Universität Tübingen
Fachbereich Mathematik

PD Dr. R. Jakob 17.11.2014

Nicht-lineare Funktionalanalysis
WS 2014/15
5.Übung

AUFGABE 12:
Beweisen Sie Theorem 4.0.3 der Vorlesung:

Theorem 0.1 *Seien X und Y Banachräume, $U \subset X$ eine offene Teilmenge und $f \in C^1(U, Y)$ erfülle in einem Punkt $x_0 \in X$:*

1) $\mathrm{Bild}(Df(x_0)) = Y$.

2) Es existiert ein abgeschlossener Untervektorraum $\mathcal{W} \subset X$ mit $\mathcal{W} \oplus \mathrm{Kern}(Df(x_0)) = X$.

Dann existiert ein $\rho > 0$, sodass $f\,|_{B_\rho(x_0)}$ eine offene Abbildung ist, d.h. sodass die Einschränkung von f auf $B_\rho(x_0)$ offene Teilmengen von $B_\rho(x_0)$ auf offene Teilmengen von Y abbildet.

Wenden Sie hierzu das Resultat von Aufgabe 11 auf die direkte Summe $\mathcal{W} \oplus \mathrm{Kern}(Df(x_0)) = X$ an, um zunächst zu zeigen, dass die partielle Fréchet-Ableitung $D_w f(x_0)$ ein Isomorphismus von $\mathcal{W}$ auf Y ist. Definieren Sie anschliessend mittels f eine Abbildung $F : U \to \mathrm{Kern}(Df(x_0)) \times Y$, um den Umkehrsatz (Theorem 4.0.2) erfolgreich auf F (anstatt auf f) anwenden zu können !

AUFGABE 13:
Seien X, Y Banachräume und $M \subset X$ eine nicht-leere Teilmenge. Wir nennen eine Abbildung $f : M \to Y$ kompakt, falls sie stetig auf M ist und falls für jede beschränkte Teilmenge $B \subset M$ der Abschluss von $f(B)$ eine kompakte Teilmenge von Y ist. Zeigen Sie:

1) Ist $\{T_n\}$ eine Folge linearer, kompakter Operatoren aus $L(X, Y)$ mit $\| T_n - T \| \to 0$, so ist der Limes-Operator T ($\in L(X, Y)$ natürlich) ebenfalls ein kompakter linearer Operator von X nach Y. (Mein Tipp: Diagonalfolge konstruieren !)

2) Sei $M \subset X$ nicht-leer und beschränkt. Eine Abbildung $f : M \to Y$ ist genau dann kompakt, falls es eine Folge stetiger, beschränkter Abbildungen $f_n : M \to Y$ mit $\mathrm{Bild}(f_n) \subset Y_n$ für endlich dimensionale Unterräume Y_n von Y gibt, die gleichmässig gegen f konvergieren, d.h. sodass zu jedem $\epsilon > 0$ ein $N(\epsilon) \in \mathbb{N}$ mit $\| f_n(x) - f(x) \|_Y < \epsilon$ für alle $x \in M$ und alle $n > N(\epsilon)$ gilt. (Überdecken Sie zunächst $\overline{f(M)}$ durch endlich viele Bälle mit gleichen, beliebig kleinen Radien ϵ und konstruieren Sie mittels dieser Überdeckung eine geeigntete Partition der Eins auf

M, um mit dieser eine vielversprechende Approximation f_ϵ an f zu definieren.)

AUFGABE 14:

Verwenden Sie Aufgabe 13, um zu beweisen: Sei $U \subset X$ eine nicht-leere, offene Teilmenge und $f \in C^1(U,Y)$ eine kompakte Abbildung, so ist deren Fréchet-Ableitung $Df(x)$ in jedem fixierten Punkt $x \in U$ ein kompakter linearer Operator von X nach Y. Nehmen Sie hierfür an, dass man eine kompakte C^1-Abbildung $f : U \to Y$ auf einem kleinen Ball $B_\delta(x) \subset U$ um einen fixierten Punkt $x \in U$ durch Abbildungen f_n wie in Aufgabe 13, (2), gleichmässig approximieren kann, die zusätzlich von der Klasse C^1 sind.

Abgabetermin ist Montag, der 24.11.2014, in der Vorlesung.