Universität Tübingen
Fachbereich Mathematik

PD Dr. R. Jakob 15.12.2014

Nicht-lineare Funktionalanalysis
WS 2014/15
9.Übung

AUFGABE 24:

In Anschluss an Aufgabe 23 betrachten wir das Eigenwert-Problem

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \phi \, d\mathcal{L}^n = \lambda \int_\Omega u \, \phi \, d\mathcal{L}^n \qquad \forall \phi \in \mathring{W}^{1,2}(\Omega) \tag{1}$$

des (negativen) Laplace-Operators auf einer offenen, beschränkten Teilmenge $\Omega \subset\subset \mathbb{R}^n$. Wir nennen ein Paar $(u, \lambda) \in \mathring{W}^{1,2}(\Omega) \times \mathbb{R}$ eine „schwache Eigenfunktion" u zum Eigenwert λ des (negativen) Laplace-Operators, falls (1) von (u, λ) erfüllt wird. Ausserdem sei für $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\mathrm{Eig}_\lambda(-\triangle) := \{\tilde{u} \in \mathring{W}^{1,2}(\Omega) \mid \text{Gleichung (1) gilt für das Paar } (\tilde{u}, \lambda)\}$$

der Eigenraum zur Eigen-Schwingung λ.

1) Geben Sie zunächst für den eindimensionalen Fall „$\Omega := (0, 2\pi)$" eine Orthonormalbasis $\{u_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ von $L^2(\Omega)$ durch Eigenfunktionen $u_j \in \mathring{W}^{1,2}((0, 2\pi))$ von $-\frac{d^2}{dt^2}$ explizit an. Verwenden Sie hierfür Theorem 6.0.10 aus der Vorlesung in Kombination mit Ihrem Wissen aus der Analysis-Vorlesung über gewöhnliche Differentialgleichungen 2. Ordnung. Wie lautet das Spektrum von $-\frac{d^2}{dt^2}$, und wie lauten die Eigenräume ?

2)* Verwenden Sie nun das Ergebnis aus Teil (1) der Aufgabe und Theorem 6.0.10 der Vorlesung, um eine Orthonormalbasis von $L^2(\Omega)$ für den offenen Quader $\Omega := (0, 2\pi)^n$ durch Eigenfunktionen von $-\triangle$ aus $\mathring{W}^{1,2}((0, 2\pi)^n)$ explizit anzugeben. Verschaffen Sie sich hierzu folgendermassen einen glas-klaren Überblick über das Spektrum und über die Eigenräume von $-\triangle$ auf Ω: Betrachten Sie für jeden Multi-Index $k = (k_1, k_2, \ldots, k_n) \in \mathbb{N}^n$ das Produkt $u_k(x) := \Pi_{i=1}^n u_{k_i}(x_i)$, mit $x = (x_1, \ldots, x_n)$, für ganz bestimmte Funktionen $u_j \in \mathring{W}^{1,2}((0, 2\pi))$, die Ihnen hoffentlich im ersten Aufgabenteil begegnet sind, verwenden Sie Induktion über die Dimension n von Ω und bedenken Sie, dass man anhand des ersten Aufgabenteils $L^2((0, 2\pi)) = \overline{\oplus_{j\in\mathbb{N}} \mathrm{Span}(u_j)}$ weiss und somit jede Funktion $u \in \mathring{W}^{1,2}((0, 2\pi)^n)$ bezüglich ihrer letzten Variablen eindeutig in Eigenschwingungen von $-\frac{d^2}{dt^2}$ zerlegen kann, d.h. bezüglich ihrer letzten Variablen „Fourier-analysieren" kann:

$$u(y, z) = \sum_{j\in\mathbb{N}} \langle u(y, \cdot), u_j \rangle_{L^2((0,2\pi))} \, u_j(z) \qquad \text{in } \mathcal{L}^1 - f.a.\, z := x_n \in (0, 2\pi)$$

und in $\mathcal{L}^{n-1}$–fast allen $y := (x_1, \ldots, x_{n-1}) \in \tilde{\Omega} := (0, 2\pi)^{n-1}$. Tatsächlich ist für jedes $f \in L^2(\Omega)$ die Funktion $z \mapsto f(y, z)$ in $\mathcal{L}^{n-1}$–fast allen $y \in (0, 2\pi)^{n-1}$ eine

$L^2((0,2\pi))$-Funktion nach dem Satz von Fubini. Dieser schlaue Satz hilft dann auch beim Induktionsschritt, wenn man die schwache Formulierung (1) des Eigenwert-Problems bei der Durchführung des Induktionsschritts verwendet.

3)* Wie lauten somit alle Eigenwerte von $-\triangle$ auf dem Quader $\Omega := (0,2\pi)^n$ und die zu diesen gehörenden Eigenräume präzise ? Kann man die Dimensionen der jeweiligen Eigenräume abschätzen oder sogar exakt berechnen ?

AUFGABE 25:

Beweisen Sie das Maximum-Prinzip der L^2-Theorie für den elliptischen, Divergenzform-Differentialoperator B aus Aufgabe 23:
Löst eine Funktion $u \in \mathring{W}^{1,2}(\Omega)$ die homogene schwache Gleichung $B(u) = 0$ auf Ω, d.h. gilt

$$\int_\Omega a_{ij}\,\partial_j u\,\partial_i\phi + b_i\,u\,\partial_i\phi - c_j\,\partial_j u\,\phi - d\,u\,\phi\,d\mathcal{L}^n = 0$$

$\forall\,\phi \in \mathring{W}^{1,2}(\Omega)$, und erfüllen die Koeffizienten b_i und d von B die Bedingung

$$\int_\Omega b_i\,\partial_i v - d\,v\,d\mathcal{L}^n \geq 0 \qquad \forall\,v \in \mathring{W}^{1,1}(\Omega) \quad \text{mit } v \geq 0, \tag{2}$$

so gilt bereits $u = 0$ $\mathcal{L}^n-$f.ü. auf Ω.

Abgabetermin ist Montag, der 12.01.2015, in der Vorlesung.

Genau ! Drei Lichtlein ! Oder nicht ?