Universität Tübingen
Fachbereich Mathematik

PD Dr. Ruben Jakob 26.01.2015

Nichtlineare Funktionalanalysis
WS 2014/15
12. Übungsblatt

AUFGABE 30*:
Es sei $\Omega \subset\subset \mathbb{R}^n$ offen, nichtleer und $f \in C^0(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$. Zeigen Sie, dass für $x_0 \in \mathbb{R}^n$ gilt:

$$deg(f(\,.+x_0), \Omega - x_0, y) = deg(f, \Omega, y).$$

AUFGABE 31:
Zeigen Sie zunächst mittels der Homotopie-Invarianz (Prop. 8.0.12) und der Lösungs-Eigenschaft (Prop. 8.0.11) des Abbildungsgrades, dass

$$deg(t \mapsto |t+1| - 1, (-3, 1), 0) = 0$$

gilt, und verwenden Sie anschliessend dessen Additivität (Prop. 8.0.13) und das Resultat von Aufgabe 30, um daraus

$$deg(t \mapsto -t, (-1, 1), 0) = -1$$

zu folgern.

AUFGABE 32:

(i) Sei $f : \overline{B_1^2(0)} \to \mathbb{C}$ durch $f(z) := z^m$ für $m \in \mathbb{N}_0$ definiert. Zeigen Sie

$$deg(f, B_1^2(0), 0) = m$$

mittels Prop. 8.0.12 und Prop. 8.0.13.

(ii) Zeigen Sie nun, dass für $f(z) := \bar{z}^m$

$$deg(f, B_1^2(0), 0) = -m$$

gilt.

(iii) Sei nun $\Omega := B_1^2(0) \setminus \overline{B_\epsilon^2(0)}$, für ein $\epsilon \in (0, 1)$. Kann man nun dieselbe Technik wie in den Aufgabenteilen (i) und (ii) anwenden, um den Abbildungsgrad $deg(f, B_1^2(0), w)$ von $f(z) := z^m$ für negative (!) $m \in \mathbb{Z}$ und für ein $w \in B_1^2(0)$ zu berechnen ? Können Sie $deg(f, \Omega, 0)$ für $m = -1$ sogar direkt durch die explizite Formel "$\deg(f, \Omega, 0) = \int_\Omega f^\sharp(\omega)$", für eine geeignete 2-Form ω, aus Proposition 8.0.14 berechnen ? Welchen Wert erhalten Sie für $deg(f, \Omega, w)$, falls $| w | \in (1, \epsilon^{-1})$ und $m \in \mathbb{Z}$ negativ (!) ist ?

Abgabetermin ist Montag, der 02.02.2015.