Inhaltsverzeichnis

Nicht-lineare Funktionalanalysis

Ruben Jakob
Universität Tübingen, Fachbereich Mathematik

13. März 2015

1 Einführung

In dieser Vorlesung werden wir Methoden der linearen und nicht-linearen Funktionalanalysis erarbeiten, um die Existenz von Lösungen linearer partieller elliptischer Differentialgleichungen 2. Ordnung in Nicht-Divergenzform, also konkret von der Form

$$-a_{ij}\,\partial_{ij}(u) + b_i\,\partial_i(u) + c\,u = \varphi \qquad \text{auf } \Omega, \tag{1.1}$$

wobei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ eine beschränkte, offene Teilmenge sei, oder in Divergenzform, d.h. von der Form

$$-\partial_i(a_{ij}\partial_j u + b_i u) - c_j\partial_j(u) - du = \varphi + \operatorname{div}(\psi) \qquad \text{auf } \Omega \tag{1.2}$$

oder allgemeiner einer quasi-linearen, elliptischen Differentialgleichung der Form

$$-a_{ij}(\,\cdot, u, \nabla u)\,\partial_{ij}(u) + b(\,\cdot\,, u, \nabla u) = \varphi \qquad \text{auf } \Omega \tag{1.3}$$

beispielsweise unter der Randwertbedingung $u = 0$ auf $\partial\Omega$ und unter bestimmten Voraussetzungen an die Koeffizientenfunktionen dieser Gleichungen in verschiedenenen Funktionenräumen nachzuweisen. Im Fall <u>linearer</u> Differentialgleichungen besteht die Standardmethode darin, die linke Seite der Gleichungen (1.1), (1.2) als einen Operator

$$L := -a_{ij}\,\partial_{ij}\ \cdot + b_i\,\partial_i\ \cdot + c\,\cdot : X \to Y$$

bzw.

$$B := -\partial_i(a_{ij}\,\partial_j\ \cdot + b_i\,\cdot) - c_j\,\partial_j\ \cdot - d\,\cdot : X \to X^*$$

für adäquat gewählte Funktionenräume X, Y aufzufassen und mittels einer Kombination aus Sätzen der Theorie linearer partieller Differentialgleichungen 2. Ordnung und der Funktionalanalysis als einen Fredholmoperator oder spezieller als einen Isomorphismus zu entlarven. Im Fall quasi-linearer Differentialgleichungen ist dieser elegante Zugang nicht mehr möglich, da er zu simpel ist. In diesem Fall besteht eine Möglichkeit darin, anstatt der komplizierten Gleichung (1.3) das lineare Randwertproblem

$$\begin{aligned} -a_{ij}(\,\cdot, v, \nabla v)\,\partial_{ij}(u) + b(\,\cdot\,, v, \nabla v) &= \varphi \qquad \text{auf } \Omega \\ u &= 0 \quad \text{auf } \partial\Omega \end{aligned}$$

mit ,,eingefrorenen Koeffizienten" für v aus einem adäquaten Funktionenraum X mittels linearer Theorie eindeutig zu lösen, damit einen kompakten ,,Lösungsoperator" $f : X \to X$ zu konstruieren und schliesslich die Existenz mindestens eines Fixpunktes von f anhand eines geeigneten Theorems der <u>analytischen Fixpunkttheorie</u> nachzuweisen, welcher in der Tat eine Lösung von (1.3) ist. Ein anderer Zugang zur Lösung semi-linearer, elliptischer Differentialgleichungen, welche beispielsweise die Form

$$-a_{ij}\,\partial_{ij}(u) + b(u, \nabla u) = \varphi \qquad \text{auf } \Omega \tag{1.4}$$

für eine konstante, positiv-definite Matrix $\big(a_{ij}\big)$ haben, besteht im Gebrauch des Umkehrsatzes bzw. des Satzes über implizite Funktionen. Man betrachtet hierzu wieder die linke Seite von (1.4) als einen nicht-linearen Differential-Operator

$$F(u) := -a_{ij}\,\partial_{ij}(u) + b(u, \nabla u)$$

von einem Funktionenraum X in einen anderen Y. Falls man unter adäquaten Bedingungen an die störende Koeffizienten-Funktion $b(z, w^1, \dots, w^n)$ beweisen kann, dass F eine C^1-Abbildung auf einer kleinen Umgebung $\mathcal{U}$ um eine bestimmte Funktion $u_0 \in X$ ist und dass die Fréchet-Ableitung

$$DF(u_0).v = -a_{ij}\,\partial_{ij}v + \partial_{w^i}b(u_0, \nabla u_0)\,\partial_i v + \partial_z b(u_0, \nabla u_0)\,v$$

von F in u_0 ein Isomorphismus von X auf Y ist, so garantiert der Umkehrsatz zumindest die Existenz kleiner Umgebungen $\mathcal{U}_0$ um u_0 und $\mathcal{V}_0$ um $F(u_0)$ in X bzw. Y, sodass F $\mathcal{U}_0$ diffeomorph auf $\mathcal{V}_0$ abbildet. Insbesondere bedeutet dies, dass es zu jeder Funktion $\varphi \in \mathcal{V}_0$ genau eine Lösungsfunktion $u \in \mathcal{U}_0$ der semi-linearen, partiellen Differentialgleichung (1.4) auf Ω gibt. Die zentralen Hilfsmittel aus der Theorie der linearen partiellen Differentialgleichungen sind in diesem Zusammenhang

- a-priori-Abschätzungen und
- Maximum-Prinzipien

und aus der Funktionalanalysis:

- Der Satz von Lax-Milgram
- Umkehrsatz und Satz über implizite Funktionen
- Stetige und kompakte Einbettungen von Funktionenräumen
- Fredholm-Operatoren-Theorie
- Kontinuitätsmethode
- Analytische Fixpunkttheorie.

2 Banachräume

Definition 2.0.1. *a) Es sei X ein reeller Vektorraum. Eine Abbildung $\| \cdot \| \colon X \to [0, \infty)$ heisst eine "Norm" auf X, falls gilt:*

1) $\| x \| = 0 \Leftrightarrow x = 0.$

2) $\| \lambda x \| = | \lambda | \| x \|$, *für* $x \in X$ *und* $\lambda \in \mathbb{R}$.

3) $\| x + y \| \leq \| x \| + \| y \|$, *für* $x, y \in X$.

Wir nennen das Paar $(X, \| \cdot \|)$ einen normierten Vektorraum. Jede Norm $\| \cdot \|$ induziert eine Metrik durch

$$d(x, y) := \| x - y \| .$$

b) Eine Folge $\{x_l\} \subset X$ heisse eine Cauchy-Folge, falls es zu jedem $\epsilon > 0$ eine natürliche Zahl $K(\epsilon) \in \mathbb{N}$ mit $d(x_l, x_k) < \epsilon$ für $l, k > K(\epsilon)$ gibt. Falls jede Cauchy-Folge in X ein eindeutiges Grenzelement $x^* \in X$ besitzt, so nennen wir das Paar (X, d) "vollständig" oder kurz einen "Banachraum".
c) Wir nennen eine positiv-definite, symmetrische Bilinearform

$$\langle \cdot , \cdot \rangle : X \times X \to \mathbb{R}$$

ein "Skalarprodukt" auf X. Ein Skalarprodukt erzeugt eine Norm auf X durch

$$\| x \| := \sqrt{\langle x, x \rangle}.$$

Ist das somit entstandene Paar (X, d) vollständig, so nennen wir $(X, \langle \cdot , \cdot \rangle)$ einen "Hilbertraum".

Der Raum $L(X, Y)$ aller stetigen, linearen Abbildungen Λ zwischen zwei Banachräumen X und Y ist mit der "Operatoren-Norm"

$$\| \Lambda \| := \sup_{\|x\|_X \leq 1} \| \Lambda(x) \|_Y$$

wieder ein Banachraum. Insbesondere ist der "Dualraum" $X^* := L(X, \mathbb{R})$ aller linearen Funktionale auf X wieder ein Banachraum.

Beispiele: Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ im Folgenden eine offene, nicht-leere Teilmenge, und wir messen den Inhalt von Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ mit dem n-dimensionalen Lebesgue-Mass $\mathcal{L}^n$.

1) Für $p \in [1, \infty)$ ist der Raum

$$L^p(\Omega, \mathbb{R}) \equiv L^p(\Omega, \mathcal{L}^n) := \{u : \Omega \to [-\infty, \infty]\ \mathcal{L}^n\text{−messbar} \mid \int_\Omega \mid u(x) \mid^p \ d\mathcal{L}^n(x) < \infty\}$$

ausgestattet mit der Norm

$$\| u \|_{L^p(\Omega,\mathcal{L}^n)} := \big(\int_\Omega \mid u(x) \mid^p \ d\mathcal{L}^n(x)\big)^{1/p}$$

ein Banachraum. Für $p = 2$ liefert

$$\langle f, g \rangle_{L^2(\Omega)} := \int_\Omega f(x)\, g(x)\, d\mathcal{L}^n(x)$$

ein Skalarprodukt auf $L^2(\Omega)$, mit welchem $L^2(\Omega)$ ein Hilbertraum wird.

2) Der Raum

$$\begin{aligned} L^\infty(\Omega, \mathbb{R}) \equiv L^\infty(\Omega, \mathcal{L}^n) := \{u : \Omega \to [-\infty, \infty]\ \mathcal{L}^n - \text{messbar} \mid \\ \inf\{\lambda \in [0, \infty] \mid [\mid u \mid > \lambda] \,\text{ist eine}\, \mathcal{L}^n - \text{Nullmenge}\} < \infty\} \end{aligned}$$

der auf Ω beschränkten Funktionen und dessen Teilraum $C^0_b(\Omega, \mathbb{R})$ der auf Ω beschränkten und stetigen Funktionen sind ausgestattet mit der Supremumsnorm

$$\| u \|_{\sup} \equiv \| u \|_{L^\infty(\Omega,\mathcal{L}^n)} := \inf\{\lambda \in [0, \infty] \mid [\mid u \mid > \lambda] \,\text{ist eine}\, \mathcal{L}^n - \text{Nullmenge}\}$$

Banachräume.

3) Wir bezeichnen für $\gamma := (\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n) \in \mathbb{N}^n_0 \mid \gamma \mid := \gamma_1 + \gamma_2 + \ldots + \gamma_n$ und mit $D^\gamma u$ die iterierte partielle Ableitung

$$D^\gamma u := \frac{\partial^{\gamma_1}}{(\partial x_1)^{\gamma_1}} \circ \frac{\partial^{\gamma_2}}{(\partial x_2)^{\gamma_2}} \ldots \circ \frac{\partial^{\gamma_n}}{(\partial x_n)^{\gamma_n}}\,(u)$$

einer auf Ω $k-$fach stetig differenzierbaren Funktion u, für $k \geq \mid \gamma \mid$. Für $k \in \mathbb{N}$ ist der Raum

$$C^k_b(\Omega, \mathbb{R}) := \{u : \Omega \to \mathbb{R} \mid D^\gamma u \ \text{ existiere und sei beschränkt und stetig für } \mid \gamma \mid \leq k\}$$

ein Banachraum, falls man diesen mit der Norm

$$\| u \|_{C^k_b(\Omega)} := \sum_{|\gamma| \leq k} \| D^\gamma u \|_{\sup}$$

ausstattet.

4) Für $\alpha \in (0,1]$ definieren wir den Hölderquotienten

$$\text{höl}_{\Omega,\alpha}(u) := \sup_{x \neq y \in \Omega} \frac{| u(x) - u(y) |}{| x - y |^\alpha}$$

und für $k \in \mathbb{N}_0$ und $\alpha \in (0,1]$ den Hölderraum

$$C^{k,\alpha}(\Omega) := \{u \in C_b^k(\Omega, \mathbb{R}) \mid \text{höl}_{\Omega,\alpha}(D^\gamma u) < \infty, \quad \text{für } | \gamma | \leq k\},$$

der mittels der Norm

$$\| u \|_{C^{k,\alpha}(\Omega)} := \sum_{|\gamma| \leq k} \big(\| D^\gamma u \|_{\sup} + \text{höl}_{\Omega,\alpha}(D^\gamma u) \big)$$

ein Banachraum wird.

5) Für $k \in \mathbb{N}$ und $p \in [1,\infty)$ versehen wir den Raum $C_0^\infty(\Omega)$ der unendlich häufig stetig differenzierbaren Funktionen mit in Ω kompaktem Träger mit der "Sobolev-Norm"

$$\| u \|_{W^{k,p}(\Omega)} := \sum_{|\gamma| \leq k} \| D^\gamma u \|_{L^p(\Omega)} .$$

Dieses Paar ist nicht vollständig, jedoch dessen Vervollständigung:

$$W_0^{k,p}(\Omega) := \{u \in L^p(\Omega) \mid \text{Es existiert eine Cauchy-Folge } \{u_l\} \subset C_0^\infty(\Omega, \mathbb{R}) \text{ bzgl. } \| \cdot \|_{W^{k,p}} \text{ mit } \| u_l - u \|_{L^p(\Omega)} \to 0\}.$$

Ist nun ein $u \in W_0^{k,p}(\Omega)$ fixiert, so erhalten wir mittels einer Cauchy-Folge $\{u_l\} \subset C_0^\infty(\Omega, \mathbb{R})$ bzgl. der obigen $W^{k,p}-$Norm mit $\| u_l - u \|_{L^p(\Omega)} \to 0$ zunächst eindeutige Limites

$$u^\gamma := L^p - \text{Limes}_{l \to \infty}(D^\gamma u_l)$$

der Ableitungen $D^\gamma u_l$ im Raum $L^p(\Omega)$, da $L^p(\Omega)$ vollständig ist, und damit:

$$\int_\Omega u\, D^\gamma(\phi)\, d\mathcal{L}^n \leftarrow \int_\Omega u_l\, D^\gamma(\phi)\, d\mathcal{L}^n = (-1)^{|\gamma|} \int_\Omega D^\gamma(u_l)\, \phi\, d\mathcal{L}^n \to (-1)^{|\gamma|} \int_\Omega u^\gamma\, \phi\, d\mathcal{L}^n \tag{2.1}$$

für jedes $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$ mittels der Hölder-Ungleichung. Insbesondere zeigt die resultierende Gleichung, dass die L^p-Funktionen u^γ eindeutig durch u festgelegt sind. Daher nennt man diese zurecht die "schwachen Ableitungen" von u und schreibt suggestiv:

$$D^\gamma(u) := u^\gamma := L^p - \text{Limes}_{l \to \infty}(D^\gamma u_l)$$

für eine beliebige Funktion $u \in W_0^{k,p}(\Omega)$. Diese Konstruktion lieferte im Fall $p = \infty$ den recht kleinen und klassischen Raum $C_{\text{Null}}^k(\Omega)$ der k-fach stetig differenzierbaren Funktionen mit Nullrandwerten anhand der Vollständigkeit von $C_b^k(\Omega, \mathbb{R})$, für jedes $k \in \mathbb{N}$, also insbesondere keinen neuartigen Banachraum. Jedoch führen die Vollständigkeit von $L^p(\Omega, \mathbb{R})$ und $L^\infty(\Omega, \mathbb{R})$ und die Gleichung in (2.1) zu folgendem Banachraum für jedes $p \in [1,\infty]$:

6) Für $k \in \mathbb{N}$ und $p \in [1, \infty]$ definieren wir den "Sobolev-Raum"

$$W^{k,p}(\Omega) := \{u \in L^p(\Omega) \mid \text{Es existieren Funktionen}\, u^\gamma \in L^p(\Omega)\, \text{für} \mid \gamma \mid \leq k, \\ \text{welche die Gleichung in (2.1) erfüllen}\}.$$

Auch hier definiert man naheliegenderweise die "schwachen Ableitungen" von u durch $D^\gamma(u) := u^\gamma$. Versieht man den Raum $W^{k,p}(\Omega)$ und insbesondere dessen Teilraum $W_0^{k,p}(\Omega)$ (für $p < \infty$) mit der Norm

$$\| u \|_{W^{k,p}(\Omega)} := \sum_{|\gamma| \leq k} \| D^\gamma u \|_{L^p(\Omega)} := \sum_{|\gamma| \leq k} \| u^\gamma \|_{L^p(\Omega)},$$

so sind diese Räume in der Tat vollständig.

3 Stetigkeit und Differenzierbarkeit nicht-linearer Operatoren

Definition 3.0.2. *1) X, Y seien Banachräume, $M \subset X$ eine nichtleere Teilmenge und $f : M \to Y$ eine Abbildung. f heisse stetig in $x_0 \in M$, falls für eine beliebige Folge $\{x_i\} \subset M$ mit $\| x_i - x_0 \|_X \to 0$ die Konvergenz $\| f(x_i) - f(x_0) \|_Y \to 0$ in Y folgt.*

2) f heisse gleichmässig stetig, falls es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, sodass für zwei beliebige Punkte $x, y \in M$ mit $\| x - y \|_X < \delta$ bereits $\| f(x) - f(y) \|_Y < \epsilon$ folgt.

3) f heisse lokal beschränkt, falls zu jedem $x \in M$ ein $\delta > 0$ existiert, sodass das Bild $f(B_\delta(x))$ eine in Y beschränkte Menge ist.

4) f heisse beschränkt, falls f jede beschränkte Teilmenge von M in eine beschränkte Teilmenge von Y abbildet.

5) f heisse kompakt, falls f stetig auf M ist und falls für jede beschränkte Teilmenge $B \subset M$ der Abschluss von $f(B)$ eine kompakte Teilmenge von Y ist.

