Universität Tübingen
Fachbereich Mathematik

PD Dr. R. Jakob 03.11.2014

Nicht-lineare Funktionalanalysis
WS 2014/15
3.Übung

AUFGABE 7:

Es sei $I := [a, b] \subset \mathbb{R}$ ein nicht-leeres, kompaktes Intervall, $k : I \times I \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und $f : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $(s, x) \mapsto f(s, x)$, eine stetige Funktion, deren partielle Ableitung $\partial_x f$ nach der zweiten Variablen stetig auf $I \times \mathbb{R}$ sei und der folgenden Lipschitz-Bedingung genüge:

$$| \partial_x f(s, x_1) - \partial_x f(s, x_2) | \leq L \; | x_1 - x_2 | \qquad \text{für alle } x_1, x_2 \in \mathbb{R}$$

und für jedes feste $s \in I$. Zeigen Sie für den Integral-Operator

$$F(u)(t) := \int_a^b k(t, s)\, f(s, u(s))\, ds, \;\; t \in I$$

die folgenden Aussagen:

1) F ist eine wohldefinierte Abbildung von $L^\infty(I, \mathbb{R})$ nach $L^\infty(I, \mathbb{R})$.

2) F ist in jedem $u \in L^\infty(I, \mathbb{R})$ Fréchet-differenzierbar mit der Fréchet-Ableitung

$$DF(u).h = \int_a^b k(\,\cdot\,, s)\, \partial_x f(s, u(s))\, h(s)\, ds.$$

3) F ist eine C^1-Abbildung von $L^\infty(I, \mathbb{R})$ nach $L^\infty(I, \mathbb{R})$, und die Fréchet-Ableitung DF ist Lipschitz-stetig (in u) auf ganz $L^\infty(I, \mathbb{R})$, d.h. es existiert eine reelle Zahl $C > 0$, sodass
$$\| DF(u_1) - DF(u_2) \| \leq C \; \| u_1 - u_2 \|_{L^\infty(I)}$$
für alle $u_1, u_2 \in L^\infty(I, \mathbb{R})$ gilt.

AUFGABE 8:

Es sei $f : [0, 1] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine stetig differenzierbare Funktion, $(t, x) \mapsto f(t, x)$. Wir betrachten zwischen den Banachräumen $X := \{u \in C_b^1([0, 1], \mathbb{R}^n) \mid u(0) = 0\}$ und $Y := C^0([0, 1], \mathbb{R}^n)$ den nicht-linearen Operator Φ, definiert durch

$$\Phi(u)(t) := u'(t) - f(t, u(t)).$$

1) Beweisen Sie, dass Φ aus $C^1(X, Y)$ ist und geben Sie hierbei die Fréchet-Ableitung $D\Phi(u)$ von Φ in einem beliebigen $u \in X$ explizit an.

2) Beweisen Sie, dass $D\Phi(u)$ in einem beliebig fixierten $u \in X$ ein Isomorphismus von X auf Y ist. Verwenden Sie hierbei den folgenden Standard-Satz aus der Theorie linearer Systeme gewöhnlicher Differentialgleichungen:

   Theorem 0.1 *Es seien $A : [a, b] \to \mathrm{Mat}_{n,n}(\mathbb{R})$ und $g : [a, b] \to \mathbb{R}^n$, $-\infty < a < b < \infty$, stetige Funktionen. Dann existiert zu einem beliebigen Startvektor $\xi \in \mathbb{R}^n$ genau eine (,,globale") C^1–Lösung y_ξ des Anfangswertproblems*

   $$Y'(t) = A(t) \cdot Y(t) + g(t), \qquad Y(a) = \xi$$

   auf dem gesamten Intervall $[a, b]$.

3) Zeigen Sie nun hiermit, dass es ein $\delta \in (0, 1)$ gibt, sodass das nicht-lineare Anfangswertproblem 1. Ordnung

   $$u'(t) = f(t, u(t)), \qquad u(0) = 0$$

   eine C^1-Lösung auf dem ,,kurzen" Intervall $[0, \delta]$ besitzt. Kombinieren Sie hierfür das Resultat aus Aufgabenteil (2), ausgewertet in der Funktion $u_0(t) := f(0, 0)\, t \in X$, mit dem Umkehrsatz. Beachten Sie hierbei den Startwert $\Phi(u_0)(0)$ und benutzen Sie diesen, um aus $\Phi(u_0)$ eine geeignete Funktionenfamilie mit ,,ziemlich faulem Startverhalten" zu konstruieren.

Abgabetermin ist Montag, der 10.11.2014, in der Vorlesung.