Universität Tübingen
Fachbereich Mathematik

PD Dr. R. Jakob 10.11.2014

Nicht-lineare Funktionalanalysis
WS 2014/15
4.Übung

AUFGABE 9:
Es seien X, Y Banachräume und $L(X,Y)$ der Banachraum aller linearer, stetiger Abbildungen von X nach Y, versehen mit der Operatorennorm $\| T \| := \sup_{\|x\|_X \leq 1} \| T(x) \|_Y$. Desweiteren bezeichne $\mathcal{I}(X,Y)$ die Teilmenge aller (stetig) invertierbaren Abbildungen aus $L(X,Y)$ und $\mathrm{Inv} : \mathcal{I}(X,Y) \to \mathcal{I}(Y,X)$ die Inversenbildung $T \mapsto T^{-1}$. Zeigen Sie nun:

1) Ist T ein Operator aus $L(X,X)$ mit $\| T \| < 1$, so ist $\mathrm{Id}_X - T$ (stetig) invertierbar mit $(\mathrm{Id}_X - T)^{-1} = \sum_{j=0}^{\infty} T^j$.

2) Sei $T \in \mathcal{I}(X,Y)$ beliebig fixiert, so gilt für jedes $H \in L(X,Y)$ mit $\| H \| < \| T^{-1} \|^{-1}$: $T + H \in \mathcal{I}(X,Y)$. Welche topologische Eigenschaft folgt hieraus für die Teilmenge $\mathcal{I}(X,Y)$ von $L(X,Y)$?

3) Zeigen Sie, dass Inv in einem beliebig fixierten $T \in \mathcal{I}(X,Y)$ Fréchet-differenzierbar mit der Fréchet-Ableitung

$$D\mathrm{Inv}(T).H = -T^{-1} H T^{-1}$$

ist, indem Sie $T + H = T(\mathrm{Id}_X + (T^{-1}H))$ für „hinreichend kleine Störungen" $H \in L(X,Y)$ schreiben und für die Berechnung von $\mathrm{Inv}(T+H) - \mathrm{Inv}(T) - \ldots$ das Resultat des ersten Aufgabenteils auf $-T^{-1}H$ anwenden ! Ist $D\mathrm{Inv}(T)$ tatsächlich ein stetiger Operator von $L(X,Y)$ nach $L(Y,X)$? Wie kann man in diesem Fall die Operator-Norm von $D\mathrm{Inv}(T)$ nach oben abschätzen ?

AUFGABE 10:
Sei $X := L^1(A, \mathcal{L}^n)$ für eine $\mathcal{L}^n-$messbare Teilmenge A des $\mathbb{R}^n$ mit $\mathcal{L}^n(A) > 0$ und $Y := \mathbb{R}$, und beweisen Sie:

1) Die L^1-Norm $f := \| \cdot \|_{L^1(A)}: X \to \mathbb{R}$ besitzt in einer beliebigen Funktion $u \in X$ die Richtungsableitung

$$\partial_v f(u) = \int_{[u>0]} v \, d\mathcal{L}^n - \int_{[u<0]} v \, d\mathcal{L}^n + \int_{[u=0]} | \, v \, | \, d\mathcal{L}^n,$$

und f ist in genau denjenigen $u \in X$ Gateaux-differenzierbar, welche $\mathcal{L}^n([u = 0]) = 0$ erfüllen. Wie lautet somit die Gateaux-Ableitung von f in all diesen $u \in X$?

2) Jedoch ist die L^1-Norm in keinem $u \in X$ Fréchet-differenzierbar.

Hinweis für den zweiten Aufgabenteil: Wählen Sie für ein $u \in L^1(A)$ mit $\mathcal{L}^n([u > 0]) > 0$ ein $M > 0$, sodass $\mathcal{L}^n([0 < u < M]) > 0$ ist, wählen Sie anschliessend ein $\mathcal{L}^n$-meßbares $B \subseteq [0 < u < M]$ mit beliebig kleinem Mass und betrachten Sie als Störungsfunktion $v := -2M\chi_B$. Für ein $u \in L^1(A)$ mit $\mathcal{L}^n([u \geq 0]) = 0$ empfiehlt sich eine ähnliche Vorgehensweise, nun jedoch mit der Störungsfunktion $v := 2M\chi_B$, für geeignetes M und B.

AUFGABE 11:

Es seien X, Y Banachräume, U eine offene Teilmenge von X und $F : U \to Y$ eine Abbildung der Klasse $C^1(U, Y)$. Desweiteren sei $X = X_1 \oplus X_2$ eine direkte Summe zweier abgeschlossener Untervektorräume X_1, X_2, d.h. jedes Element $x \in X$ kann in der Form $x = x_1 + x_2$ für eindeutige $x_1 \in X_1$ und $x_2 \in X_2$ geschrieben werden, und X_1, X_2 sind Banach-Unterräume von X mit $X_1 \cap X_2 = \{0\}$. Prüfen Sie, ob man unter diesen Voraussetzungen die beiden partiellen Fréchet-Ableitungen $D_{x_i}F(x)$ in fixiertem $x \in U$ als lineare Operatoren $T_i \in L(X_i, Y)$ definieren kann, die

$$\| F(x + h_i) - F(x) - T_i(h_i) \|_Y = o(\| h_i \|_X) \qquad \text{für } \| h_i \|_X \to 0$$

und $i = 1, 2$ erfüllen. Falls Ihre Prüfung positiv ausfallen sollte, so wäre sicherlich eine simple Beziehung zwischen $D_{x_i}F(x)$ und der Einschränkung von $DF(x)$ auf X_i zu erwarten. Ist diese Vermutung korrekt oder etwa eine böse Falle ? Können Sie insbesondere die anhand der Analysis II-Vorlesung bekannt wirkende Formel

$$DF(x).h = D_{x_1}F(x).h_1 + D_{x_2}F(x).h_2$$

in einem beliebig fixierten Punkt $x \in U$ in Richtung eines beliebigen $h = h_1 + h_2 \in X_1 \oplus X_2$ bestätigen ?

Abgabetermin ist Montag, der 17.11.2014, in der Vorlesung.