Stetige Abbildungen sind lokal beschränkt, jedoch im Allgemeinen nicht beschränkt, wie das folgende Beispiel zeigt:

Beispiel:
Wir betrachten den Raum $X := \{\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}} \mid \sum_{i=1}^{\infty} x_i^2 < \infty\}$ der quadrat-summablen Folgen natürlicher Zahlen, welcher mittels der l^2-Norm

$$\| \{x_i\} \|_{l^2} := \Big(\sum_{i=1}^{\infty} x_i^2\Big)^{1/2}$$

ein Hilbertraum ist, und dessen speziellen Elemente $e_j := \{\delta_{ji}\}_{i\in\mathbb{N}} = (0, 0, \ldots, 0, 1, 0, 0, \ldots)$. Wir konstruieren mittels dieser die Funktionen

$$\phi_j(x) := \max\{\frac{1}{4} - \| x - e_j \|, 0\}$$

und

$$\phi(x) := \sum_{j\in\mathbb{N}} j\, \phi_j(x).$$

Da $[\phi_j \neq 0] = B_{\frac{1}{4}}(e_j)$ und $\| e_i - e_j \| = \sqrt{2} > \frac{1}{2}$, $\forall\, i \neq j$, ist $\phi(x)$ in jedem $x \in X$ wohldefiniert, und ϕ ist stetig auf X. ϕ ist jedoch keine beschränkte Abbildung, denn es gilt $\phi(e_j) = \frac{j}{4}$ für jedes $j \in \mathbb{N}$, und andererseits $\| e_j \| = 1$.

Definition 3.0.3. *Seien X, Y Banachräume.*

1) *Wir nennen eine Folge $\{x_i\} \subset X$ gegen ein $x_0 \in X$ schwach konvergent, geschrieben: $x_i \rightharpoonup x_0$, falls*
$$\Lambda(x_i) \to \Lambda(x_0) \qquad \text{für } i \to \infty$$
für jedes lineare Funktional $\Lambda \in X^*$ gilt.

2) *Eine nicht-leere Teilmenge $M \subset X$ heisse schwach-abgeschlossen, falls für eine beliebige Folge $\{x_i\} \subset M$ mit $x_i \rightharpoonup x_0 \in X \quad x_0 \in M$ folgt.*

3) *Eine Abbildung $f : M \subset X \to Y$ heisse schwach-folgenstetig, falls für eine beliebige Folge $\{x_i\} \subset M$ mit $x_i \rightharpoonup x_0 \in M$ gilt: $f(x_i) \rightharpoonup f(x_0)$ schwach in Y.*

Proposition 3.0.1. *Seien X, Y Banachräume und X reflexiv. Sei $M \subset X$ eine nicht-leere, beschränkte, schwach-abgeschlossene Teilmenge und $f : M \to Y$ schwach-folgenstetig. Dann ist $f(M)$ eine beschränkte Teilmenge von Y.*

Beweis:
Wir nehmen an, dass die Aussage falsch ist. In diesem Fall existierte eine Folge $\{x_i\} \subset M$, für die
$$\| f(x_i) \|_Y \to \infty \quad \text{für } i \to \infty \tag{3.1}$$
gilt. Da M beschränkt und X reflexiv ist, besitzt $\{x_i\}$ eine schwach-konvergente Teilfolge $\{x_{i_j}\}$. Da M ausserdem abgeschlossen unter schwacher Konvergenz ist, existiert somit ein $x_0 \in M$ mit $x_{i_j} \rightharpoonup x_0$. Nach Voraussetzung an f folgt hieraus:
$$f(x_{i_j}) \rightharpoonup f(x_0) \quad \text{für } j \to \infty$$
und somit insbesondere $\| f(x_{i_j}) \|_Y \leq$ Konst. $\forall j \in \mathbb{N}$ nach dem Satz von Banach-Steinhaus. Dies widerspricht jedoch (3.1), und die Proposition ist bewiesen.

Definition 3.0.4. *X und Y seien Banachräume, $U \subset X$ eine nicht-leere, offene Teilmenge und $F : U \to Y$ eine Abbildung.*

1) *Wir definieren die Richtungsableitung von F in einem Punkt $x \in U$ in Richtung eines $h \in X$ durch:*
$$\partial_h F(x) := \lim_{t \searrow 0} \frac{F(x+th) - F(x)}{t},$$
falls dieser Limes in Y existiert.

2) *Wir nennen F in einem Punkt $x \in U$ Gateaux-differenzierbar, falls die Richtungsableitung von F in x existiert und ausserdem $\partial_h F(x)$ eine in h lineare, stetige Abbildung ist, d.h. falls ein Operator $T \in L(X, Y)$ mit*
$$\partial_h F(x) = T(h) \qquad \forall\, h \in X$$
existiert. In diesem Fall können wir also kurz $\partial F(x) = T : X \to Y$ notieren.

3) *F heisse Frechét-differenzierbar in einem fixierten Punkt $x \in U$, falls (genau) ein Operator $T \in L(X,Y)$ mit*

$$\| F(x+h) - F(x) - T(h) \|_Y = o(\| h \|_X) \qquad \text{für } \| h \|_X \to 0$$

existiert. Wir notieren in diesem Fall: $DF(x) := T$.

Wir sehen sofort, dass die Fréchet-Differenzierbarkeit einer Abbildung F in einem Punkt x die Gateaux-Differenzierbarkeit von F in x impliziert und dass in diesem Fall $DF(x) = \partial F(x)$ gilt. Dass diese beiden Differenzierbarkeits-Begriffe jedoch nicht äquivalent sind, zeigen die folgenden Beispiele:

Beispiele:

1) Wir wählen $X := L^1(A)$ für eine $\mathcal{L}^n-$messbare Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ mit $\mathcal{L}^n(A) > 0$ und $Y := \mathbb{R}$, und beweisen:
i) Die L^1-Norm $f :=\| \cdot \|_{L^1(A)}: X \to \mathbb{R}$ besitzt in einer beliebigen Funktion $u \in X$ die Richtungsableitung

$$\partial_v f(u) = \int_{[u>0]} v \, d\mathcal{L}^n - \int_{[u<0]} v \, d\mathcal{L}^n + \int_{[u=0]} | v | \, d\mathcal{L}^n,$$

und f ist in genau denjenigen $u \in X$ Gateaux-differenzierbar, welche $\mathcal{L}^n([u = 0]) = 0$ erfüllen, und zwar mit der Gateaux-Ableitung

$$\partial_v f(u) = \int_{[u>0]} v \, d\mathcal{L}^n - \int_{[u<0]} v \, d\mathcal{L}^n. \tag{3.2}$$

ii) Jedoch ist die L^1-Norm in keinem $u \in X$ Fréchet-differenzierbar.
Beweis:
i) Für beliebig fixierte $u, v \in X$ sehen wir für den Differenzenquotienten $D(u,v,t)(x) := \frac{|(u+tv)(x)|-|u(x)|}{t}$:

$$D(u,v,t)(x) \to \begin{cases} v(x) & : \text{ für } x \in [u > 0] \\ | v(x) | & : \text{ für } x \in [u = 0] \\ -v(x) & : \text{ für } x \in [u < 0] \end{cases}$$

für $t \searrow 0$. Da wir anhand der Dreiecks-Ungleichung $| D(u,v,t) | \leq | v |$ auf A für jedes $t \neq 0$ abschätzen können, erhalten wir aus dem Konvergenzsatz von Lebesgue in der Tat die behauptete Formel:

$$\partial_v f(u) = \lim_{t \searrow 0} \int_A D(u,v,t) \, d\mathcal{L}^n = \int_{[u>0]} v \, d\mathcal{L}^n - \int_{[u<0]} v \, d\mathcal{L}^n + \int_{[u=0]} | v | \, d\mathcal{L}^n.$$

Diese zeigt anhand ihres letzten Summanden, dass $v \mapsto \partial_v f(u)$ nicht linear sein kann, falls $\mathcal{L}^n([u = 0]) > 0$ ist. Gilt umgekehrt $\mathcal{L}^n([u = 0]) = 0$, so reduziert sich diese Formel für $\partial_v f(u)$ auf die rechte Seite von (3.2), welche in v linear ist und aussderdem der Abschätzung

$$\mid \partial_v f(u) \mid \leq \int_{[u>0]} \mid v \mid \, d\mathcal{L}^n \mid + \int_{[u<0]} \mid v \mid \, d\mathcal{L}^n = \parallel v \parallel_{L^1(A)}$$

genügt, welche die Stetigkeit der linearen Abbildung $v \mapsto \partial_v f(u)$ im Fall $\mathcal{L}^n([u = 0]) = 0$ beweist.

ii) Da f in einem $u \in X$ mit $\mathcal{L}^n([u = 0]) > 0$ nicht Gateaux-differenzierbar ist, genügt es zum Beweis der zweiten Behauptung eine Funktion $u \in X$ mit $\mathcal{L}^n([u = 0]) = 0$ zu betrachten. Wir nehmen zunächst $\mathcal{L}^n([u > 0]) > 0$ an, wählen eine Zahl $M > 0$, sodass $\mathcal{L}^n([0 < u < M]) > 0$ ist, und ausserdem eine $\mathcal{L}^n-$messbare Teilmenge $B \subset [0 < u < M]$ mit $\mathcal{L}^n(B) > 0$. Wir sehen nun bei der speziellen Wahl: $v := -2M\,\chi_B$:

$$\mid u+v \mid (x) - \mid u \mid (x) - v(x) \geq \begin{cases} 2M & : \text{ für } x \in B \\ 0 & : \text{ für } x \in A \setminus B. \end{cases}$$

Da bei dieser Wahl von v $\partial_v f(u) = \int_A v \, d\mathcal{L}^n$ wegen $B \subset [0 < u < M]$ und Formel (3.2) gilt, erhalten wir:

$$\parallel u+v \parallel_{L^1(A)} - \parallel u \parallel_{L^1(A)} - \partial_v f(u) = \int_A \mid u+v \mid - \mid u \mid - v \, d\mathcal{L}^n \geq 2M\,\mathcal{L}^n(B) = \parallel v \parallel_{L^1(A)},$$

was beweist, dass f in solch einem u nicht Fréchet-differenzierbar sein kann. Falls $u \in X$ sowohl $\mathcal{L}^n([u = 0]) = 0$ als auch $\mathcal{L}^n([u > 0]) = 0$ erfüllt, so muss $u < 0$ $\mathcal{L}^n-$f.ü. auf A gelten. In diesem Fall wählen wir eine Zahl $M > 0$, sodass $\mathcal{L}^n([-M < u < 0]) > 0$ ist, und eine $\mathcal{L}^n-$messbare Teilmenge $B \subset [-M < u < 0]$ mit $\mathcal{L}^n(B) > 0$. Bei der speziellen Wahl $v := 2M\,\chi_B$ erhalten wir nun:

$$\mid u+v \mid (x) - \mid u \mid (x) + v(x) \geq \begin{cases} 2M & : \text{ für } x \in B \\ 0 & : \text{ für } x \in A \setminus B. \end{cases}$$

Da bei dieser Wahl von v $\partial_v f(u) = -\int_A v \, d\mathcal{L}^n$ wegen $B \subset [-M < u < 0]$ und Formel (3.2) gilt, erhalten wir erneut:

$$\parallel u+v \parallel_{L^1(A)} - \parallel u \parallel_{L^1(A)} - \partial_v f(u) = \int_A \mid u+v \mid - \mid u \mid + v \, d\mathcal{L}^n \geq 2M\,\mathcal{L}^n(B) = \parallel v \parallel_{L^1(A)},$$

also dass f auch in solch einem u nicht Fréchet-differenzierbar sein kann.

2) Wir wählen $X = Y = L^1([0,\infty))$, versehen mit der Norm $\parallel x \parallel_X := \int_0^\infty \mid x(t) \mid \, dt$, und betrachten den Integral-Operator $F : X \to X$, der durch

$$F(x)(t) := \int_0^\infty k(t-s)\, f(x(s))\, ds, \qquad \text{für } t \geq 0$$

gegeben sei, wobei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine C^1-Funktion mit $f(0) = 0$ und beschränkter Ableitung $\mid f' \mid \leq c$ und $k \in L^1(\mathbb{R})$ mit $k \geq 0$ und $\int_0^\infty k(t)\, dt > 0$ seien. Wir beweisen:

1) $F : X \to X$ ist Lipschitz-stetig.
2) F ist in jedem Punkt $x \in X$ Gateaux-differenzierbar mit der Gateaux-Ableitung

$$\partial_h F(x) = \int_0^\infty k(\,\cdot\, - s)\, f'(x(s))\, h(s)\, ds. \tag{3.3}$$

3) F ist in $x = 0$ genau dann Fréchet-differenzierbar, falls f linear ist, also falls $f(r) = f'(0)\, r$ in jedem $r \in \mathbb{R}$ gilt. Insbesondere gibt es keinen Integral-Operator $F : X \to X$ (unter den obigen Voraussetzungen an f), der einerseits nicht-linear und andererseits Fréchet-differenzierbar in $x = 0$ ist.

Zu 1.) Wir fixieren ein $x \in X$. Zunächst ist die Funktion $(t, s) \mapsto k(t - s)\, f(x(s))$ messbar bzgl. $\mathcal{L}^2 = \mathcal{L}^1 \otimes \mathcal{L}^1$ auf $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ := [0, \infty) \times [0, \infty)$. Aus dem Satz von Fubini und den Voraussetzungen $\mid f' \mid \leq c$ und $f(0) = 0$ folgern wir:

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \int_0^\infty k(t - s) \mid f(x(s)) \mid ds\, dt = \int_0^\infty \int_0^\infty k(t - s) \mid f(x(s)) - f(0) \mid dt\, ds \\ \leq \| \, k \, \|_{L^1(\mathbb{R})} \; c \; \| \, x \, \|_X,\end{aligned}$$

also dass die Funktion $(t, s) \mapsto k(t - s)\, f(x(s))$ aus L^1 auf $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$ bzgl. $\mathcal{L}^1 \otimes \mathcal{L}^1$ ist. Der Satz von Fubini garantiert somit insbesondere, dass die Funktion $t \mapsto F(x)(t) = \int_0^\infty k(t - s)\, f(x(s))\, ds$ eine L^1-Funktion auf $\mathbb{R}_+$, also $F(x) \in X$ ist. Die obige Abschätzung zeigt bereits $\| \, F(x) \, \|_X \leq \| \, k \, \|_{L^1(\mathbb{R})} \; c \; \| \, x \, \|_X$, in jedem $x \in X$, und erneut zeigen der Satz von Fubini und die Voraussetzungen an f:

$$\begin{aligned}\| \, F(x) - F(y) \, \|_X = \int_0^\infty \mid \int_0^\infty k(t - s)\, f(x(s)) - f(y(s))\, ds \mid dt \\ \leq \int_0^\infty \int_0^\infty k(t - s) \mid f(x(s)) - f(y(s)) \mid dt\, ds \leq \| \, k \, \|_{L^1(\mathbb{R})} \; c \; \| \, x - y \, \|_X \;.\end{aligned}$$

2.) Wir fixieren $x, h \in X$ und $\lambda > 0$ beliebig und schätzen mittels des Hauptsatzes der Integral- und Differentialrechnung und des Satzes von Fubini ab:

$$\begin{aligned}& \| \, F(x + \lambda h) - F(x) - \lambda\, \partial_h F(x) \, \|_X \\ &= \int_0^\infty \mid \int_0^\infty k(t - s) \int_0^1 f'(x(s) + r\lambda\, h(s)) - f'(x(s))\, dr\, \lambda\, h(s)\, ds \mid dt \\ &\leq \lambda \; \| \, k \, \|_{L^1(\mathbb{R})} \int_0^\infty \int_0^1 \mid f'(x(s) + r\lambda\, h(s)) - f'(x(s)) \mid dr \; \mid h(s) \mid \; ds.\end{aligned} \tag{3.4}$$

Wegen $\mid f' \mid \leq c$ können wir den Konvergenzsatz von Lebesgue verwenden, um zuerst $\int_0^1 \mid f'(x(s) + r\lambda\, h(s)) - f'(x(s)) \mid dr \to 0$, für $\lambda \searrow 0$, in $\mathcal{L}^1-$fast jedem $s \in \mathbb{R}_+$, und anschliessend

$$\int_0^\infty \int_0^1 \mid f'(x(s) + r\lambda\, h(s)) - f'(x(s)) \mid dr \; \mid h(s) \mid \; ds \to 0$$

für $\lambda \searrow 0$, wegen $2c\,h \in L^1(\mathbb{R}_+)$, zu schliessen. Zusammen mit (3.4) beweist dies zunächst die Existenz der Richtungsableitung $\partial_h F(x)$ mit der in (3.3) behaupteten Formel. Die Stetigkeit von $\partial_h F(x)$ in h folgt nun sofort aus $\mid f' \mid \leq c$ und dem Satz von Fubini:

$$\| \partial_h F(x) \|_X \leq \int_0^\infty \int_0^\infty k(t-s) \mid f'(x(s)) \mid \mid h(s) \mid \, ds\, dt \leq \| k \|_{L^1(\mathbb{R})} \; c \; \| h \|_X \; .$$

Zu 3.) Angenommen, F sei in der Funktion $x = 0$ Fréchet-differenzierbar, so hiesse dies anhand der bereits in (3.3) berechneten Gateaux-Ableitung von F und wegen $f(0) = 0$, dass der Quotient

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\| h \|_X} \; \| F(0+h) - F(0) - DF(0).h \|_X \\ = &\frac{1}{\| h \|_X} \int_0^\infty \mid \int_0^\infty k(t-s) \big(f(h(s)) - f'(0)\, h(s) \big)\, ds \mid \, dt \end{aligned}$$

für $h \in X$ mit $\| h \|_X \to 0$ gegen Null streben müsste. Wir testen diese Behauptung nun mittels der L^1-Funktion $h(s) := r\, \chi_{[0,\delta]}(s)$, welche also auf einem beliebig kurzen Intervall $[0, \delta]$ einen konstanten Wert $r \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und auf dem Komplement von $[0, \delta]$ den konstanten Wert Null habe. Die obige Behauptung reduziert sich bei dieser Wahl von h wegen $\| h \|_X = \mid r \mid \delta$, $f(h) = f(r)\, \chi_{[0,\delta]}$ und $k \geq 0$ zu:

$$\frac{\mid f(r) - f'(0)\, r \mid}{\mid r \mid} \, \frac{1}{\delta} \int_0^\infty \int_0^\delta k(t-s)\, ds\, dt \to 0 \qquad \text{für } \delta \searrow 0. \tag{3.5}$$

Verwenden wir nun erneut den Satz von Fubini und substituieren wir anschliessend $\rho = t - s$, so erhalten wir:

$$\int_0^\infty \int_0^\delta k(t-s)\, ds\, dt = \int_0^\delta \int_{-s}^\infty k(\rho)\, d\rho\, ds.$$

Da wir zu jedem $\epsilon > 0$ ein $\bar{\delta} > 0$ mit $0 \leq \int_{-\delta}^0 k(\rho)\, d\rho < \epsilon$, für jedes $\delta \in (0, \bar{\delta})$, angeben können, sehen wir:

$$\mid \frac{1}{\delta} \int_0^\delta \int_{-s}^\infty k(\rho)\, d\rho\, ds - \int_0^\infty k(\rho)\, d\rho \mid = \mid \frac{1}{\delta} \int_0^\delta \int_{-s}^0 k(\rho)\, d\rho\, ds \mid < \epsilon \frac{\delta}{\delta} = \epsilon$$

für alle $\delta \in (0, \bar{\delta})$. Dies zeigt

$$\frac{1}{\delta} \int_0^\infty \int_0^\delta k(t-s)\, ds\, dt \to \int_0^\infty k(\rho)\, d\rho > 0 \qquad \text{für } \delta \searrow 0$$

und somit anhand von (3.5): $f(r) - f'(0)\, r = 0$, für jedes $r \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, und daher $f(r) = f'(0)\, r$ auf $\mathbb{R}$, also die behauptete Linearität von f. Ist umgekehrt f

linear, mit $f(0) = 0$, also $f(r) = ar$, so muss F insbesondere in $x = 0$ Fréchet-differenzierbar sein, da in diesem Fall F ein linearer, stetiger Operator von X nach X mit der stetigen Fréchet-Ableitung

$$DF(x).h = \int_0^\infty k(\cdot - s)\, a\, h(s)\, ds$$

in jedem $x \in X$ sein muss.

