Universität Tübingen
Fachbereich Mathematik

PD Dr. R. Jakob 27.10.2014

Nicht-lineare Funktionalanalysis
WS 2014/15
2.Übung

AUFGABE 4:
Es sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ eine nicht-leere, offene Teilmenge, $\alpha \in (0,1]$ und $k \in \mathbb{N}_0$. Beweisen Sie, dass für $u, v \in C^{0,\alpha}(\Omega)$ die Ungleichung

$$\text{höl}_{\Omega,\alpha}(uv) \leq \text{höl}_{\Omega,\alpha}(u) \parallel v \parallel_{L^\infty(\Omega)} + \text{höl}_{\Omega,\alpha}(v) \parallel u \parallel_{L^\infty(\Omega)}$$

und somit für $u, v \in C^{k,\alpha}(\Omega)$ eine Abschätzung der Form

$$\parallel uv \parallel_{C^{k,\alpha}(\Omega)} \leq C(n,k) \parallel u \parallel_{C^{k,\alpha}(\Omega)} \parallel v \parallel_{C^{k,\alpha}(\Omega)}$$

gilt.

AUFGABE 5:
Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt und $A : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, welche der Wachstumsbedingung

$$| A(x,z,w) | \leq \text{Konst.} (\varphi(x) + | z |^{p/q} + | w |^{p/q}) \qquad \text{für alle } (x,z,w) \in \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n,$$

mit $1 \leq p, q < \infty$ und $\varphi \in L^q(\Omega)$, genüge, so liefert die Zuordnung $u \mapsto f(u) := A(\,\cdot\,, u, \nabla u)$ eine stetige Abbildung von $W^{1,p}(\Omega)$ nach $L^q(\Omega)$.

Hinweis: Verwenden Sie hierfür den Konvergenzsatz von Vitali: Sei $\emptyset \neq \Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt und $1 \leq q < \infty$. Es sei $\{f_n\} \subset L^q(\Omega)$ eine punktweise konvergente Folge, also mit $f_n(x) \to f(x)$ in $\mathcal{L}^n$-f.a. $x \in \Omega$. Dann gilt $f \in L^q(\Omega)$ und $f_n \to f$ in $L^q(\Omega)$ genau dann, wenn zu jedem $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, sodass für jede $\mathcal{L}^n$-meßbare Teilmenge E von Ω mit $\mathcal{L}^n(E) < \delta$ bereits $\parallel f_n \parallel_{L^q(E)} < \epsilon$ für alle $n \in \mathbb{N}$ erfüllt ist.

AUFGABE 6:
Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ eine offene, beschränkte, konvexe Teilmenge, $0 < \alpha < 1$ und $b \in C^{1,1}(\mathbb{R})$. Zeigen Sie die folgenden Aussagen über den nicht-linearen Differential-Operator $F : C^{2,\alpha}(\Omega) \to C^{0,\alpha}(\Omega)$, der durch

$$F(u) := -\triangle(u) + b(u)$$

gegeben sei:

1) F ist stetig.

2) F ist in jedem $u \in C^{2,\alpha}(\Omega)$ Gateaux-differenzierbar mit der Ableitung

$$\partial_v F(u) = -\triangle v + b'(u)\, v \qquad \forall\, v \in C^{2,\alpha}(\Omega).$$

3) F ist in jedem $u \in C^{2,\alpha}(\Omega)$ Fréchet-differenzierbar mit der Fréchet-Ableitung $DF(u) = -\triangle\, \cdot\, + b'(u)\, \cdot$.

Hinweise: Verwenden Sie in allen Aufgabenteilen die Kompaktheit der Einbettung $C^{0,\beta}(\Omega) \hookrightarrow C^{0,\alpha}(\Omega)$, für $\beta \in (\alpha, 1)$, und beachten Sie in den ersten beiden Aufgabenteilen die Lipschitz-Stetigkeit von b bzw. von b' und Aufgabe 4. Ausserdem sollte die Konvexität von Ω zum Gebrauch des ,,Mittelwertsatzes in integrierter Form" motivieren.

Abgabetermin ist Montag, der 03.11.2014, in der Vorlesung.