Universität Tübingen
Fachbereich Mathematik

PD Dr. Ruben Jakob 02.02.2015

Nichtlineare Funktionalanalysis
WS 2014/15
13. Übungsblatt

AUFGABE 33:

Seien $2 \leq n < p < \infty$. Es ist bekannt, daß die Einbettung

$$W^{2,p}(B_1^n(0)) \hookrightarrow C^{1,\beta}(B_1^n(0)) \tag{1}$$

für $\beta = \alpha := 1 - \frac{n}{p} \in]0,1[$ existiert und stetig ist und für $\beta < \alpha$ stetig und kompakt ist. Wir betrachten zu einem beliebig fixierten $\varphi \in L^p(B_1(0))$ das (starke) Randwertproblem

$$\begin{aligned} -2H(u) \equiv -\mathrm{div}\left(\frac{\nabla u}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}}\right) = \varphi \quad \text{in } B_\varrho(0), \\ u = 0 \quad \text{auf } \partial B_\varrho(0) \end{aligned} \tag{2}$$

für die mittlere Krümmung H von Graphen von Funktionen $u \in W^{2,p}(B_\varrho(0)) \cap W_0^{1,p}(B_\varrho(0))$ auf dem Ball $B_\varrho(0)$, für $\varrho \in (0,1]$.

(i) Differenzieren Sie die obige Gleichung aus und gewinnen Sie hiermit eine äquivalente Formulierung

$$\begin{aligned} -a_{ij}(\nabla u)\,\partial_{ij}u = \varphi \quad \text{in } B_\varrho(0), \\ u = 0 \quad \text{auf } \partial B_\varrho(0) \end{aligned} \tag{3}$$

von (2) in Nichtdivergenzform. Setzen Sie nun $\varrho = 1$, fixieren Sie ein $\beta \in (0,\alpha)$ und eine abgeschlossene Kugel $K_R(0) \subset C^{1,\beta}(B_1(0))$ und betrachten Sie anstatt der (nicht-linearen) Gleichung (3) die lineare Gleichung

$$-a_{ij}(\nabla v)\,\partial_{ij}u = \varphi \quad \text{in } B_1(0) \tag{4}$$

mit „eingefrorenen" Koeffizienten $a_{ij}(\nabla v)$, für ein beliebiges $v \in K_R(0)$. Zeigen Sie zunächst, dass der Operator $L := -a_{ij}(\nabla v)\,\partial_{ij}$ alle Strukturbedingungen von Aufgabe 26 zu dem vorgegebenen p und für jedes $\Lambda \geq (1+R^2)^{3/2}$ erfüllt.

(ii) Nutzen Sie nun die Resultate der Aufgaben 26 und 27 und die Stetigkeit der Einbettung (1), für das fixierte $\beta \in (0,\alpha)$, um einen sogenannten „Lösungsoperator" $F : K_R(0) \to K_R(0)$ zu Gleichung (4) zu konstruieren. Welche zusätzliche Bedingung muss man an φ stellen, um das Bild von F tatsächlich in die Kugel $K_R(0)$ hineinzupressen ?

AUFGABE 34:
Wir betrachten das Problem aus Aufgabe 33.

(i) Beweisen Sie erneut mittels der Resultate der Aufgaben 26 und 27 und nun mittels der Kompaktheit der Einbettung (1), für fixiertes $\beta \in (0, \alpha)$, daß F eine sowohl stetige als auch kompakte Abbildung von $K_R(0)$ nach $K_R(0)$ ist.

(ii) Schliessen Sie nun hieraus, dass das Krümmungs-Randwertproblem (3) bzw. (2) für $\varrho = 1$ eine Lösung $u^* \in W^{2,p}(B_1(0)) \cap W_0^{1,p}(B_1(0))$ besitzen muss, falls φ die zusätzliche Bedingung aus Aufgabe 33 erfüllt.

(iii) Folgern Sie schliesslich, dass das Krümmungs-Randwertproblem (2) zu <u>jedem</u> $\varphi \in L^p(B_1(0))$ eine Lösung $u^* \in W^{2,p}(B_\varrho(0)) \cap W_0^{1,p}(B_\varrho(0))$ besitzt, falls der Radius ϱ hinreichend klein ist. Versuchen Sie hierfür φ schlau zu „skalieren" ! Welche anschauliche, also physikalische Bedeutung hat dieses Resultat im Fall $n = 2$? Stimmt dieses rein mathematische Ergebnis mit unserer realen Erfahrung überein ?

Abgabetermin ist Montag, der 09.02.2015.