Proposition 3.0.2. *[Kettenregel] Es seien X, Y, Z Banachräume, $U \subset X$ und $V \subset Y$ offene, nicht-leere Teilmengen, und $f : U \to V$, $g : V \to Z$ in $x \in U$ bzw. in $y = f(x) \in V$ Fréchet-differenzierbare Abbildungen. Dann ist die Verkettung $g \circ f$ im Punkt x Fréchet-differenzierbar, und es gilt die übliche Verkettungsregel:*

$$D_x(g \circ f)(x) = D_y(g)(f(x)) \circ D_x f(x).$$

Beweis: Wir haben

$$\begin{aligned} f(x+h) &= f(x) + Df(x).h + o(\| h \|_X), \qquad \text{für } \| h \|_X \to 0 \qquad \text{und} \\ g(y+k) &= g(y) + Dg(y).k + o(\| k \|_Y), \qquad \text{für } \| k \|_Y \to 0. \end{aligned}$$

Somit folgt für die Verkettung $g \circ f$:

$$\begin{aligned} (g \circ f)(x+h) &= g(f(x+h)) = g(f(x) + [Df(x).h + o(\| h \|_X)]) \\ &= g(f(x)) + Dg(f(x)).[Df(x).h + o(\| h \|_X)] + o(Df(x).h + o(\| h \|_X)) \\ &= g(f(x)) + (Dg(f(x)) \circ Df(x)).h + o(\| h \|_X), \end{aligned}$$

wenn wir hierbei noch beachten, dass $Df(x)$ und $Dg(f(x))$ nach Voraussetzung an f und g beschränkte Operatoren sind und daher $\| Df(x).h \|_Y \leq \| Df(x) \| \| h \|_X$ und $\| Dg(f(x)).k \|_Z \leq \| Dg(f(x)) \| \| k \|_Y$ gilt. Die letzte Zeile der obigen Gleichungskette zeigt somit, dass $g \circ f$ im Punkt x Fréchet-differenzierbar mit Fréchet-Ableitung $D_x(g \circ f)(x) = D_y(g)(f(x)) \circ D_x f(x)$ ist.

Proposition 3.0.3. *[Produktregel] Es seien X, Y, Z, W Banachräume und $U \subset X$ eine offene, nicht-leere Teilmenge, $f : U \to Y$, $g : U \to Z$ in $x \in U$ Fréchet-differenzierbare Abbildungen und $B : Y \times Z \to W$ eine stetige, bilineare Abbildung. Dann ist die Komposition $B(f, g) : U \to W$ wieder in x Fréchet-differenzierbar mit Fréchet-Ableitung*

$$D_x(B(f,g))(x).h = B(Df(x).h, g(x)) + B(f(x), Dg(x).h).$$

Beweis: Wir haben

$$\begin{aligned} f(x+h) &= f(x) + Df(x).h + o(\| h \|_X), \qquad \text{für } \| h \|_X \to 0 \qquad \text{und} \\ g(x+h) &= g(x) + Dg(x).h + o(\| h \|_X), \qquad \text{für } \| h \|_X \to 0. \end{aligned}$$

Hieraus folgt nun anhand der Bilinearität von B:

$$\begin{aligned} B(f,g)(x+h) &= B(f(x)+Df(x).h+o(\| h \|_X), g(x)+Dg(x).h+o(\| h \|_X)) \\ &= B(f(x),g(x)) + B(Df(x).h, g(x)) + B(f(x), Dg(x).h) + R_h, \end{aligned}$$

wobei wir

$$\begin{aligned} R_h := B(f(x), o(\| h \|_X)) &+ B(Df(x).h, Dg(x).h + o(\| h \|_X)) \\ &+ B(o(\| h \|_X), g(x) + Dg(x).h + o(\| h \|_X)) \end{aligned}$$

setzten. Beachten wir nun die vorausgesetze Stetigkeit von B, also dass

$$\| B(y,z) \|_W \leq \| B \| \| y \|_Y \| z \|_Z$$

für alle $y \in Y$ und alle $z \in Z$ gilt, und dass $\| Df(x).h \|_Y \leq \| Df(x) \| \| h \|_X$ und $\| Dg(x).h \|_Z \leq \| Dg(x) \| \| h \|_X$ nach Voraussetzung an f und g gilt, so sehen wir leicht:

$$\| R_h \|_W = o(\| h \|_X) + O(\| h \|_X^2) + o(\| h \|_X^2) + o(\| h \|_X) + 2\, o(\| h \|_X^2) = o(\| h \|_X).$$

Dies zeigt in der Tat, dass die Komposition $B(f,g)$ wieder in x Fréchet-differenzierbar ist, und zwar mit der Fréchet-Ableitung $D_x(B(f,g))(x).h = B(Df(x).h, g(x)) + B(f(x), Dg(x).h)$.

Definition 3.0.5. *Sei U eine nicht-leere, offene Teilmenge eines Banachraums X und $F : U \to Y$ eine Abbildung in einen Banachraum Y.*

1) Ist F in jedem Punkt $x \in U$ stetig (nach Definition 3.0.2), so schreiben wir „$F \in C^0(U,Y)$".

2) Ist F in jedem Punkt $x \in U$ stetig und Fréchet-differenzierbar, so erhalten wir eine Abbildung $DF : U \longrightarrow L(X,Y)$. Falls diese wiederum stetig ist, also falls

$$\| DF(x+\eta) - DF(x) \| = \sup_{\|h\|_X \leq 1} \| (DF(x+\eta) - DF(x)).h \|_Y \to 0 \qquad \text{für} \quad \| \eta \|_X \to 0$$

gilt, so nennen wir F „stetig differenzierbar" auf U und schreiben hierfür „$F \in C^1(U,Y)$".

Proposition 3.0.4. *[Mittelwertsatz] Es sei Y ein Banachraum und $F : [a,b] \to Y$ eine stetig differenzierbare Abbildung mit $\| F'(t) \|_Y \leq k$ für alle $t \in [a,b]$. Dann gilt:*

$$\| F(b) - F(a) \|_Y \leq k\,(b-a).$$

Beweis: Wir wählen ein beliebiges Funktional $\Lambda \in Y^*$ und betrachten die C^1-Funktion

$$\gamma(\cdot) := \Lambda \circ F(\cdot) : [a,b] \to \mathbb{R}.$$

Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung und die Kettenregel aus Proposition 3.0.2 liefern:

$$\Lambda(F(b) - F(a)) = \gamma(b) - \gamma(a) = \int_a^b \gamma'(t)\,dt = \int_a^b \Lambda(F'(t))\,dt. \tag{3.6}$$

Nach dem Satz von Hahn-Banach existiert ein Funktional $\Lambda \in Y^*$ mit $\| \Lambda \| = 1$ und $\Lambda(F(b) - F(a)) = \| F(b) - F(a) \|_Y$. Somit erhalten wir aus (3.6):

$$\| F(b) - F(a) \|_Y \leq \int_a^b \| F'(t) \|_Y \; dt \leq k\,(b-a).$$

Bemerkung 3.0.1. *Lässt sich X als eine direkte Summe zweier abgeschlossener Untervektorräume schreiben, $X = X_1 \oplus X_2$, ist weiterhin U eine offene Teilmenge von X und $F : U \to Y$ eine Abbildung der Klasse $C^1(U, Y)$, so können wir die beiden partiellen Fréchet-Ableitungen $D_{x_i}F(x)$ in fixiertem $x \in U$ als die eindeutigen, linearen Operatoren $T_i \in L(X_i, Y)$ definieren, die*

$$\| F(x + h_i) - F(x) - T_i(h_i) \|_Y = o(\| h_i \|_X) \qquad \text{für} \;\; \| h_i \|_X \to 0$$

und $i = 1, 2$ erfüllen. Da die Fréchet-Ableitung $DF(x)$ von F existiert und per Definition 3.0.4 der eindeutig bestimmte Operator T aus $L(X, Y)$ ist, welcher

$$\| F(x + h) - F(x) - T(h) \|_Y = o(\| h \|_X) \qquad \text{für} \;\; \| h \|_X \to 0$$

erfüllt, existieren die partiellen Ableitungen $D_{x_i}F(x)$ in der Tat in $L(X_i, Y)$ und sind gerade durch $D_{x_i}F(x).h_i = DF(x).h_i$, für jedes $h_i \in X_i$ und $i = 1, 2$, gegeben. Insbesondere beweist dies die (bereits aus der Analysis-II-Vorlesung bekannte) Formel

$$DF(x).h = D_{x_1}F(x).h_1 + D_{x_2}F(x).h_2$$

falls $h = h_1 + h_2 \in X_1 \oplus X_2$ zerlegt ist.

4 Satz über implizite Funktionen und Umkehrsatz

Wir kommen nun zum klassischen Satz über ,,implizite Funktionen" und zum Umkehrsatz für stetig differenzierbare Abbildungen zwischen Banach-Räumen. Hierzu beweisen wir zunächst das folgende Korollar des Banachschen Fixpunktsatzes:

Proposition 4.0.5. *Seien Y ein Banachraum und $S : \bar{B}_\delta(0) \subset Y \to Y$ eine Kontraktion, d.h. eine stetige Abbildung mit*

$$\| S(y_1) - S(y_2) \| \leq k \| y_1 - y_2 \|$$

für ein $k \in (0,1)$. Ausserdem gelte $\| S(0) \| < \delta\,(1-k)$. Dann hat die Abbildung S genau einen Fixpunkt, und dieser liegt ausserdem im offenen Ball $B_\delta(0)$.

Beweis: Wir folgern zunächst aus Kombination beider Bedingungen an S:

$$\| S(y) \| \leq \| S(y) - S(0) \| + \| S(0) \| \leq k \| y \| + \| S(0) \| < k\delta + \delta\,(1-k) = \delta, \quad (4.1)$$

für jeden Punkt $y \in \bar{B}_\delta(0)$, also dass das Bild von S im offenen Ball $B_\delta(0)$ enthalten sein muss. Somit folgt die erste Aussage der Proposition aus dem Banachschen Fixpunktsatz. Für den eindeutigen Fixpunkt y^* von S schliessen wir mittels (4.1):

$$\| y^* \| = \| S(y^*) \| < \delta,$$

also $y^* \in B_\delta(0)$.

Theorem 4.0.1. *[Satz über implizite Funktionen] Seien X, Y, Z Banachräume, $U \subset X$ und $V \subset Y$ offene Umgebungen zweier fixierter Punkte $x_0 \in X$, $y_0 \in Y$ und $F : U \times V \to Z$ eine stetige und in $y \in V$ stetig differenzierbare Abbildung. Desweiteren gelte $F(x_0, y_0) = 0$ und die Fréchet-Ableitung $D_yF(x_0, y_0) : Y \to Z$ sei ein Isomorphismus, d.h. es gelte $(D_yF(x_0, y_0))^{-1} \in L(Z, Y)$. Dann existieren abgeschlossene Bälle $\bar{B}_r(x_0)$ und $\bar{B}_\delta(y_0)$ um x_0 und y_0 in U bzw. V und genau eine Abbildung $T : B_r(x_0) \to B_\delta(y_0)$ mit $T(x_0) = y_0$ und $F(x, T(x)) = 0$ für jedes $x \in B_r(x_0)$. Die Abbildung T ist ausserdem stetig.*

Beweis:
Da wir anstatt F die Abbildung $\tilde{F}(x, y) := F(x + x_0, y + y_0)$ auf $(U - x_0) \times (V - y_0)$ betrachten können, dürfen wir ohne Einschränkung der Allgemeinheit $x_0 = 0$ und $y_0 = 0$

annehmen. Wir setzen $L := D_yF(0,0)$ und $I := \mathrm{Id}_Y$. Da L ein Isomorphismus ist, erfüllt zu fixiertem $x \in U$ ein $y \in V$ die Gleichung $F(x,y) = 0$ genau dann, wenn y die Gleichung

$$y = y - L^{-1}F(x,y)$$

erfüllt, also genau dann, wenn y ein Fixpunkt der Abbildung $S(x,\,\cdot\,) := I - L^{-1}F(x,\cdot\,) : V \to Y$ ist. Somit wird die erste Behauptung des Satzes folgen, falls wir die obige Version des Banachschen Fixpunktsatzes auf $S(x,\,\cdot\,)$ anwenden können. Wir bemerken zunächst, dass $S(x,\,\cdot\,)$ anhand der Voraussetzung an F stetig nach y differenziert werden kann, also dass die Fréchet-Ableitung $D_yS(x,y)$ in jedem Punkt $(x,y) \in U \times V$ existiert und dass D_yS eine stetige Abbildung von $U \times V$ nach $L(Y,Y)$ ist. Desweiteren ist $D_yS(0,0) = 0-$Operator. Somit können wir zu einem beliebig fixierten $k \in (0,1)$ ein $\delta > 0$ mit $\| D_yS(x,y) \| \leq k$ für alle $(x,y) \in \bar{B}_\delta(0) \times \bar{B}_\delta(0)$ angeben. Zusammen mit den Propositionen 3.0.2 und 3.0.4 folgt hieraus:

$$\| S(x,y_1) - S(x,y_2) \|_Y \leq k \ \| y_1 - y_2 \|_Y \tag{4.2}$$

für alle $y_1, y_2 \in \bar{B}_\delta(0)$ und jedes feste $x \in \bar{B}_\delta(0)$. Da ausserdem $S(0,0) = 0$ gilt, folgt aus der Stetigkeit von S die Existenz eines $r \in (0,\delta)$, für welches $\| S(x,0) \|_Y < \delta\,(1-k)$ für alle $x \in \bar{B}_r(0)$ gilt. Aus obiger Proposition erhalten wir somit zu jedem fixierten $x \in \bar{B}_r(0)$ einen eindeutigen Fixpunkt $T(x) \in B_\delta(0)$ von $S(x,\,\cdot\,)$, wie gewünscht. Wegen $S(0,0) = 0$ folgt hieraus zunächst, dass $T(0) = 0$ gelten muss. Desweiteren ist T in der Tat stetig. Denn sind $x_1, x_2 \in \bar{B}_r(0)$ zwei beliebige Punkte, so erfüllen $T(x_1)$ und $T(x_2)$ die Gleichungen

$$T(x_1) - S(x_1, T(x_1)) = 0 = T(x_2) - S(x_2, T(x_2)),$$

und somit $\| T(x_1) - T(x_2) \|_Y = \| S(x_1,T(x_1)) - S(x_2,T(x_2)) \|_Y$. (4.2) liefert ausserdem:

$$\| S(x_1,T(x_1)) - S(x_1,T(x_2)) \|_Y \leq k \ \| T(x_1) - T(x_2) \|_Y \ .$$

Zusammen mit der Dreiecksungleichung folgt hieraus:

$$\begin{aligned} \| T(x_1) - T(x_2) \|_Y &= \| S(x_1,T(x_1)) - S(x_2,T(x_2)) \|_Y \\ &\leq k \ \| T(x_1) - T(x_2) \|_Y + \| S(x_1,T(x_2)) - S(x_2,T(x_2)) \|_Y \end{aligned}$$

und somit anhand der Stetigkeit von F und wegen $k \in (0,1)$:

$$\begin{aligned} \| T(x_1) - T(x_2) \|_Y &\leq \frac{1}{1-k} \ \| S(x_1,T(x_2)) - S(x_2,T(x_2)) \|_Y \\ &\leq \frac{\| L^{-1} \|}{1-k} \ \| F(x_1,T(x_2)) - F(x_2,T(x_2)) \|_Z \to 0 \end{aligned}$$

für $\| x_1 - x_2 \|_X \to 0$.

