Universität Tübingen
Fachbereich Mathematik

PD Dr. R. Jakob 08.12.2014

Nicht-lineare Funktionalanalysis
WS 2014/15
8.Übung

AUFGABE 21:
Es sei $T : l^2 \to l^2$ linear, stetig mit $T(e_i) = \lambda_i e_i, e_i = (\delta_{ij})_{j\in\mathbb{N}} \in l^2$ für jedes $i \in \mathbb{N}$, und $\liminf_{i\to\infty} |\lambda_i| > 0$. Zeigen Sie: T ist ein Fredholm-Operator mit $ind(T) = 0$.
Hinweis: Schreiben Sie $T = I - K$ mit einem Isomorphismus I und kompaktem Operator K.

AUFGABE 22:
Es sei $\emptyset \neq \Omega \subset\subset \mathbb{R}^n$ offen, $p \in (1,\infty)$ und $q := \frac{p}{p-1}$. Zeigen Sie, dass die Abbildung $T : L^q(\Omega) \to (\mathring{W}^{1,p}(\Omega))^*$, die durch

$$T(f).\phi := \int_\Omega f\,\phi\,d\mathcal{L}^n$$

definiert sei, ein kompakter, stetiger (linearer) Operator ist. Können Sie T raffiniert als Verkettung zweier berühmter Operatoren schreiben ? Beachten Sie hierbei, dass die Einbettung $R : \mathring{W}^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$ nach dem Satz von Rellich kompakt ist und dass die Zuordnung

$$f \mapsto \int_\Omega f\,\cdot\,d\mathcal{L}^n$$

einen Isomorphismus D (wie Dualität) von $L^q(\Omega)$ auf $(L^p(\Omega))^*$ liefert.

AUFGABE 23:
Es seien $\emptyset \neq \Omega \subset\subset \mathbb{R}^n$ offen, $a_{ij}, b_i, c_j, d \in L^\infty(\Omega)$ mit

$$\| a_{ij} \|_{L^\infty(\Omega)}, \| b_i \|_{L^\infty(\Omega)}, \| c_j \|_{L^\infty(\Omega)}, \| d \|_{L^\infty(\Omega)} < \Lambda$$

und $a_{ij}(x)$ eine symmetrische $(n\times n)-$Matrix, die ausserdem

$$a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq \frac{1}{\Lambda} \mid \xi \mid^2 \quad \text{für } \xi \in \mathbb{R}^n \text{ und jedes } x \in \Omega,$$

für ein $\Lambda > 0$ erfülle. Wir betrachten den elliptischen, linearen Differentialoperator

$$B := \int_\Omega (-\partial_i(a_{ij}\,\partial_j\ \cdot + b_i\,\cdot) - c_j\,\partial_j\ \cdot - d\,\cdot)(\,\cdot\,)\,d\mathcal{L}^n : \mathring{W}^{1,2}(\Omega) \longrightarrow \mathring{W}^{1,2}(\Omega)^*$$

2. Ordnung in Divergenzform.

1) Zeigen Sie zunächst, dass $B : \mathring{W}^{1,2}(\Omega) \times \mathring{W}^{1,2}(\Omega) \to \mathbb{R}$ eine stetige Bilinearform ist und anschliessend die Garding-Ungleichung, welche besagt, dass es eine Konstante $C(n, \Lambda) > 0$ gibt, sodass

$$B(u,u) \geq \frac{1}{4\Lambda} \parallel u \parallel^2_{W^{1,2}(\Omega)} - C(n,\Lambda) \parallel u \parallel^2_{L^2(\Omega)}$$

für alle $u \in \mathring{W}^{1,2}(\Omega)$ gilt (Cauchy-Schwarz !).

2) Versuchen Sie nun den kanonischen Isomorphismus $J : \mathring{W}^{1,2}(\Omega) \to \mathring{W}^{1,2}(\Omega)^*$, $v \mapsto \langle v, \cdot \rangle_{W^{1,2}(\Omega)}$, des Rieszschen Darstellungssatzes mit dem Satz von Lax-Milgram zu kombinieren, um den Operator $B + C(n,\Lambda)\, T \circ R$ als Verkettung zweier Isomorphismen zu entlarven. T und R seien hierbei wie in Aufgabe 22 für $p = 2$ definiert.

3) Ist B ein Fredholm-Operator ? Falls Ihre Antwort positiv ausfallen sollte, so können Sie wahrscheinlich auch dessen Index angeben !

Abgabetermin ist Montag, der 15.12.2014, in der Vorlesung.

Wenn mich nicht alles täuscht, dann brennen bereits zwei Lichtlein !