusätzlich $c \geq 0$ auf $\Omega$ gilt.

(i) Zeigen Sie, dass für jeden zulässigen Operator $L$ im Falle $c \geq 0$ die obige Schauder-Abschätzung wesentlich verbessert werden kann: Es existiert eine Konstante $\tilde{C}(\Omega, \alpha, \Lambda)$, für die bereits

$$\| u \|_{C^{2,\alpha}(\Omega)} \leq \tilde{C}(\Omega, \alpha, \Lambda) \ \| L(u) \|_{C^{0,\alpha}(\Omega)} \tag{3}$$

für jedes $u \in C_0^{2,\alpha}(\Omega)$ gilt. Versuchen Sie, dies wie in Aufgabe 26 durch einen Widerspruchsbeweis zu zeigen, bei dem Sie (u.a.) die Strukturbedingungen an die Klasse aller zugelassener Operatoren $L$ mit der Kompaktheit der Einbettung $C^{0,\alpha}(\Omega) \hookrightarrow C^0(\bar{\Omega})$ (also eigentlich wieder mit dem Satz von Arzela-Ascoli) kombinieren und zudem die Kompaktheit der Einbettung $C^{2,\alpha}(\Omega) \hookrightarrow C^2(\bar{\Omega})$ verwenden.

(ii) Zeigen Sie nun, dass $-\triangle$ ein Isomorphismus von $C_0^{2,\alpha}(\Omega)$ auf $C^{0,\alpha}(\Omega)$ ist. Starten Sie hierbei wie in Aufgabe 27, indem Sie nach Theorem 6.0.9, Punkt 3, der Vorlesung insbesondere zu jedem $f \in C^\infty(\bar{\Omega})$ die Existenz genau einer Funktion $u = u_f \in W_0^{1,2}(\Omega)$ garantieren können, welche die schwache Poisson-Gleichung

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \phi \, d\mathcal{L}^n = \int_\Omega f \, \phi \, d\mathcal{L}^n$$

$\forall \phi \in W_0^{1,2}(\Omega)$ löst, und indem Sie anschliessend (bei $\Omega \subset\subset \mathbb{R}^n$ mit $C^\infty$-glattem Rand und $C^\infty-$glattem $f$) eine weitaus höhere Regularität von $u_f$ verwenden. Verwenden

Sie im nächsten Schritt, dass man zu jedem vorgegebenen $f \in C^{0,\alpha}(\Omega)$ eine Familie von Glättungen $f_\epsilon \in C^\infty(\bar{\Omega})$ konstruieren kann, die

$$\| f_\epsilon - f \|_{C^{0,\beta}(\Omega)} \to 0$$

für jedes $\beta \in (0, \alpha)$ erfüllt. Überlegen Sie desweiteren, ob man die Abschätzung (3) auch für $\beta \in (0, \alpha)$ anstatt für $\alpha$ beweisen kann und ob eine klassische Lösung $u \in C_0^{2,\beta}(\Omega)$ von $-\triangle(u) = f$ für ein $f \in C^{0,\alpha}(\Omega)$ bereits in $C_0^{2,\alpha}(\Omega)$ liegt !

(iii) Kombinieren Sie nun dieses Ergebnis mit Abschätzung (3), um zu beweisen, dass jeder Differential-Operator $L$, der die obigen Strukturbedingungen erfüllt (ohne weitere Einschränkungen an $c$), ein Fredholm-Operator von $C_0^{2,\alpha}(\Omega)$ nach $C^{0,\alpha}(\Omega)$ vom Index 0 ist. Spalten Sie hierfür $L$ in zwei Operatoren auf, um sowohl Abschätzung (3) also auch die Fredholm-Theorie verwenden zu können. Ist $C^{1,\alpha}(\Omega) \hookrightarrow C^{0,\alpha}(\Omega)$ eine kompakte Einbettung ?

*Abgabetermin ist Montag, der 26.01.2015.*