Betrachten wir hierzu das folgende

Beispiel: Es seien $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ eine beschränkte, offene, konvexe Teilmenge und $\alpha \in (0,1)$ fixiert. Wir setzen $X := \mathbb{R}$, $Y := C_0^{2,\alpha}(\Omega) := \{u \in C^{2,\alpha}(\Omega) \mid u \equiv 0 \quad \text{auf } \partial\Omega\}$ und $Z := C^{0,\alpha}(\Omega)$ und betrachten den parameterabhängigen, nicht-linearen Differential-Operator

$$F(\mu, u) := -a_{ij}\,\partial_{ij}u + \mu\,u + f(u),$$

wobei $\left(a_{ij}\right)$ eine konstante, positiv-definite $n \times n-$Matrix, $f \in C^{1,1}(\mathbb{R})$ mit $f(0) = 0$ und μ ein reeller Parameter seien. Anhand einer Übungsaufgabe ergibt sich die Stetigkeit von $F : X \times Y \to Z$ und die Fréchet-Differenzierbarkeit bzgl. u von F, und ausserdem dass die Fréchet-Ableitung $D_uF(\mu,u) : C_0^{2,\alpha}(\Omega) \to C^{0,\alpha}(\Omega)$ von F in Richtung eines $v \in C_0^{2,\alpha}(\Omega)$ explizit durch

$$D_uF(\mu,u).v = -a_{ij}\,\partial_{ij}v + \mu\,v + f'(u)\,v$$

gegeben ist. Wegen

$$\begin{aligned}\| D_uF(\mu_1,u_1) - D_uF(\mu_2,u_2) \| &= \sup_{\|v\|_Y \leq 1} \| (\mu_1 - \mu_2)\,v + (f'(u_1) - f'(u_2))\,v \|_{C^{0,\alpha}(\Omega)} \\ &\leq | \mu_1 - \mu_2 | + 2\, \| f'(u_1) - f'(u_2) \|_{C^{0,\alpha}(\Omega)}\end{aligned}$$

folgt die Stetigkeit der Fréchet-Ableitung D_uF in $(\mu,u) \in \mathbb{R} \times C_0^{2,\alpha}(\Omega)$ wie die Stetigkeit von F aus den Voraussetzungen an f und anhand der Kompaktheit der Einbettung $C^{0,\beta}(\Omega) \hookrightarrow C^{0,\alpha}(\Omega)$, für jedes $\beta \in (\alpha, 1]$. Da ausserdem $F(\mu, 0) = 0$ für jedes $\mu \in \mathbb{R}$ gilt, erfüllt die Abbildung $F : X \times Y \to Z$ alle Voraussetzungen von Theorem 4.0.1, sobald wir garantieren können, dass $D_uF(\mu_0, 0) = -a_{ij}\,\partial_{ij} \cdot + (\mu_0 + f'(0)) \cdot$ ein Isomorphismus von $C_0^{2,\alpha}(\Omega)$ auf $C^{0,\alpha}(\Omega)$ für ein adäquat gewähltes μ_0 ist. Wir werden später mittels einer Kombination der Kontinuitätsmethode, a-priori-Abschätzungen der Schauder-Theorie und des Maximumprinzips folgern, dass dies in der Tat der Fall ist, sobald $\mu_0 + f'(0) \geq 0$ ist ! Theorem 4.0.1 garantiert uns somit, dass es zu jedem fixierten $\mu_0 \geq -f'(0)$ ein kleines Intervall $(\mu_0 - r_0, \mu_0 + r_0)$ und genau eine stetige Abbildung $T : (\mu_0 - r_0, \mu_0 + r_0) \to B_\delta(0) \subset C_0^{2,\alpha}(\Omega)$ gibt, sodass zu jedem $\mu \in (\mu_0 - r_0, \mu_0 + r_0)$ die Funktion $T(\mu)$ die eindeutige Lösung der partiellen Differentialgleichung

$$F(\mu,u) = -a_{ij}\,\partial_{ij}u + \mu\,u + f(u) = 0 \qquad \text{auf } \Omega$$

im Ball $B_\delta(0) \subset C_0^{2,\alpha}(\Omega)$ ist. Da die Nullfunktion zu jedem $\mu \in \mathbb{R}$ eine Lösung dieser Gleichung ist, folgt aus diesem Ergebnis insbesondere, dass es zu keinem $\mu \geq -f'(0)$ eine nicht-triviale Lösung dieser nicht-linearen partiellen Differentialgleichung im Ball $B_\delta(0) \subset C_0^{2,\alpha}(\Omega)$ geben kann.

Als eine einfache Konsequenz des Satzes über implizite Funktionen erhalten wir

Theorem 4.0.2. *[Umkehrsatz] Seien X und Y Banachräume, U_0 eine Umgebung eines Punktes $x_0 \in X$ und $G : U_0 \to Y$ eine stetig differenzierbare Abbildung, deren Fréchet-Ableitung $DG(x_0)$ ein Isomorphismus von X auf Y sei. Dann ist G ein lokaler*

Diffeomorphismus um x_0, d.h. dann existiert eine Umgebung $U \subset U_0$ von x_0, sodass $G\mid_U$ ein Homöomorphismus von U auf eine Umgebung von $y_0 := G(x_0)$ ist, und dessen inverse Abbildung $(G\mid_U)^{-1}$ ist wieder von der Klasse C^1 auf einer kleinen Umgebung $V \subset G(U)$ von y_0. Hierbei gilt die Formel:

$$D((G\mid_U)^{-1})(G(x)) = (DG(x))^{-1} \qquad \text{in jedem } x \in (G\mid_U)^{-1}(V). \tag{4.3}$$

Beweis: Wir betrachten die stetige Abbildung $F(x,y) := G(x) - y$ von $U_0 \times Y$ nach Y und sehen wegen $F(x_0, y_0) = G(x_0) - y_0 = 0$ und $D_xF(x,y) = DG(x)$, in jedem $(x,y) \in U_0 \times Y$, dass F alle Bedingungen von Theorem 4.0.1 um den Punkt (x_0, y_0) erfüllt, wenn wir $Z := Y$ setzen und die Rollen von X und Y in Theorem 4.0.1 vertauschen. Somit erhalten wir die Existenz abgeschlossener Bälle $\bar{B}_r(y_0) \subset Y$ und $\bar{B}_\delta(x_0) \subset U_0$ um y_0 und x_0 und eine eindeutige, stetige Abbildung $T : B_r(y_0) \to B_\delta(x_0)$ mit $T(y_0) = x_0$ und $F(T(y), y) = 0$, also

$$G(T(y)) = y, \quad \text{für jedes } y \in B_r(y_0). \tag{4.4}$$

Dies zeigt zunächst, dass $T(B_r(y_0))$ das Urbild der stetigen Einschränkung $G\mid_{T(B_r(y_0))}$ des offenen Balls $B_r(y_0)$ ist, woraus zusammen mit $T(y_0) = x_0$ folgt, dass $U := T(B_r(y_0))$ eine offene Umgebung von x_0 in U_0 ist. Desweiteren ist G eine Bijektion von U auf sein Bild $B_r(y_0)$ in Y, denn sind $x_1 \neq x_2 \in U$ beliebig gewählt, so können wir anhand der Wahl von U zwei verschiedene Punkte $y_1, y_2 \in B_r(y_0)$ mit $T(y_i) = x_i$, $i = 1, 2$, angeben. Aus (4.4) folgt nun

$$G(x_1) = G(T(y_1)) = y_1 \neq y_2 = G(T(y_2)) = G(x_2).$$

Somit ist G in der Tat eine stetige Bijektion von $U = T(B_r(y_0))$ auf $B_r(y_0)$ mit stetiger Inversen $T : B_r(y_0) \xrightarrow{\cong} U$. Nun haben wir noch die Vermutung zu beweisen, dass die Inverse der Fréchet-Ableitung DG in einem Punkt $T(y)$ tatsächlich die Fréchet-Ableitung DT der Inversen T in y aus einer kleinen Umgebung V von y_0 ist. Da DG und T stetig sind und $DG(x_0)$ ein Isomorphismus ist, existiert eine Umgebung $V \subset B_r(y_0)$ von y_0 mit

$$\| DG(T(y)) - DG(x_0) \| < \| DG(x_0)^{-1} \|^{-1} \in (0, \infty),$$

für jedes $y \in V$. Hieraus folgt, dass $DG(T(y))$ für jedes $y \in V$ ein Isomorphismus von X auf Y ist, woraus insbesondere $\| (DG(T(y)))^{-1} \| < \infty$ für jedes $y \in V$ folgt. Wir fixieren nun einen Punkt $y \in V$ und setzen $c := \| (DG(T(y)))^{-1} \|$. Somit können wir zu einem beliebigen $h \in Y$ mit $\| h \|_Y < r - \| y - y_0 \|_Y$ abschätzen:

$$\begin{aligned} &\| T(y+h) - T(y) - (DG(T(y)))^{-1}.h \|_X \\ =&\| (DG(T(y)))^{-1}.(DG(T(y)).(T(y+h) - T(y)) - h) \|_X \\ \leq& c \ \| DG(x)(\bar{x} - x) - (G(\bar{x}) - G(x)) \|_Y, \end{aligned}$$

wenn wir $x = T(y)$ und $\bar{x} = T(y+h)$ schreiben und $G(\bar{x}) - G(x) = G(T(y+h)) - G(T(y)) = y + h - y = h$ beachten. Da G in x Fréchet-differenzierbar ist, existiert anhand dieser Abschätzung zu jedem $\epsilon > 0$ ein $\delta(\epsilon) > 0$, sodass

$$\| T(y+h) - T(y) - (DG(T(y)))^{-1}.h \|_X \leq c\epsilon \ \| \bar{x} - x \|_X = c\epsilon \ \| T(y+h) - T(y) \|_X \tag{4.5}$$

für $\| h \|_Y < \delta(\epsilon)$ gilt. Zusammen mit $\| (DG(T(y)))^{-1} \| = c$ ergibt sich hieraus zunächst

$$\| T(y+h) - T(y) \|_X \leq \frac{1}{1 - c\,\epsilon}\, c \, \| h \|_Y$$

und daher mit (4.5):

$$\| T(y+h) - T(y) - (DG(T(y)))^{-1}.h \|_X \leq \epsilon \, \frac{c^2}{1 - c\,\epsilon} \, \| h \|_Y$$

für beliebig kleines $\epsilon > 0$ und $\| h \|_Y < \delta(\epsilon)$, was die Fréchet-Differenzierbarkeit von T im beliebig fixierten Punkt $y \in V$ mit isomorpher Fréchet-Ableitung $DT(y) = (DG(T(y)))^{-1}$, also Formel (4.3), beweist. Insbesondere folgt aus dieser Formel anhand der Stetigkeit von DG und T, zusammen mit dem Resultat von Übungsaufgabe 9, dass in einem beliebig fixierten Punkt $y_1 \in V$:

$$\| D((G\,|_U)^{-1})(y_1) - D((G\,|_U)^{-1})(y) \| = \| (DG(G^{-1}(y_1)))^{-1} - (DG(G^{-1}(y)))^{-1} \| \\ \to 0$$

für $\| y - y_1 \|_Y \to 0$ gilt. Somit ist $D((G\,|_U)^{-1})$ auf V stetig, also $(G\,|_U)^{-1}$ von der Klasse C^1 auf der kleinen Umgebung V von y_0.

Als eine Anwendung dieses Satzes betrachten wir das folgende

Beispiel: Es seien $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ eine beschränkte, offene, konvexe Teilmenge und $\alpha \in (0,1)$ fixiert. Wir setzen $X := C_0^{2,\alpha}(\Omega) := \{u \in C^{2,\alpha}(\Omega) \mid u \equiv 0 \quad \text{auf } \partial\Omega\}$ und $Y := C^{0,\alpha}(\Omega)$ und betrachten den semi-linearen Differential-Operator

$$F(u) := -a_{ij}\,\partial_{ij}u + b(u, \nabla(u)),$$

wobei $\left(a_{ij}\right)$ eine konstante, positiv-definite $n \times n-$Matrix und $b \in C^{1,1}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$ seien. Anhand einer Übungsaufgabe ergibt sich die Stetigkeit und Fréchet-Differenzierbarkeit von $F : X \to Y$, und ausserdem dass die Fréchet-Ableitung $DF(u) : C_0^{2,\alpha}(\Omega) \to C^{0,\alpha}(\Omega)$ von F in Richtung eines $v \in C_0^{2,\alpha}(\Omega)$ explizit durch

$$DF(u).v = -a_{ij}\,\partial_{ij}v + \partial_{w^i}b(u, \nabla(u))\,\partial_i v + \partial_z b(u, \nabla(u))\,v \tag{4.6}$$

gegeben ist. Wegen

$$\begin{aligned} \| DF(u_1) - DF(u_2) \| &= \sup_{\|v\|_X \leq 1} \| (\nabla b(u_1, \nabla u_1) - \nabla b(u_2, \nabla u_2)) \cdot (v, \nabla v) \|_{C^{0,\alpha}(\Omega)} \\ &\leq \sup_{\|v\|_X \leq 1} 2\,(n+1) \, \| \nabla b(u_1, \nabla u_1) - \nabla b(u_2, \nabla u_2)) \|_{C^{0,\alpha}(\Omega)} \| v \|_{C^{1,\alpha}(\Omega)} \\ &\leq 2\,(n+1) \, \| \nabla b(u_1, \nabla u_1) - \nabla b(u_2, \nabla u_2)) \|_{C^{0,\alpha}(\Omega)} \end{aligned}$$

und

$$\| \nabla b(u_1, \nabla u_1) - \nabla b(u_2, \nabla u_2)) \|_{C^{0,\beta}(\Omega)} \leq \| b \|_{C^{1,1}} \ (\| u_1 - u_2 \|_{C^1(\Omega)} + \sum_{i=1}^{2} \| u_i \|_{C^{1,\beta}(\Omega)})$$

für $\beta \in (\alpha, 1]$, folgt ausserdem die Stetigkeit der Fréchet-Ableitung DF wie die Stetigkeit von F anhand der Kompaktheit der Einbettung $C^{0,\beta}(\Omega) \hookrightarrow C^{0,\alpha}(\Omega)$, für jedes $\beta \in (\alpha, 1]$. Somit erfüllt die Abbildung $F : X \to Y$ alle Voraussetzungen von Theorem 4.0.2 um eine Funktion $u_0 \in C_0^{2,\alpha}(\Omega)$, sobald wir garantieren können, dass $DF(u_0)$ ein Isomorphismus von $C_0^{2,\alpha}(\Omega)$ auf $C^{0,\alpha}(\Omega)$ ist. Da $DF(u_0)$, anhand der expiziten Formel in (4.6), ein linearer, elliptischer Differential-Operator 2. Ordnung ist, können wir später mittels einer Kombination der Kontinuitätsmethode, a-priori-Abschätzungen der Schauder-Theorie und des Maximumprinzips folgern, dass dies in der Tat der Fall ist, falls $\partial_z b(u_0, \nabla(u_0)) \geq 0$ auf Ω ist ! Der Umkehrsatz garantierte in diesem Fall also zumindest die Existenz kleiner Umgebungen $\mathcal{U}_0$ um u_0 und $\mathcal{V}_0$ um $F(u_0)$ in $C_0^{2,\alpha}(\Omega)$ bzw. $C^{0,\alpha}(\Omega)$, sodass es zu jeder Funktion $\varphi \in \mathcal{V}_0$ genau eine Lösungsfunktion $u \in \mathcal{U}_0$ der semi-linearen, partiellen Differentialgleichung

$$-a_{ij}\, \partial_{ij} u + b(u, \nabla(u)) = \varphi \qquad \text{auf } \Omega$$

gibt.

Wir kommen nun zu zwei modifizierten Varianten des Umkehrsatzes, bei denen nur noch die Surjektivität der Fréchet-Ableitung $DF(x_0)$ in einem Punkt x_0 vorausgesetzt wird, deren Injektivität jedoch fallengelassen wird. Diese Sätze ermöglichen immerhin die lokale Lösbarkeit einer nicht-linearen Differential- oder Integral-Gleichung, bei Verzicht auf die Eindeutigkeit der Lösung zu vorgegebener ,,rechter Seite" der vorgelegten Gleichung.

Theorem 4.0.3. *[Spezieller Submersionssatz] Seien X und Y Banachräume, $U \subset X$ eine offene Teilmenge und $f \in C^1(U, Y)$ erfülle in einem Punkt $x_0 \in X$:*

1) $\mathrm{Bild}(Df(x_0)) = Y$*.*

2) Es existiert ein abgeschlossener Untervektorraum $\mathcal{W} \subset X$ mit $\mathcal{W} \oplus \mathrm{Kern}(Df(x_0)) = X$.

Dann existiert ein $\rho > 0$, sodass $f \mid_{B_\rho(x_0)}$ eine offene Abbildung ist, d.h. sodass die Einschränkung von f auf $B_\rho(x_0)$ offene Teilmengen von $B_\rho(x_0)$ auf offene Teilmengen von Y abbildet.

