Universität Tübingen
Fachbereich Mathematik

PD Dr. R. Jakob 24.11.2014

Nicht-lineare Funktionalanalysis
WS 2014/15
6.Übung

AUFGABE 15:
Sei X ein Banachraum und $K \in L(X,X)$ ein kompakter, linearer Operator. Beweisen Sie:

1) $\mathrm{Kern}(\mathrm{Id}_X - K)$ ist endlich-dimensional.
2) $\mathrm{Bild}(\mathrm{Id}_X - K)$ ist ein abgeschlossener Untervektorraum von X.
3) $\mathrm{Id}_X - K$ ist ein Fredholm-Operator.

Verwenden Sie für Teil (1), dass lokal-kompakte Banachräume bereits endlich-dimensional sein müssen. Für Teil (2) sollten Sie verwenden, dass ein endlich-dimensionaler Unterraum eines Banachraums ein abgeschlossenes Komplement $\tilde{X}$ besitzt, sodass man hier die Aufspaltung $X = \tilde{X} \oplus \mathrm{Kern}(\mathrm{Id}_X - K)$ erhält. Beweisen Sie anschliessend, dass es ein $c_0 > 0$ geben muss, sodass

$$\| (\mathrm{Id}_X - K)(\tilde{x}) \|_X \geq c_0 \| \tilde{x} \|_X \qquad \forall\, \tilde{x} \in \tilde{X}$$

gilt. Für Teil (3) dürfen Sie verwenden, dass mit K auch sein adjungierter Operator K^* kompakt ist.

AUFGABE 16:
Wir definieren den Vektorraum l^2 als die Menge aller Folgen $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ aus $\mathbb{R}$ mit $\| \{x_i\}_{i\in\mathbb{N}} \|^2 := \sum_{i\in\mathbb{N}} x_i^2 < \infty$, der mit dem Skalarprodukt $\langle \{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}, \{y_i\}_{i\in\mathbb{N}} \rangle := \sum_{i\in\mathbb{N}} x_i\, y_i$ ein Hilbertraum wird. Mittels des Orthonormalsystems $e_j := \{\delta_{ij}\}_{i\in\mathbb{N}}$, $j \in \mathbb{N}$, definieren wir den linearen Operator $T : l^2 \to l^2$ durch $T(e_i) = \lambda_i\, e_i$, $\lambda_i \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass T genau dann stetig ist, wenn $\sup_{i\in\mathbb{N}} | \lambda_i | < \infty$ ist, und dass T genau dann kompakt ist, wenn $\lambda_i \to 0$ gilt.

Hinweis: Betrachten Sie zur Lösung des zweiten Aufgabenteils bei einer Beweisrichtung die endlich-dimensionalen Unterräume $X_n := \mathrm{Span}(e_1, \ldots, e_n)$ und konstruieren Sie zu jedem n einen Punkt $x_n \in X_n \setminus X_{n-1}$, dessen Distanz zu $X_{n-1} \geq 1/2$ ist und der die l^2-Länge 1 hat. Bei der anderen Beweisrichtung (des zweiten Aufgabenteils) sollten Sie die Operatoren T_n, die durch $T_n(e_i) := \lambda_i e_i$ für $i \leq n$ und $T_n(e_i) := 0$ für $i > n$ definiert sind, in Betracht ziehen....

AUFGABE 17:
Sei Z ein Unterraum eines Banachraums X, so definieren wir den Annulator $Z^\perp$ von Z durch

$$Z^\perp := \{\Lambda \in X^* \mid \Lambda(x) = 0 \text{ für alle } x \in Z\} \subset X^*.$$

Zeigen Sie: Ist $T \in L(X, Y)$, so gilt:

1) $\mathrm{Kern}(T^*) = \mathrm{Bild}(T)^\perp$.

2) Falls Z ein abgeschlossener Unterraum von X mit endlicher Kodimension ist, so gilt $\dim(Z^\perp) = \dim(X/Z)$.

3) Leiten Sie hieraus die Formel $\dim(\mathrm{Kern}(T^*)) = \dim(\text{Ko-Kern}(T))$ für einen beliebigen Fredholm-Operator $T \in L(X, Y)$ her.

Hinweis zu Teil (2): Spalten Sie $X = Z \oplus \mathrm{Span}\{x_1, \ldots, x_n\}$ für linear unabhängige Vektoren $x_1, \ldots, x_n$ auf und verwenden Sie, dass man mittels des Satzes von Hahn-Banach Funktionale $x'_j \in X^*$ konstruieren kann, die auf Z verschwinden und ausserdem $x'_j(x_i) = \delta_{ij}$ erfüllen.

Abgabetermin ist Montag, der 01.12.2014, in der Vorlesung.