Universität Tübingen
Fachbereich Mathematik

PD Dr. R. Jakob 01.12.2014

Nicht-lineare Funktionalanalysis
WS 2014/15
7.Übung

AUFGABE 18:
Sei X ein Banachraum und $M \subset X$ eine beliebige Teilmenge von X. Beweisen Sie:

1) $M^\perp$ ist abgeschlossener Unterraum von X^*, und dieser ist ausserdem abgeschlossen bezüglich der schwach$-*-$Topologie von X^*.

2) Der Annulator von $M^\perp$ (in X) ist exakt $\overline{\mathrm{Span}(M)}$.

AUFGABE 19:
Sei $T \in L(X, Y)$ und $T^* \in L(Y^*, X^*)$ sein adjungierter Operator.

1) Beweisen Sie, dass der Annulator von Bild(T^*) gerade Kern(T) ist und dass auch umgekehrt Bild$(T)^\perp =$ Kern(T^*) gilt.

2) Beweisen Sie hiermit:

$$\mathrm{Bild}(T)\,\text{liegt dicht in}\,Y \Leftrightarrow T^*\,\text{ist injektiv,}$$
$$\mathrm{Bild}(T^*)\,\text{liegt dicht in}\,X^* \Leftrightarrow T\,\text{ist injektiv,}$$

wobei Sie für die zweite Äquivalenz annehmen dürfen, dass X reflexiv ist.

AUFGABE 20:
Wie in Aufgabe 16 betrachten wir den Hilbertraum l^2 aller Folgen $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ aus $\mathbb{R}$ mit $\| \{x_i\}_{i\in\mathbb{N}} \|^2 := \sum_{i\in\mathbb{N}} x_i^2 < \infty$, zusammen mit dem Orthonormalsystem $e_j := \{\delta_{ij}\}_{i\in\mathbb{N}}$, $j \in \mathbb{N}$.

1) Wir definieren die Operatoren $T_\pm : l^2 \to l^2$ durch $T_\pm(e_i) := e_{i\pm1}$, für $i \in \mathbb{N}$, wobei $e_0 = 0 \in l^2$ sei. Zeigen Sie, dass $T_\pm$ Fredholm-Operatoren sind, und versuchen Sie deren $F-$Indizes zu berechnen.

2) Nun definieren wir die linearen Operatoren $S_\pm : l^2 \to l^2$ durch $S_\pm(e_i) := (1 \pm \frac{1}{i})e_{i\pm1}$, für $i \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass $S_\pm$ Fredholm-Operatoren sind, und versuchen Sie deren $F-$Indizes zu berechnen. Versuchen Sie hierfür $S_\pm$ als Verkettung zweier, Ihnen bereits vertrauter Operatoren zu schreiben, und verwenden Sie ohne Bedenken die folgende Weisheit:

„Ist $K \in L(X, X)$ ein kompakter Operator, so ist $\mathrm{Id}_X - K$ genau dann (!) surjektiv, falls $\mathrm{Id}_X - K$ injektiv ist.

Abgabetermin ist Montag, der 08.12.2014, in der Vorlesung.

Advent, Advent, ein Lichtlein brennt !