Beweis: Nach Voraussetzung können wir $x, h \in X$ in der Form $x = k + w$ bzw. $h = K + W$ für eindeutige Elemente $k, K \in \mathrm{Kern}(Df(x_0))$ und $w, W \in \mathcal{W}$ schreiben. Aus Bemerkung 3.0.1 wissen wir anhand der Abgeschlossenheit von $\mathrm{Kern}(Df(x_0))$ und $\mathcal{W}$:

$$Df(x_0).(K + W) = D_k f(x_0).K + D_w f(x_0).W.$$

Testen wir diese Gleichung mit $W = 0$, so erhalten wir zunächst $0 = Df(x_0).K = D_k f(x_0).K$, für beliebige $K \in \mathrm{Kern}(Df(x_0))$, und somit

$$Df(x_0).(K+W) = D_w f(x_0).W \tag{4.7}$$

für beliebige $K \in \mathrm{Kern}(Df(x_0))$ und $W \in \mathcal{W}$. Anhand der Surjektivität von $Df(x_0)$ auf Y folgt hieraus sofort die Surjektivität von $D_w f(x_0) : \mathcal{W} \to Y$. Ist $W \in \mathcal{W}$ mit $D_w f(x_0).W = 0$ gegeben, so folgt $Df(x_0).(0+W) = D_w f(x_0).W = 0$ aus (4.7) und somit $W = 0$ wegen $\mathrm{Kern}(Df(x_0)) \cap \mathcal{W} = \{0\}$. Also ist $D_w f(x_0) : \mathcal{W} \to Y$ bijektiv und somit ein Isomorphismus. Wir definieren nun eine C^1-Abbildung $F : U \to \mathrm{Kern}(Df(x_0)) \times Y$ durch $F(k+w) := (k, f(k+w))$. Erneut folgt aus Bemerkung 3.0.1 zusammen mit (4.7):

$$DF(x_0).(K+W) = (K, D_w f(x_0).W),$$

für beliebige $K \in \mathrm{Kern}(Df(x_0))$ und $W \in \mathcal{W}$. Aus der Bijektivität von $D_w f(x_0)$ folgt hieraus sofort die Bijektivität von $DF(x_0)$, also dass $DF(x_0) : X \to \mathrm{Kern}(Df(x_0)) \times Y$ ein Isomorphismus ist. Theorem 4.0.2 garantiert nun die Existenz eines offenen Balls $B_\rho(x_0)$, der von F homöomorph auf $F(B_\rho(x_0))$ abgebildet wird. Da die kanonische Projektion Proj_Y von $\mathrm{Kern}(Df(x_0)) \times Y$ auf Y eine offene Abbildung ist, impliziert dies insbesondere dass die Verkettung $\mathrm{Proj}_Y \circ F = f$ offene Teilmengen von $B_\rho(x_0)$ auf offene Teilmengen von Y abbildet.

Für den Beweis von Theorem 4.0.4 benötigen wir zunächst die folgende Proposition aus der linearen Funktionalanalysis:

Proposition 4.0.6. *Seien X, Y Banach-Räume und $T \in L(X,Y)$. Dann ist das Bild von T genau dann ein abgeschlossener Unterraum von Y, falls es eine Konstante $c > 0$ mit*

$$\mathrm{dist}(x, \mathrm{Kern}(T)) := \inf\{\| x - z \|_X \mid z \in \mathrm{Kern}(T)\} \leq c \ \| T(x) \|_Y$$

für alle $x \in X$ gibt.

Beweis: Da T stetig ist, ist $\mathrm{Kern}(T)$ abgeschlossen und somit der Quotient $\hat{X} := X/\mathrm{Kern}(T)$ wieder ein Banachraum, falls man diesen Vektorraum mit der Norm

$$\| [x] \|_{\hat{X}} := \mathrm{dist}(x, \mathrm{Kern}(T))$$

versieht. Der Operator $\hat{T} : \hat{X} \to Y$, definiert durch $\hat{T}([x]) := T(x)$, für einen Repräsentanten x von $[x]$, ist wohldefiniert, linear, stetig und surjektiv auf $\mathrm{Bild}(T)$. Ausserdem ist er auch injektiv, denn es gilt $\hat{T}([x]) = 0$ genau dann, falls $T(x) = 0$ für einen Repräsentanten x von $[x]$ gilt, also falls $x \in \mathrm{Kern}(T)$ bzw. $[x] = 0$ gilt. Ist nun $\mathrm{Bild}(T)$ abgeschlossener Unterraum von Y, so ist er ein Banachraum, sodass der Satz der offenen Abbildung die Stetigkeit der inversen Abbildung $(\hat{T})^{-1} : \mathrm{Bild}(T) \to \hat{X}$ garantiert. Diese ist äquivalent zur Existenz einer Konstanten $c > 0$, welche

$$\| [x] \|_{\hat{X}} \leq c \ \| \hat{T}([x]) \|_Y$$

für alle $[x] \in \hat{X}$ und somit

$$\operatorname{dist}(x, \operatorname{Kern}(T)) \leq c \parallel T(x) \parallel_Y$$

für alle $x \in X$ erfüllt. Gelte umgekehrt diese Ungleichung und sei $\{T(x_n)\}$ eine in Y konvergente Folge, gelte also $\parallel T(x_n) - y \parallel_Y \to 0$ für ein $y \in Y$, so erhalten wir

$$\parallel [x_n] - [x_m] \parallel_{\hat{X}} \leq c \parallel \hat{T}([x_n]) - \hat{T}([x_m]) \parallel_Y = c \parallel T(x_n) - T(x_m) \parallel_Y,$$

also dass die Quotientenfolge $\{[x_n]\}$ eine Cauchyfolge und somit konvergent in $\hat{X}$ ist. Bezeichnet $[x_0]$ den Limes von $\{[x_n]\}$ in $\hat{X}$, so folgt aus der Stetigkeit von $\hat{T}$:

$$T(x_0) = \hat{T}([x_0]) = \lim_{n\to\infty} \hat{T}([x_n]) = \lim_{n\to\infty} T(x_n) = y,$$

also dass der Limes y der Folge $\{T(x_n)\}$ in $\operatorname{Bild}(T)$ enthalten sein muss.

Theorem 4.0.4. *[Allgemeiner Submersionssatz] Seien X und Y Banachräume, $B_r(x_0) \subset X$ ein offener Ball in X und $F : B_r(x_0) \to Y$ eine stetige Abbildung, für die es zu x_0 einen linearen, stetigen Operator $T \in L(X, Y)$ mit $\operatorname{Bild}(T) = Y$ und eine nur von T abhängige, kleine Zahl $k > 0$ mit*

$$\parallel F(x+h) - F(x) - T(h) \parallel_Y \leq k \parallel h \parallel_X \qquad \text{für } x, x+h \in B_r(x_0) \tag{4.8}$$

gibt. Dann existiert ein kleines $\rho > 0$, sodass der Ball $B_\rho(F(x_0))$ um $F(x_0)$ im Bild von $B_r(x_0)$ enthalten ist, also mit $B_\rho(F(x_0)) \subset F(B_r(x_0))$.

Beweis: Da $\operatorname{Bild}(T)$ insbesondere abgeschlossen ist, existiert nach Proposition 4.0.6 ein $c > 0$ mit

$$\operatorname{dist}(x, \operatorname{Kern}(T)) := \inf\{\parallel x - z \parallel_X \mid z \in \operatorname{Kern}(T)\} \leq c \parallel T(x) \parallel_Y \tag{4.9}$$

für jedes $x \in X$. Wir wählen nun zu diesem c das k aus der Formulierung des Satzes so klein, dass noch $q := k(c + \epsilon) < 1$, für ein $\epsilon > 0$ gilt. Desweiteren wählen wir hierzu $\rho > 0$ so klein, dass $\frac{(c+\epsilon)\,\rho}{1-q} < r$ gilt. Nun fixieren wir einen Punkt $y \in B_\rho(F(x_0))$ und definieren induktiv eine in x_0 startende Folge $\{x_n\} \subset B_r(x_0)$: Sei $x_n \in B_r(x_0)$ für ein $n > 0$ bereits konstruiert. Wir können anhand der Voraussetzung $\operatorname{Bild}(T) = Y$ einen Punkt $\bar{x}_{n+1} \in X$ mit $T(\bar{x}_{n+1}) = T(x_n) - (F(x_n) - y)$ finden. Da nach (4.9) auch

$$\inf\{\parallel (x_n - \bar{x}_{n+1}) - z \parallel_X \mid z \in \operatorname{Kern}(T)\} \leq c \parallel T(x_n) - T(\bar{x}_{n+1}) \parallel_Y$$

gilt, können wir zu $\epsilon > 0$ ein $z \in \operatorname{Kern}(T)$ angeben, sodass der Punkt $x_{n+1} = \bar{x}_{n+1} + z$

$$\parallel x_{n+1} - x_n \parallel_X \leq (c+\epsilon) \parallel T(x_n) - T(\bar{x}_{n+1}) \parallel_Y = (c+\epsilon) \parallel F(x_n) - y \parallel_Y$$

erfüllt. Da die Gleichungen

$$T(x_{n+1}) = T(\bar{x}_{n+1}) = T(x_n) - (F(x_n) - y)$$

auch für $n-1$ anstatt n gelten, somit $T(x_n) = T(x_{n-1}) - (F(x_{n-1}) - y)$ gilt, erhalten wir zusammen mit (4.8), angewandt auf $x := x_{n-1}$ und $h := x_n - x_{n-1}$:

$$\begin{aligned} \| x_{n+1} - x_n \|_X &\leq (c+\epsilon) \ \| F(x_n) - y \|_Y \\ &= (c+\epsilon) \ \| F(x_n) - F(x_{n-1}) + T(x_{n-1}) - T(x_n) \|_Y \qquad (4.10) \\ &= (c+\epsilon) \ \| F(x_{n-1}+h) - F(x_{n-1}) - T(h) \|_Y \leq k\,(c+\epsilon) \ \| x_n - x_{n-1} \|_X \ . \end{aligned}$$

Hieraus erhalten wir anhand von $\| x_1 - x_0 \|_X \leq (c+\epsilon) \ \| F(x_0) - y \|_Y \leq (c+\epsilon)\,\rho$, $q := k\,(c+\epsilon) < 1$ und anhand der Wahl von ρ:

$$\| x_{n+1} - x_0 \|_X \leq \sum_{k=1}^{n+1} \| x_k - x_{k-1} \|_X \leq \sum_{k=1}^{n+1} q^{k-1}\,(c+\epsilon)\,\rho \leq \frac{(c+\epsilon)\,\rho}{1-q} < r. \qquad (4.11)$$

Dies zeigt, dass bei jedem Konstruktionsschritt der Folge $\{x_n\}$ ein weiteres Folgenglied im Ball $B_r(x_0) = \mathrm{Domain}(F)$ konstruiert wurde, was die Wohldefiniertheit dieser Folge beweist. Desweiteren folgt aus (4.10):

$$\begin{aligned} \| x_{m+l} - x_m \|_X &\leq \sum_{k=1}^{l} \| x_{m+k} - x_{m+k-1} \|_X \leq \sum_{k=1}^{l} q^{m+k-1} \ \| x_1 - x_0 \|_X \\ &\leq \sum_{k=m}^{\infty} q^k\,(c+\epsilon)\,\rho = \frac{q^m}{1-q}\,(c+\epsilon)\,\rho, \end{aligned}$$

für beliebige Indizes $m, l \in \mathbb{N}$, woraus insbesondere folgt, dass $\{x_n\}$ eine Cauchy-Folge in $B_r(x_0) \subset X$ ist, deren Limes x^* wegen (4.11) in $B_r(x_0)$ liegen muss. Wegen $T(x_n) = T(x_{n-1}) - (F(x_{n-1}) - y)$ erhalten wir anhand der Stetigkeit von T und F im Limes $n \to \infty$: $y = F(x^*)$, also in der Tat $y \in F(B_r(x_0))$, für jedes $y \in B_\rho(F(x_0))$.

Wir ziehen aus diesem Satz das folgende

Korollar 4.0.1. *[Klassischer Submersionssatz] Seien X und Y Banachräume, $B_r(x_0) \subset X$ ein offener Ball in X und $F : B_r(x_0) \to Y$ eine stetig differenzierbare Abbildung, deren Fréchet-Ableitung in x_0 surjektiv auf Y abbildet. Dann existiert ein kleines $\rho > 0$, sodass der Ball $B_\rho(F(x_0))$ um $F(x_0)$ im Bild von $B_r(x_0)$ enthalten ist, also mit $B_\rho(F(x_0)) \subset F(B_r(x_0))$.*

Beweis: Wegen $\mathrm{Bild}(DF(x_0)) = Y$ reicht es aus, die Bedingung (4.8) an $T := DF(x_0)$ aus Theorem 4.0.4 auf einem Ball um x_0 nachzuweisen. Da F auf $B_r(x_0)$ stetig differenzierbar ist, existiert insbesondere zu der Konstanten $k > 0$ aus Bedingung (4.8) ein $r' \in (0, r]$, sodass

$$\| DF(x) - DF(x_0) \| \leq k$$

für alle $x \in B_{r'}(x_0)$ erfüllt ist. Anhand der stetigen Differenzierbarkeit von F erhalten wir aus dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung, angewandt auf die C^1-Funktion

$$\gamma(\cdot) := \Lambda \circ F(x + \ \cdot h) : [0,1] \to \mathbb{R},$$

für ein beliebiges Funktional $\Lambda \in Y^*$, und anhand von Proposition 3.0.2:

$$\Lambda(F(x+h) - F(x)) = \gamma(1) - \gamma(0) = \int_0^1 \gamma'(t)\,dt = \int_0^1 \Lambda(DF(x+th).h)\,dt$$

für $x, x+h \in B_r(x_0)$ und somit insbesondere

$$\Lambda(F(x+h) - F(x) - DF(x_0).h) = \int_0^1 \Lambda[(DF(x+th) - DF(x_0)).h]\,dt.$$

Nach dem Satz von Hahn-Banach existiert ein $\Lambda \in Y^*$ mit $\| \Lambda \| = 1$, sodass hieraus die Abschätzung

$$\| F(x+h) - F(x) - DF(x_0).h \|_Y \leq \int_0^1 \| DF(x+th) - DF(x_0) \| \ dt \ \| h \|_X \leq k \ \| h \|_X$$

für $x, x+h \in B_{r'}(x_0)$ folgt. Wählen wir also $\rho > 0$ kleiner als $\frac{r'(1-k(c+\epsilon))}{c+\epsilon}$, wie im Beweis von Theorem 4.0.4 (hier mit r' anstatt r), so folgt die Behauptung des Korollars.

5 Fredholm-Operatoren

Definition 5.0.6. *Seien X, Y Banachräume. Wir nennen eine stetige, lineare Abbildung $T : X \to Y$ einen ,,Fredholm-Operator", falls*

1) $\mathrm{Bild}(T)$ *ein abgeschlossener Unterraum von Y ist,*

2) $\mathrm{Kern}(T)$ *und* $\text{Ko-Kern}(T) := Y/\mathrm{Bild}(T)$ *endlich-dimensional sind.*

In diesem Fall können wir den Index von T durch

$$\mathrm{Index}(T) := \dim(\mathrm{Kern}(T)) - \dim(\text{Ko-Kern}(T))$$

definieren.

Es stellt sich bei der Untersuchung eines vorgelegten linearen Operators T im Hinblick auf seine ,,Fredholm-Eigenschaften" als günstig heraus, den zu T adjungierten Operator $T^* : Y^* \to X^*$, der durch

$$T^*(\Lambda) := \Lambda \circ T \qquad \text{für } \Lambda \in Y^*$$

definiert ist, in Betracht zu ziehen. Es gelten folgende Beziehungen für die Annulatoren

$$M^\perp := \{\Lambda \in X^* \mid \Lambda(x) = 0 \text{ für alle } x \in M\} \subset X^*$$
$$N^\circledast := \{x \in X \mid \Lambda(x) = 0 \text{ für alle } \Lambda \in N\} \subset X$$

beliebiger Teilmengen $M \subset X$ und $N \subset X^*$:

1) $M^\perp$ und $N^\circledast$ sind abgeschlossene Unterräume von X^* bzw. von X, und $M^\perp$ ist ausserdem abgeschlossen bezüglich der schwach$-*-$Topologie von X^*.

2) $(M^\perp)^\circledast = \overline{\mathrm{Span}(M)}$ und $(N^\circledast)^\perp$ ist der Abschluss von $\mathrm{Span}(N)$ bezüglich der schwach$-*-$Topologie von X^*.

Ist U ein abgeschlossener Unterraum von X, so gilt ausserdem:

$$U^* \cong X^*/U^\perp \qquad \text{bzw.} \qquad (X/U)^* \cong U^\perp, \tag{5.1}$$

falls U bzw. X/U endlich-dimensional ist. (Siehe Theorem 4.9 in [4] für einen Beweis, der sogar ohne diese Einschränkung funktioniert.) Ist speziell $N := V$ ein schwach$-*$ $-$abgeschlossener Unterraum von X^*, so erhalten wir zunächst für $U := V^\circledast$, dass $U^\perp = V$ gilt und somit aus (5.1):

$$(V^\circledast)^* \cong X^*/V \qquad \text{bzw.} \qquad (X/V^\circledast)^* \cong V, \tag{5.2}$$

falls $V^{\circledast}$ bzw. $X/V^{\circledast}$ endlich-dimensional ist. Anhand des Satzes von Hahn-Banach erhalten wir die folgenden Gleichungen sofort aus der Definition des adjungierten Operators und den Definitionen der Annulatoren:

$$\mathrm{Kern}(T) = (\mathrm{Bild}(T^*))^{\circledast} \qquad \text{und} \qquad \mathrm{Kern}(T^*) = \mathrm{Bild}(T)^{\perp}. \tag{5.3}$$

Siehe Theorem 4.12 in [4]. Schliesslich gilt folgendes

Theorem 5.0.5. *Sei $T \in L(X,Y)$ ein linearer Operator, so sind äquivalent:*

1) $\mathrm{Bild}(T)$ *ist ein abgeschlossener Unterraum von Y.*

2) $\mathrm{Bild}(T^*)$ *ist ein abgeschlossener Unterraum von X^*.*

3) $\mathrm{Bild}(T^*)$ *ist schwach$-*-$abgeschlossener Unterraum von X^*.*

Siehe Theorem 4.14 in [4]. Somit kann folgende Charakterisierung für Fredholm-Operatoren bewiesen werden:

Proposition 5.0.7. *Seien X, Y Banachräume. Dann sind die drei folgenden Aussagen über einen stetigen, linearen Operator $T \in L(X,Y)$ äquivalent:*

1) T ist ein Fredholm-Operator.

2) T^* ist ein Fredholm-Operator.

3) $\mathrm{Bild}(T)$ *ist abgeschlossen in Y, und* $\mathrm{Kern}(T)$ *und* $\mathrm{Kern}(T^*)$ *sind endlich-dimensional.*

In all diesen Fällen gilt:

$$ind(T) = \dim(\mathrm{Kern}(T)) - \dim(\mathrm{Kern}(T^*)) \qquad \text{und} \qquad ind(T^*) = -ind(T).$$

Beweis: Anhand der Äquivalenzen aus Theorem 5.0.5, reicht der folgende Dimensionsvergleich aus, den man aus (5.1), (5.2) und (5.3) erhält:

$$\dim(\mathrm{Kern}(T^*)) = \dim(\mathrm{Bild}(T)^{\perp}) = \dim(Y/\mathrm{Bild}(T)) = \dim(\text{Ko-Kern}(T)) \qquad \text{und}$$
$$\dim(\mathrm{Kern}(T)) = \dim((\mathrm{Bild}(T^*))^{\circledast}) = \dim(X^*/\mathrm{Bild}(T^*)) = \dim(\text{Ko-Kern}(T^*)).$$

Für die Anwendung der ersten Isomorphie von (5.2) auf $V := \mathrm{Bild}(T^*)$ benutzten wir erneut die Äquivalenzen aus Theorem 5.0.5, welche garantieren, dass in jedem der Fälle (1) − (3) $\mathrm{Bild}(T^*)$ ein schwach$-*-$abgeschlossener Unterraum von X^* sein muss. Insbesondere folgen hieraus die Formeln $ind(T) = \dim(\mathrm{Kern}(T)) - \dim(\mathrm{Kern}(T^*))$ und $ind(T^*) = -ind(T)$.

Proposition 5.0.8. *Seien X, Y Banachräume und $T : X \to Y$ ein Fredholm-Operator. Dann lässt sich T in der Form $T = i \circ \hat{T} \circ \pi$ faktorisieren, wobei $\pi : X \to X/\mathrm{Kern}(T)$ die kanonische Projektion auf den Quotienten-Banachraum $X/\mathrm{Kern}(T)$, $i : \mathrm{Bild}(T) \hookrightarrow Y$ die Inklusion und $\hat{T} : X/\mathrm{Kern}(T) \to \mathrm{Bild}(T)$ die durch $\hat{T}([x]) := T(x)$ eindeutig definierte stetige, lineare Abbildung seien. Es sind π, $\hat{T}$ und i allesamt Fredholm-Operatoren, $\hat{T}$ ein Isomorphismus von $X/\mathrm{Kern}(T)$ auf $\mathrm{Bild}(T)$, und es gilt:*

$$ind(T) = ind(\pi) + ind(\hat{T}) + ind(i).$$

Beweis: Da Kern(T) abgeschlossen ist, ist $X/\text{Kern}(T)$ ein Banachraum und $\hat{T} \in L(X/\text{Kern}(T), Y)$ wohldefiniert, linear, stetig und surjektiv auf Bild(T). Desweiteren ist $\hat{T}$ per Konstruktion auch injektiv, also ein Isomorphismus von $X/\text{Kern}(T)$ auf Bild(T), da Bild(T) abgeschlossen und somit ebenfalls ein Banachraum ist. Insbesondere ist $\hat{T}$ ein Fredholm-Operator mit $F-$Index $= 0$. Desweiteren sind π und i Fredholm-Operatoren (da Bild(T) abgeschlossen ist) mit $ind(\pi) = \dim(\text{Kern}(T))$ und $ind(i) = -\dim(Y/\text{Bild}(T))$. Insgesamt erhalten wir hieraus in der Tat:

$$ind(\pi) + ind(\hat{T}) + ind(i) = \dim(\text{Kern}(T)) + 0 - \dim(Y/\text{Bild}(T)) = ind(T).$$

Proposition 5.0.9. *Seien X, Y, Z Banachräume und $T \in L(X, Y)$ und $S \in L(Y, Z)$ seien Fredholmoperatoren. Dann ist die Verkettung $S \circ T$ wieder eine Fredholm-Abbildung mit*

$$ind(S \circ T) = ind(S) + ind(T).$$

Beweis: Anhand von Proposition 5.0.7 haben wir für zwei beliebige Fredholm-Operatoren die Faktorisierung $S \circ T = (i_S \circ \hat{S} \circ \pi_S) \circ (i_T \circ \hat{T} \circ \pi_T)$, sodass wir nur die folgenden Fälle für S und T untersuchen müssen:

1) T oder S ist ein Isomorphismus.

2) $T = \pi$ ist eine Projektion mit endlich-dimensionalem Kern.

3) $S = i$ ist eine Inklusion mit endlich-dimensionalem Ko-Kern.

4) $S \circ T = \pi \circ i$ für i und π wie in (2) und (3).

In Fall (1) ist $S \circ T$ wieder ein Fredholm-Operator, falls T oder S fredholmsch ist, und es gilt $ind(S \circ T) = ind(T) = ind(S) + ind(T)$, falls beispielsweise S ein Isomorphismus ist. In Fall (2) bemerken wir erstens: Bild$(S \circ \pi) =$ Bild(S), insbesondere abgeschlossen. Zweitens sehen wir, dass die Einschränkung p von π auf Kern$(S \circ \pi)$ den Banachraum Kern$(S \circ \pi)$ surjektiv auf Kern(S) abbildet, da π eine Projektion ist, und dass Kern$(p) =$ Kern(π) gilt. Da dies insbesondere $\dim(\text{Kern}(p)) < \infty$ impliziert, können wir den ersten Isomorphie-Satz in der Form

$$\dim(\text{Kern}(S)) = \dim(\text{Kern}(S \circ \pi)) - \dim(\text{Kern}(p))$$

auf die lineare Abbildung p anwenden und erhalten: $\dim(\text{Kern}(S \circ \pi)) = \dim(\text{Kern}(S)) + \dim(\text{Kern}(\pi)) < \infty$. Insgesamt folgt hieraus, dass $S \circ \pi$ ein Fredholm-Operator ist, und zwar mit Index:

$$ind(S \circ \pi) = \dim(\text{Kern}(S)) + \dim(\text{Kern}(\pi)) - \dim(Y/\text{Bild}(S)) = ind(S) + ind(\pi).$$

Im dritten Fall bemerken wir, dass das Bild von $i \circ T$ abgeschlossen in Z ist, dass Kern$(i \circ T) =$ Kern(T) und dass

$$\begin{aligned} \dim(\text{Ko-Kern}(i \circ T)) &= \dim(Z/\text{Bild}(T)) \\ = \dim(Z/Y) + \dim(Y/\text{Bild}(T)) &= \dim(\text{Ko-Kern}(i)) + \dim(\text{Ko-Kern}(T)) < \infty \end{aligned}$$

gilt. Somit ist $i \circ T$ ein Fredholm-Operator, und zwar mit Index:

$$ind(i \circ T) = \dim(\text{Kern}(T)) - \dim(\text{Ko-Kern}(i)) - \dim(\text{Ko-Kern}(T)) = ind(T) + ind(i).$$

In Fall (4) betrachten wir eine Inklusion $i : X \hookrightarrow Y$ eines abgeschlossenen Unterraums X von Y und eine Projektion $\pi : Y \to Y/W$, wobei Y/X und W endlich dimensional sind. Wir sehen: $\text{Kern}(\pi \circ i) = X \cap W$ und $\text{Bild}(\pi \circ i) = X + W/W$. Da X abgeschlossen und W endlich dimensional ist, ist $X + W$ abgeschlossen und somit $\text{Bild}(\pi \circ i) = X + W/W$ abgeschlossen in Y/W. Desweiteren können wir wegen $\dim(W) < \infty$ abschätzen:

$$\dim(\text{Kern}(\pi \circ i)) \leq \dim(W) < \infty \qquad \text{und}$$
$$\dim(\text{Ko-Kern}(\pi \circ i)) = \dim((Y/W)/(X + W/W)) = \dim(Y/X + W) \leq \dim(Y/X) < \infty.$$

Somit ist $\pi \circ i$ eine Fredholm-Abbildung, deren Index wir leicht berechnen können:

$$\begin{aligned} ind(\pi \circ i) = \dim(\text{Kern}(\pi \circ i)) - \dim(\text{Ko-Kern}(\pi \circ i)) &= \dim(X \cap W) - \dim(Y/X + W)) \\ &= \dim(X \cap W) - \dim((Y/X)/[(X + W)/X]) \\ &= \dim(X \cap W) - \dim(Y/X) + \dim((X + W)/X) \\ = \dim(W) - \dim(Y/X) = \dim(\text{Kern}(\pi)) - \dim(\text{Ko-Kern}(i)) &= ind(\pi) + ind(i), \end{aligned}$$

wobei wir verwandten, dass hier $\dim(X \cap W) + \dim((X + W)/X) = \dim(W) < \infty$ und somit insbesondere $\dim((X + W)/X) < \infty$ gilt.

Wir können hiermit beweisen, dass die Teilmenge aller Fredholm-Operatoren offen in $L(X, Y)$ ist, dass der $F-$Index lokal-konstant ist und dass ausserdem kompakte Störungen von Fredholm-Operatoren wieder Fredholm-Operatoren von gleichem Index sind:

Theorem 5.0.6. *Seien X, Y Banachräume und $T : X \to Y$ ein Fredholm-Operator. Ist nun $S \in L(X, Y)$ ein stetiger, linearer Operator mit entweder*

1) $\parallel S \parallel < \epsilon$ für ein von T abhängiges, hinreichend kleines $\epsilon > 0$ oder (auch)

2) S ist kompakter Operator,

so gilt: $T + S$ ist wieder eine Fredholm-Abbildung, und zwar mit $ind(T + S) = ind(T)$.

Beweis: Von (1): Da T ein Fredholm-Operator ist, existieren abgeschlossene Unterräume $\tilde{X} \subset X$ und $\tilde{Y} \subset Y$ mit $\dim(\tilde{Y}) = \dim(\text{Ko-Kern}(T)) < \infty$, sodass

$$X = \tilde{X} \oplus \text{Kern}(T) \qquad \text{und} \qquad Y = \text{Bild}(T) \oplus \tilde{Y}$$

gilt. Man kann leicht überprüfen, dass die lineare Abbildung

$$\Phi(\tilde{x}, \tilde{y}) := T(\tilde{x}) + \tilde{y}$$

eine Bijektion von $\tilde{X} \times \tilde{Y}$ auf Y liefert und daher ein Isomorphismus ist. Wählen wir nun $0 < \epsilon <\| \Phi^{-1} \|^{-1}$, so folgt aus Aufgabe 9, dass die Störung $\tilde{\Phi} : \tilde{X} \times \tilde{Y} \to Y$, definiert durch

$$\tilde{\Phi}(\tilde{x}, \tilde{y}) := \Phi(\tilde{x}, \tilde{y}) + S(\tilde{x}) = (T + S)(\tilde{x}) + \tilde{y}$$

wieder ein Isomorphismus von $\tilde{X} \times \tilde{Y}$ auf Y sein muss. Wir definieren nun die lineare, stetige Abbildung $\Psi : X \times \tilde{Y} = (\tilde{X} \oplus \text{Kern}(T)) \times \tilde{Y} \to Y$ durch

$$\Psi(\tilde{x} + k, \tilde{y}) := \tilde{\Phi}(\tilde{x}, \tilde{y}) + S(k) = (T + S)(\tilde{x}) + \tilde{y} + S(k) = (T + S)(x) + \tilde{y},$$

wenn wir $x = \tilde{x} + k$ schreiben. Aus der Surjektivität von $\tilde{\Phi}$ folgt sofort die Surjektivität von Ψ, und ausserdem sehen wir, dass

$$\text{Kern}(\Psi) = \{(\tilde{x} + k, \tilde{y}) \mid k \in \text{Kern}(T) \wedge (\tilde{x}, \tilde{y}) = -\tilde{\Phi}^{-1}(S(k))\}$$

gilt, woraus insbesondere $\text{Kern}(\Psi) \cong \text{Kern}(T)$ folgt und dass Ψ ein Fredholm-Operator mit

$$ind(\Psi) = \dim(\text{Kern}(T)) \tag{5.4}$$

ist. Schliesslich ist die Inklusion $i : X \hookrightarrow X \times \tilde{Y}$ ein Fredholm-Operator mit

$$ind(i) = -\dim(\tilde{Y}) = -\dim(\text{Ko-Kern}(T)). \tag{5.5}$$

Es gilt gerade $\Psi \circ i = T + S$, und Proposition 5.0.6 liefert uns somit, dass $T + S$ eine Fredholm-Abbildung ist, und zwar mit $F-$Index

$$ind(T + S) = ind(\Psi) + ind(i) = \dim(\text{Kern}(T)) - \dim(\text{Ko-Kern}(T)) = ind(T),$$

anhand von (5.4) und (5.5), was Teil (1) des Theorems beweist.
Zu Teil (2): S sei ein kompakter Operator. Wir zeigen zuerst, dass das Bild von $S + T$ ein abgeschlossener Teilraum von Y ist. Wir betrachten hierzu eine Folge $\{x_j\} \subset X$, für die

$$(S + T)(x_j) \to y \tag{5.6}$$

für ein $y \in Y$ gilt. Wir nehmen zunächst an, dass die Folge $\{x_j\}$ in X beschränkt ist, und zeigen unter dieser Voraussetzung, dass eine Teilfolge von $\{x_j\}$ in X konvergiert. Da S kompakt ist, existiert eine Teilfolge $\{x_{j_k}\}$, sodass $\{S(x_{j_k})\}$ konvergiert, also $S(x_{j_k}) \to \tilde{y}$ für ein $\tilde{y} \in Y$. Zusammen mit (5.6) folgt: $T(x_{j_k}) \to y - \tilde{y}$. Da $\text{Kern}(T)$ endlich-dimensional ist, existiert ein abgeschlossener Unterraum $\tilde{X}$ von X, sodass $X = \tilde{X} \oplus \text{Kern}(T)$ gilt. Wir erhalten hieraus eine eindeutige Zerlegung $x_j = \tilde{x}_j + k_j$, für jedes j. Da die kanonische Projektion $\text{Proj}_{\text{Kern}(T)} : X = \tilde{X} \oplus \text{Kern}(T) \to \text{Kern}(T)$ stetig ist, existiert eine Konstante $C > 0$, für die

$$\| k_j \|_X \leq C \, \| x_j \|_X$$

gilt. Somit folgt aus der angenommenen Beschränktheit der Folge $\{x_j\}$ die Beschränktheit der Folge $\{k_j\}$, und da $\text{Kern}(T)$ endlich-dimensional ist, folgt die Existenz einer konvergenten Teilfolge $\{k_{j_l}\}$. Desweiteren ist die Einschränkung von T auf $\tilde{X}$ ein Isomorphismus von $\tilde{X}$ auf Bild(T), da Bild(T) per Voraussetzung an T abgeschlossen ist. Somit existiert eine Konstante $K > 0$, für die

$$\| T(\tilde{x}) \|_Y \geq K \| \tilde{x} \|_X \qquad \forall \tilde{x} \in \tilde{X}$$

gilt. Somit folgt insbesondere wegen $x_j = \tilde{x}_j + k_j \in \tilde{X} \oplus \mathrm{Kern}(T)$:

$$K \| \tilde{x}_{j_k} - \tilde{x}_{j_l} \|_X \leq \| T(\tilde{x}_{j_k}) - T(\tilde{x}_{j_l}) \|_Y = \| T(x_{j_k}) - T(x_{j_l}) \|_Y,$$

sodass wegen $T(x_{j_k}) \to y - \tilde{y}$ die Folge $\{\tilde{x}_{j_k}\}$ eine Cauchy-Folge, also konvergent in $\tilde{X}$ ist. Wieder wegen $x_j = \tilde{x}_j + k_j$ zeigt dies insgesamt, dass eine Teilfolge von $\{x_j\}$ in X konvergieren muss.
Wir versuchen nun, $y \in \mathrm{Bild}(T+S)$ zu zeigen: Zu jedem x_j existiert ein $k_j \in \mathrm{Kern}(T+S)$, für welches $\| x_j - k_j \|_X \leq 2\,\mathrm{dist}(x_j, \mathrm{Kern}(T+S)) = 2\,\mathrm{dist}(x_j - k_j, \mathrm{Kern}(T+S))$ gilt. Wegen $(S+T)(x_j - k_j) = (S+T)(x_j) \to y$ können wir somit zum Beweis von $y \in \mathrm{Bild}(T)$ bereits

$$\| x_j \|_X \leq 2\,\mathrm{dist}(x_j, \mathrm{Kern}(T+S)) \tag{5.7}$$

OBDA annehmen. Wir setzen $d_j := \mathrm{dist}(x_j, \mathrm{Kern}(T+S))$. Angenommen, es gelte $d_j \to \infty$, so setzen wir $z_j := \frac{x_j}{d_j}$ und erhalten:

$$\| z_j \|_X \leq 2, \qquad \mathrm{dist}(z_j, \mathrm{Kern}(T+S)) = 1 \quad \text{und} \quad (S+T)(z_j) \to 0.$$

Wenden wir die obige Argumentation auf die Folge $\{z_j\}$ (hier mit $y = 0$) an, so folgt die Existenz einer konvergenten Teilfolge: $z_{j_l} \to z^*$. Somit ergibt sich: $0 = \lim(S+T)(z_{j_l}) = (S+T)(z^*)$, also $z^* \in \mathrm{Kern}(T+S)$ und daher $\| z_j - z^* \| \geq \mathrm{dist}(z_j, \mathrm{Kern}(T+S)) = 1$ im Widerspruch zu $z_{j_l} \to z^*$. Also ist die Folge $\{d_j\}$ beschränkt, und somit auch die Folge $\{x_j\}$ wegen (5.7). Da wir auch $(S+T)(x_j) \to y$ annehmen, folgt aus obiger Argumentation die Existenz einer konvergenten Teilfolge $x_{j_l} \to x^*$, sodass wir $(S+T)(x^*) = y$ wie gewünscht erhalten.
Um die endliche Dimension von $\mathrm{Kern}(T+S)$ nachzuweisen, betrachten wir eine beliebige beschränkte Folge $\{x_j\}$ aus $\mathrm{Kern}(T+S)$ und sehen $(T+S)(x_j) = 0$ für alle j, sodass wiederum das obige Argument (hier mit $y = 0$) die Existenz einer konvergenten Teilfolge garantiert. Somit ist jede beschränkte Teilmenge von $\mathrm{Kern}(T+S)$ relativ kompakt und daher $\mathrm{Kern}(T+S)$ endlich-dimensional.
Nach Proposition 5.0.7 ist mit T auch T^* ein Fredholm-Operator. Da mit S auch S^* kompakter Operator ist, folgt aus Symmetrie die Endlichkeit von $\mathrm{Kern}(T^* + S^*) = \mathrm{Kern}((T+S)^*)$. Somit ist wieder nach Proposition 5.0.7 $T + S$ ein Fredholm-Operator.

Wir bemerken, dass mit S auch $t\,S$ ein kompakter Operator ist, für jedes $t \in [0,1]$. Somit ist $T + t\,S$ für jedes $t \in [0,1]$ ein Fredholm-Operator und die Funktion $t \mapsto ind(T + t\,S)$ wohldefiniert. Nach Teil 1 des Theorems ist diese Funktion lokal-konstant auf $[0,1]$ und somit konstant. Also erhalten wir $ind(T+S) = ind(T)$ insbesondere, wie behauptet.

Korollar 5.0.2. *Seien X, Y Banachräume,*

1) *so ist die Teilmenge* $\mathrm{Fred}(X, Y)$ *aller Fredholm-Operatoren von X nach Y offen in $L(X, Y)$, und der Fredholm-Index ist konstant auf den Zusammenhangskomponenten von* $\mathrm{Fred}(X, Y)$.

2) *Ist $H : [0, 1] \to \mathrm{Fred}(X, Y)$ eine stetige Abbildung, so gilt $ind(H(0)) = ind(H(1))$, d.h. der Fredholm-Index ist homotopie-invariant, oder äquivalent zu dieser Aussage: der Fredholm-Index ist eine wohldefinierte Abbildung von der Menge* $\mathrm{Fred}(X, Y)/(T_1 \backsimeq T_2)$ *aller Homotopie-Klassen in* $\mathrm{Fred}(X, Y)$ *nach* $\mathbb{Z}$.

6 Anwendung auf partielle Differentialgleichungen in Divergenzform

Wir kommen nun zu einer Anwendung dieser Theorie auf partielle elliptische Differentialgleichungen zweiter Ordnung in Divergenz-Form. Hierzu benötigen wir zwei fundamentale Sätze der Hilbertraum-Theorie:

Theorem 6.0.7. *[Riesz] Ist X ein reeller Hilbertraum mit Skalarprodukt $\langle \cdot , \cdot \rangle_X$, so ist die lineare Zuordnung $J_X : x \mapsto \langle x, \cdot \rangle$ ein isometrischer Isomorphismus von X auf X^*.*

Theorem 6.0.8. *[Lax-Milgram] Ist X ein reeller Hilbertraum mit Skalarprodukt $\langle \cdot , \cdot \rangle_X$ und $B : X \times X \to \mathbb{R}$ eine stetige Bilinearform, d.h. $B \in L(X, X^*)$ mit*

$$| B(x,y) | \leq C_0 \parallel x \parallel \parallel y \parallel \tag{6.1}$$

$\forall x, y \in X$, die ausserdem koerziv ist, d.h. die

$$B(x,x) \geq c_0 \parallel x \parallel^2$$

$\forall x \in X$ erfüllt, so existiert genau ein Isomorphismus $A : X \to X$, welcher $B = J_X \circ A$ und ausserdem die Abschätzungen

$$\parallel A \parallel \leq C_0 \qquad \text{und} \qquad \parallel A^{-1} \parallel \leq \frac{1}{c_0}$$

erfüllt.

Beweis: Wir erhalten zunächst aus der Voraussetzung (6.1) an B, dass für jedes fixierte $x \in X$ $y \mapsto B(x,y)$ eine stetige lineare Abbildung aus X^* ist, sodass es nach Theorem 6.0.7 ein eindeutiges Element $z \in X$ mit $\langle z, \cdot \rangle = B(x, \cdot)$ geben muss. Setzen wir also $A(x) := z$, so erhalten wir eine lineare Abbildung A von X nach X, die per Konstruktion

$$\langle A(x), y \rangle = B(x,y) \qquad \forall y \in X, \tag{6.2}$$

also $B = J_X \circ A : X \to X^*$ erfüllt. A ist stetig, denn testen wir (6.2) mit dem Vektor $y = A(x)$ so erhalten wir:

$$\parallel A(x) \parallel^2 = \langle A(x), A(x) \rangle = B(x, A(x)) \leq C_0 \parallel x \parallel \parallel A(x) \parallel \tag{6.3}$$

also $\parallel A \parallel \leq C_0$, wie behauptet. Desweiteren liefert die Koerzivität von B:

$$c_0 \parallel x \parallel^2 \leq B(x,x) = \langle A(x), x \rangle \leq \parallel A(x) \parallel \parallel x \parallel,$$

also

$$c_0 \parallel x \parallel \leq \parallel A(x) \parallel . \tag{6.4}$$

Dies beweist sowohl die Injektivität von A als auch die Abgeschlossenheit von Bild(A). Für ein beliebiges z aus dem orthogonalen Komplement von Bild(A) folgt hieraus:

$$0 = \langle A(z), z\rangle = B(z,z) \geq c_0 \parallel z \parallel^2,$$

also dass $z = 0$. Somit folgt $X = \text{Bild}(A) \oplus \text{Bild}(A)^\perp = \text{Bild}(A)$, also auch die Surjektivität von A. Zusammen mit (6.4) folgt hieraus:

$$\parallel A^{-1}(x) \parallel \leq \frac{1}{c_0} \parallel x \parallel$$

und daher $\parallel A^{-1} \parallel \leq \frac{1}{c_0}$, wie erwünscht.

Beispiel: Es sei $\emptyset \neq \Omega \subset\subset \mathbb{R}^n$ offen, $a_{ij}, b_i, c_j, d \in L^\infty(\Omega)$ mit

$$\parallel a_{ij} \parallel_{L^\infty(\Omega)}, \parallel b_i \parallel_{L^\infty(\Omega)}, \parallel c_j \parallel_{L^\infty(\Omega)}, \parallel d \parallel_{L^\infty(\Omega)} < \Lambda,$$

und $a_{ij}(x)$ sei eine symmetrische $(n \times n)-$Matrix, die ausserdem

$$a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq \frac{1}{\Lambda} \mid \xi \mid^2 \quad \text{für } \xi \in \mathbb{R}^n \text{ und jedes } x \in \Omega,$$

für ein $\Lambda > 0$ erfülle. Wir betrachten den elliptischen, linearen Differentialoperator

$$B := \int_\Omega (-\partial_i(a_{ij}\,\partial_j\ \cdot + b_i\,\cdot) - c_j\,\partial_j\ \cdot - d\,\cdot)(\,\cdot\,)\, d\mathcal{L}^n : \mathring{W}^{1,2}(\Omega) \longrightarrow (\mathring{W}^{1,2}(\Omega))^* \tag{6.5}$$

2. Ordnung in Divergenzform und beweisen:

Theorem 6.0.9. *1) B ist ein Fredholm-Operator von $\mathring{W}^{1,2}(\Omega)$ nach $(\mathring{W}^{1,2}(\Omega))^*$ mit $F-$Index$(B) = 0$.*

2) Unter der zusätzlichen Bedingung

$$\int_\Omega b_i\,\partial_i v - d\,v\,d\mathcal{L}^n \geq 0 \qquad \forall\, v \in \mathring{W}^{1,1}(\Omega) \quad \text{mit } v \geq 0 \tag{6.6}$$

an die Koeffizienten von B ist B ein Isomorphismus von $\mathring{W}^{1,2}(\Omega)$ auf $(\mathring{W}^{1,2}(\Omega))^*$. Insbesondere existiert in diesem Fall zu jedem $f \in L^2(\Omega)$ und jedem $\psi \in L^2(\Omega, \mathbb{R}^n)$ genau eine Lösung u der schwachen Differential-Gleichung

$$\int_\Omega a_{ij}\,\partial_j u\,\partial_i\phi + b_i\,u\,\partial_i\phi - c_j\,\partial_j u\,\phi - d\,u\,\phi\,d\mathcal{L}^n = \int_\Omega f\,\phi + \psi_i\,\partial_i\,\phi\ d\mathcal{L}^n$$

$\forall\,\phi \in \mathring{W}^{1,2}(\Omega)$, oder kurz von

$$B(u,\,\cdot\,) = f - \text{div}(\psi) \qquad \text{„schwach" auf } \Omega.$$

3) Bezeichnet $T : L^2(\Omega) \to (\mathring{W}^{1,2}(\Omega))^*$ *die durch*

$$T(f).\phi := \int_\Omega f\,\phi\,d\mathcal{L}^n$$

gegebene kompakte Abbildung aus Aufgabe 22, so erhalten wir unter der Bedingung (6.6) einen stetigen, kompakten Lösungs-Operator $L := B^{-1} \circ T : L^2(\Omega) \to \mathring{W}^{1,2}(\Omega)$, *der jedem vorgegebenen* $f \in L^2(\Omega)$ *die eindeutige Lösung* u *der schwachen Differential-Gleichung ,,*$B(u, \cdot\,) = f$ *auf* Ω*" zuordnet.*

Beweis: Von (1): In einer Übungsaufgabe wurden die folgenden einfachen Aussagen über B bewiesen:
Es ist $B : \mathring{W}^{1,2}(\Omega) \times \mathring{W}^{1,2}(\Omega) \to \mathbb{R}$ eine stetige Bilinearform, die ausserdem der Garding-Ungleichung

$$B(u,u) \geq \frac{1}{4\Lambda} \parallel u \parallel^2_{W^{1,2}(\Omega)} - C(n,\Lambda) \parallel u \parallel^2_{L^2(\Omega)}$$

für alle $u \in \mathring{W}^{1,2}(\Omega)$ mit einer Konstanten $C(n,\Lambda) > 0$ genügt. Somit ist die Bilinearform $(u,\phi) \mapsto B(u,\phi) + C(n,\Lambda) \int_\Omega u\,\phi\,d\mathcal{L}^n$ nicht nur stetig, sondern auch koerziv auf $\mathring{W}^{1,2}(\Omega) \times \mathring{W}^{1,2}(\Omega)$. Bezeichnet nun $T : L^2(\Omega) \to (\mathring{W}^{1,2}(\Omega))^*$ die durch

$$T(f).\phi := \int_\Omega f\,\phi\,d\mathcal{L}^n$$

gegebene kompakte Abbildung aus Aufgabe 22 (für $p = 2$) und $R : \mathring{W}^{1,2}(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ die (nach Rellich) kompakte Einbettung, so können wir den Satz von Lax-Milgram auf $B + C(n,\Lambda)\,T \circ R : \mathring{W}^{1,2}(\Omega) \to (\mathring{W}^{1,2}(\Omega))^*$ anwenden und erhalten die Existenz eines eindeutigen Isomorphismus' $A : \mathring{W}^{1,2}(\Omega) \to \mathring{W}^{1,2}(\Omega)$, welcher $B + C(n,\Lambda)\,T \circ R = J \circ A : \mathring{W}^{1,2}(\Omega) \to (\mathring{W}^{1,2}(\Omega))^*$ erfüllt, wobei J der kanonische Isomorphismus aus Riesz' Theorem 6.0.7 sei. Somit erweist sich B als kompakte Störung eines Isomorphismus' und daher als Fredholm-Operator von $\mathring{W}^{1,2}(\Omega)$ nach $(\mathring{W}^{1,2}(\Omega))^*$ vom $F-$Index 0 nach Theorem 5.0.6.
Von (2): Unter der Bedingung (6.6) an die Koeffizienten von B garantiert das Maximum-Prinzip der L^2-Theorie: Erfüllt eine Funktion $u \in W^{1,2}(\Omega)$ die homogene Differential-Gleichung $B(u) = 0$,,schwach" auf Ω, so folgt $\sup_\Omega \mid u \mid = \sup_{\partial\Omega} \mid u \mid$. Wegen $\sup_{\partial\Omega} \mid u \mid = 0$ für $u \in \mathring{W}^{1,2}(\Omega)$ zeigt dies die Injektivität von B, also dass B nach dem Resultat von Teil (1) ein Isomorphismus sein muss.
Von (3): Da wir in Aufgabe 22 bereits zeigten, dass die durch $T(f).\phi := \int_\Omega f\,\phi\,d\mathcal{L}^n$ definierte lineare Abbildung $T : L^2(\Omega) \to (\mathring{W}^{1,2}(\Omega))^*$ kompakt ist, erhalten wir unter der Bedingung (6.6) an B sofort aus Teil (2) den stetigen, kompakten Lösungs-Operator $L := B^{-1} \circ T : L^2(\Omega) \to \mathring{W}^{1,2}(\Omega)$, der jedem vorgegebenen $f \in L^2(\Omega)$ die eindeutige Lösung u der schwachen Differential-Gleichung

$$B(u,\phi) = \int_\Omega f\,\phi\,d\mathcal{L}^n$$

$\forall\,\phi \in \mathring{W}^{1,2}(\Omega)$ zuordnet.

Wir werden diesen Satz nun anwenden, um uns einen optimalen Überblick über die schwachen Eigenfunktionen und Eigenwerte eines solchen Differential-Operators B im Spezialfall „$b_i = c_i = 0$ und $d \leq 0$ auf Ω" zu verschaffen.

Definition 6.0.7. *Wir nennen ein Paar* $(u, \lambda) \in (\mathring{W}^{1,2}(\Omega) \setminus \{0\}) \times \mathbb{R}$ *eine „schwache Eigenfunktion" u zum Eigenwert λ von B, falls*

$$B(u, \phi) = \lambda \int_\Omega u \, \phi \, d\mathcal{L}^n \qquad \forall \phi \in \mathring{W}^{1,2}(\Omega) \tag{6.7}$$

von (u, λ) erfüllt wird. Für $\lambda \in \mathbb{R}$ definieren wir den linearen Eigenraum von B zu λ durch:

$$\mathrm{Eig}_\lambda(B) := \{\tilde{u} \in \mathring{W}^{1,2}(\Omega) \mid \text{Gleichung (6.7) gilt für das Paar } (\tilde{u}, \lambda)\}$$

Theorem 6.0.10. *Wir betrachten den linearen Differential-Operator B aus* (6.5) *mit $b_i = c_i = 0$ und $d \leq 0$ auf Ω und beweisen:*

1) Es lässt sich eine Orthonormalbasis aus schwachen Eigenfunktionen von B des Hilbertraums $L^2(\Omega)$ bilden, d.h. es gilt die orthogonale Zerlegung

$$L^2(\Omega) = \overline{\oplus_{\lambda \in \mathbb{R}} \mathrm{Eig}_\lambda(B)},$$

und jeder Eigenraum $\mathrm{Eig}_\lambda(B)$ *ist endlich-dimensional.*

2) Die Menge $\mathrm{Spec}(B)$ *aller Eigenwerte von B kann zu einer Folge $\{\lambda_i\}$ in $\mathbb{R}_{>0}$ geordnet werden, die monoton gegen ∞ divergiert.*

Beweis: Von (1): Wir verketten den Lösungs-Operator $L := B^{-1} \circ T : L^2(\Omega) \to \mathring{W}^{1,2}(\Omega)$ aus Theorem 6.0.9, (3), mit der kompakten Rellich-Einbettung $R : \mathring{W}^{1,2}(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ und erhalten somit einen kompakten Operator $\tilde{L} := R \circ B^{-1} \circ T : L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$. Dieser ist erstens selbstadjungiert, d.h. erfüllt $\langle \tilde{L}(g), f \rangle_{L^2(\Omega)} = \langle g, \tilde{L}(f) \rangle_{L^2(\Omega)}$ für alle $g, f \in L^2(\Omega)$, denn testen wir die schwache Differential-Gleichung „$B(L(f), \cdot\,) = f$ auf Ω" mit der Funktion $\phi := L(g)$, so erhalten wir:

$$\langle \tilde{L}(g), f \rangle_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega f \, L(g) \, d\mathcal{L}^n = B(L(f), L(g)).$$

Da $a_{ij}(x)$ eine symmetrische Matrix ist, folgt die Symmetrie von B und daher $\langle \tilde{L}(g), f \rangle_{L^2(\Omega)} = B(L(f), L(g)) = B(L(g), L(f)) = \langle g, \tilde{L}(f) \rangle_{L^2(\Omega)}$. Setzen wir insbesondere $g = f$, so erhalten wir wegen $d \leq 0$ und $\big(a_{ij}\big) \geq \frac{1}{\Lambda} \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n}$:

$$\langle \tilde{L}(f), f \rangle_{L^2(\Omega)} = B(L(f), L(f)) \geq \frac{1}{\Lambda} \parallel \nabla L(f) \parallel^2_{L^2(\Omega)} \geq 0,$$

für jedes $f \in L^2(\Omega)$, also dass der „Lösungs-Operator" $\tilde{L}$ positiv semidefinit auf $L^2(\Omega)$ ist. Schliesslich ist $\tilde{L}$ auch injektiv, da aus $\tilde{L}(f) = 0$

$$0 = B(L(f), \phi) = \int_\Omega f \, \phi \, d\mathcal{L}^n \quad \forall \, \phi \in \mathring{W}^{1,2}(\Omega),$$

also auch $\forall\, \phi \in L^2(\Omega)$, und somit $f = 0$ folgt.
Der Spektralsatz für kompakte, selbstadjungierte und positiv-semidefinite Operatoren garantiert nun:

1) Das Spektrum von $\tilde{L}$ ohne $\{0\}$ besteht aus isolierten Punkten aus $\mathbb{R}_{>0}$, die zu einer Folge $\{\mu_i\}$ geordnet werden können, die monoton gegen 0 konvergiert.

2) Die Eigenräume
$$\mathrm{Eig}_{\mu_i}(\tilde{L}) := \mathrm{Kern}(\tilde{L} - \mu_i \,\mathrm{Id}_{L^2(\Omega)})$$
sind [anhand der Kompaktheit von $\tilde{L}$ und Aufgabe 15] endlich-dimensional, und es gilt: $L^2(\Omega) = \overline{\mathrm{Kern}(\tilde{L}) \oplus \oplus_{i\in\mathbb{N}} \mathrm{Eig}_{\mu_i}(\tilde{L})}$.

Da $\mathrm{Kern}(\tilde{L})$ trivial ist, folgt hier also

$$L^2(\Omega) = \overline{\oplus_{i\in\mathbb{N}} \mathrm{Eig}_{\mu_i}(\tilde{L})}. \tag{6.8}$$

Wir zeigen nun, dass die Folge $\{\frac{1}{\mu_i}\}$ exakt die Menge aller Eigenwerte von B ist, und dass

$$\mathrm{Eig}_{\lambda_i}(B) = \mathrm{Eig}_{\mu_i}(\tilde{L}) \tag{6.9}$$

für jeden Eigenwert $\lambda_i := \frac{1}{\mu_i}$ von B gilt. Sei zunächst $u \in \mathrm{Eig}_{\mu_i}(\tilde{L})$ gewählt, so gilt $\mu_i\, u = \tilde{L}(u) = L(u) \in \mathring{W}^{1,2}(\Omega)$, und daher anhand der Definition von $\tilde{L}$:

$$\mu_i\, B(u, \phi) = \int_\Omega u\, \phi\, d\mathcal{L}^n$$

$\forall\, \phi \in \mathring{W}^{1,2}(\Omega)$. Dies zeigt wegen $\mu_i > 0$, dass in der Tat die gesamte Folge $\{\lambda_i\} := \{\frac{1}{\mu_i}\}$ in der Menge aller Eigenwerte von B enthalten ist, und dass $\mathrm{Eig}_{\mu_i}(\tilde{L}) \subset \mathrm{Eig}_{\lambda_i}(B)$ gilt. Nun sei umgekehrt $(u, \lambda) \in (\mathring{W}^{1,2}(\Omega) \setminus \{0\}) \times \mathbb{R}$ ein Paar, welches Gleichung (6.7) löst. u ist also nach Theorem 6.0.9 die eindeutige $\mathring{W}^{1,2}$–Lösung der schwachen Gleichung „$B(u, \cdot\,) = f$" für $f := \lambda u$, sodass $u = L(\lambda u) = \lambda\, \tilde{L}(u)$ gelten muss. Dies zeigt, dass $\frac{1}{\lambda}$ ein Eigenwert von $\tilde{L}$ und u ein Eigenvektor von $\tilde{L}$ ist. Anhand des Spektralsatzes muss folglich ein $i \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{\lambda} = \mu_i \in (0, \infty)$ existieren und ausserdem u ein Element aus $\mathrm{Eig}_{\mu_i}(\tilde{L})$ sein. Also gilt in der Tat: $\mathrm{Spec}(B) = \{\frac{1}{\mu_i}\}$ und die umgekehrte Inklusion $\mathrm{Eig}_{\lambda_i}(B) \subset \mathrm{Eig}_{\mu_i}(\tilde{L})$, wenn wir $\lambda = \lambda_i := \frac{1}{\mu_i}$ setzen, insgesamt also die Behauptung (6.9) für jeden Eigenwert $\lambda_i = \frac{1}{\mu_i}$ von B. Insbesondere folgt hieraus, dass alle Eigenräume von B endlich-dimensional sind, wegen (6.8)

$$L^2(\Omega) = \overline{\oplus_{i\in\mathbb{N}} \mathrm{Eig}_{\lambda_i}(B)}$$

erfüllen und schliesslich $0 < \lambda_i = \frac{1}{\mu_i} \nearrow \infty$ gelten muss.

<u>Bemerkung</u>: Die Aussage (6.8) bedeutet, dass es eine Folge $\{u_i\}$ von Eigenfunktionen von B aus $\mathring{W}^{1,2}(\Omega)$ geben muss, die $\langle u_i, u_j\rangle_{L^2(\Omega)} = \delta_{ij}$ erfüllen, und sodass zu

jedem $f \in L^2(\Omega)$ die Folge $\sum_{i=1}^N \langle f, u_i \rangle \, u_i$ der orthogonalen Projektionen von f auf $\mathrm{Span}(u_1, u_2, \ldots, u_N)$

$$\sum_{i=1}^N \langle f, u_i \rangle \, u_i \to f \qquad \text{in } L^2(\Omega)$$

für $N \to \infty$ erfüllen müssen. Und diese Aussage ist wiederum zu Parsevals Identität, also zu

$$\| f \|^2_{L^2(\Omega)} = \sum_{i=1}^\infty \langle f, u_i \rangle^2 \qquad \forall \, f \in L^2(\Omega)$$

äquivalent.

Beispiel: Noch konkreter betrachten wir die Situation $a_{ij} := \delta_{ij}$, $b_i = c_i = 0$ und $d = 0$, also $B(u, \phi) = \int_\Omega \nabla u \, \nabla \phi \, d\mathcal{L}^n$ und versuchen zu vorgegebenem $\Omega \subset\subset \mathbb{R}^n$ alle Paare $(u, \lambda) \in (\mathring{W}^{1,2}(\Omega) \setminus \{0\}) \times \mathbb{R}$ zu bestimmen, welche die schwache Eigenwert-Gleichung

$$\int_\Omega \nabla u \, \nabla \phi \, d\mathcal{L}^n = \lambda \int_\Omega u \, \phi \, d\mathcal{L}^n \tag{6.10}$$

$\forall \, \phi \in \mathring{W}^{1,2}(\Omega)$ des negativen Laplace-Operators auf Ω erfüllen.

1) Wir betrachten zuerst speziell $\Omega := (0, 2\pi)$. In diesem Fall berechnet man direkt, dass die Eigenwerte von $-\frac{d^2}{dt^2}$ durch $\lambda_k = \frac{k^2}{4}$ gegeben sind und zu jedem Eigenwert λ_k ein nur eindimensionaler Eigenraum von der Eigenfunktion $u_k(t) := \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin(\frac{k}{2} \, t)$ aufgespannt wird. Aus Theorem 6.0.10 folgt hier insbesondere die orthogonale Zerlegung

$$L^2((0, 2\pi)) = \overline{\oplus_{k \in \mathbb{N}} \mathrm{Span}(u_k)},$$

und man rechnet leicht direkt nach, dass $\{u_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ in der Tat ein ON-System bildet, also dass $\langle u_k, u_l \rangle_{L^2(0,2\pi)} = \delta_{kl}$ für alle $k, l \in \mathbb{N}$ gilt, woraus insbesondere die eindimensionale Fourier-Zerlegung

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{k \in \mathbb{N}} \langle f, u_k \rangle \, \sin(\frac{k}{2} \, t) \qquad \text{in } \mathcal{L}^1 - f.a. \; t \in (0, 2\pi) \tag{6.11}$$

einer beliebigen L^2-Funktion $f \in L^2((0, 2\pi))$ folgt.

2) Nun versuchen wir dieses Resultat auf den Fall $\Omega := (0, 2\pi)^n$ zu verallgemeinern. Wir definieren hierfür die Länge eines beliebigen Tupels $\vec{k} \in \mathbb{N}^n$ durch $| \, \vec{k} \, |^2 := k_1^2 + \ldots + k_n^2$ und die Produkt-Funktionen

$$u_{\vec{k}}(x) := \Pi_{i=1}^N u_k(x_i) = \frac{1}{\pi^{n/2}} \, \Pi_{i=1}^N \sin(\frac{k_i}{2} \, x_i)$$

mit $x := (x_1, \ldots, x_n) \in (0, 2\pi)^n$. Wir sehen sofort, dass $u_{\vec{k}}$ eine Lipschitz-stetige Funktion auf dem Lipschitz-Gebiet $(0, 2\pi)^n$ mit $u_{\vec{k}} \equiv 0$ auf $\partial\Omega$ ist, woraus $u_{\vec{k}} \in$

$W^{1,\infty}(\Omega)\cap \mathring{W}^{1,2}(\Omega)$ folgt. Desweiteren rechnet man mittels $-\frac{d^2}{dt^2}(u_k(t)) = \frac{k^2}{4}\, u_k(t)$ leicht nach, dass für jedes $\vec{k}\in\mathbb{N}^n$

$$-\triangle(u_{\vec{k}}) = \frac{1}{4}\mid \vec{k}\mid^2\; u_{\vec{k}} \qquad \text{klassisch auf } \Omega$$

gilt. Da Ω ein Lipschitz-Gebiet ist, dürfen wir partiell integrieren und erhalten

$$\int_\Omega \nabla u_{\vec{k}}\,\nabla\phi\, d\mathcal{L}^n = \int_\Omega -\triangle(u_{\vec{k}})\,\phi\, d\mathcal{L}^n = \frac{1}{4}\mid \vec{k}\mid^2 \int_\Omega u_{\vec{k}}\,\phi\, d\mathcal{L}^n$$

für alle $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$ und somit für alle $\phi\in \mathring{W}^{1,2}(\Omega)$, also dass $u_{\vec{k}}$ eine sowohl starke als auch schwache Eigenfunktion von $-\triangle$ zum Eigenwert $\frac{1}{4}\mid \vec{k}\mid^2$ auf Ω ist. Insbesondere zeigt dies: $\mathrm{Spec}(-\triangle)\supset \{\frac{1}{4}\mid\vec{k}\mid^2 \mid \vec{k}\in\mathbb{N}^n\}$. Zur vollständigen Bestimmung des Spektrums und der Eigenräume von $-\triangle$ kann folgender Satz mittels des Resultats von Punkt (1), vollständiger Induktion über die Dimension n des Quaders Ω und mittels Theorem 6.0.10 bewiesen werden:

Theorem 6.0.11. *a) Das Spektrum von $-\triangle$ auf dem Quader $\Omega := (0,2\pi)^n$ ist exakt durch $\{\frac{1}{4}\mid\vec{k}\mid^2\mid \vec{k}\in\mathbb{N}^n\}$ gegeben, und zu einem beliebig gewählten Eigenwert $\lambda = \frac{1}{4}\mid\vec{k}\mid^2$ ist*

$$\mathrm{Eig}_\lambda(-\triangle) = \mathrm{Span}\{u_{\vec{l}}\mid\, \mid\vec{l}\mid = \mid\vec{k}\mid = 2\sqrt{\lambda}\}.$$

Insbesondere gilt: $\dim(\mathrm{Eig}_\lambda(-\triangle)) = \sharp\{(l_1,\ldots,l_n)\in\mathbb{N}^n \mid l_1^2+\ldots+l_n^2 = 4\,\lambda\}$.

b) Die Funktionen $\{u_{\vec{k}}\}$ bilden eine ON-Basis von $L^2(\Omega)$, d.h. es gilt

$$L^2((0,2\pi)^n) = \overline{\oplus_{\vec{k}\in\mathbb{N}^n}\mathrm{Eig}_{\frac{1}{4}|\vec{k}|^2}(-\triangle)} = \overline{\oplus_{\vec{k}\in\mathbb{N}^n}\mathrm{Span}(u_{\vec{k}})}.$$

Dieses Resultat wirft bei fixierter Dimension $n>1$ zwei rein zahlentheoretische (klassische) Fragen auf:

1) Welche natürlichen Zahlen lassen sich als Summe von n Quadraten natürlicher Zahlen (ohne Nullen) darstellen ?

2) Kann man die Anzahl $\sharp\{(l_1,\ldots,l_n)\in\mathbb{N}^n\mid l_1^2+\ldots+l_n^2 = 4\,\lambda\}$ der Gitterpunkte aus $\mathbb{N}^n$ mit Länge $2\sqrt{\lambda}$ nur in Abhängigkeit von n und λ nach oben bzw. unten abschätzen ?

Immerhin konnte bereits Lagrange beweisen, dass sich jede natürliche Zahl als Summe von 4 Quadraten ganzer Zahlen (also mit Nullen) darstellen lässt, und es lässt sich jede natürliche Zahl N als Summe von 2 Quadraten darstellen, falls in der Primfaktor-Zerlegung $N = \Pi_{i=1}^r p_i^{\mu_i}$ von N die Potenz μ_i jeder Primzahl p_i, welche $\equiv 3 \mod 4$ ist, gerade ist. Desweiteren gibt es insbesondere für die Anzahl der Darstellungen von $N = 4\,\lambda$ durch 2 bzw. 4 Quadrate die folgenden präzisen Formeln:

$$\sharp\{(l_1,l_2)\in\mathbb{Z}^2\mid l_1^2+l_2^2 = 4\,\lambda\} = 4 \sum_{d\,\text{teilt}\,4\,\lambda,\, d\,\text{ungerade}} (-1)^{\frac{d-1}{2}}$$

und

$$\sharp\{(l_1, l_2, l_3, l_4) \in \mathbb{Z}^4 \mid l_1^2 + l_2^2 + l_3^2 + l_4^2 = 4\,\lambda\} = \begin{cases} 8\,\sigma(4\,\lambda) & : \quad \text{falls}\, \lambda \notin \mathbb{N} \\ 8\,\sigma(4\,\lambda) - 32\,\sigma(\lambda) & : \quad \text{falls}\, \lambda \in \mathbb{N}, \end{cases}$$

wobei $\sigma(z)$ die Summe aller Teiler von z einschliesslich 1 und z bezeichne. Aus diesen beiden Formeln folgen also immerhin Abschätzungen nach oben für die Dimensionen $\dim(\mathrm{Eig}_\lambda(-\triangle))$ der Eigenräume des Laplace-Operators auf dem Quadrat $(0, 2\pi)^2$ und auf dem vier-dimensionalen Quader $(0, 2\pi)^4$.

7 Kontinuitätsmethode mit Anwendungen auf elliptische Differentialgleichungen

Theorem 7.0.12. *Es seien X, Y Banachräume, $L_1, L_0 : X \to Y$ zwei lineare, stetige Abbildungen und $L_t := t\,L_1 + (1-t)\,L_0 : X \to Y$ deren Konvexkombination. Falls eine Konstante $C > 0$ existiert, sodass*

$$\| x \|_X \leq C \; \| L_t(x) \|_Y \qquad \forall\, x \in X \tag{7.1}$$

und für alle $t \in [0,1]$ gilt, und falls L_0 ein Isomorphismus ist, so ist auch L_1 ein Isomorphismus von X auf Y.

Beweis: Sei $t \in [0,1]$ ein beliebig fixierter Punkt, für den L_t ein Isomorphismus ist. Nach (7.1) gilt $\| (L_t)^{-1} \| \leq C$. Wegen $L_t - L_{\tilde{t}} = (t - \tilde{t})\,(L_1 - L_0)$ folgt dann für jedes $\tilde{t} \in [0,1]$, welches $| t - \tilde{t} | \, \| L_1 - L_0 \| < C^{-1}$ erfüllt:

$$\| L_t - L_{\tilde{t}} \| < C^{-1} \leq \| (L_t)^{-1} \|^{-1} .$$

Da L_t ein Isomorphismus ist, folgt hieraus anhand von Aufgabe 9, dass auch $L_{\tilde{t}}$ ein Isomorphismus von X auf Y ist. Wählen wir also $N \in \mathbb{N}$ so gross, dass $\frac{1}{N} \; \| L_1 - L_0 \| < C^{-1}$ gilt, und setzen wir $t_j := \frac{j}{N}$, so folgt per Induktion nach endlich vielen Schritten, dass mit L_0 auch L_{t_1}, L_{t_2}, …, $L_{t_N} = L_1$ Isomorphismen sind.

Als eine Anwendung dieses Satzes betrachten wir das folgende

Beispiel:
Es sei $\emptyset \neq \Omega \subset\subset \mathbb{R}^n$ offen mit C^∞-glattem Rand und $1 < p < \infty$. Wir führen folgende „Strukturbedingungen" an eine Klasse elliptischer Differential-Operatoren

$$L := -a_{ij}\,\partial_{ij} + b_i\,\partial_i + c \, : X := W^{2,p}(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega) \to L^p(\Omega)$$

2. Ordnung ein:
$a_{ij} \in C^0(\overline{\Omega}),\ b_i,\ c \in L^\infty(\Omega)$ mit

$$\begin{gathered} a_{ij}\xi_i\xi_j \geq \tfrac{1}{\Lambda}|\xi|^2 \quad \text{auf } \bar{\Omega} \quad \text{und für alle } \xi \in \mathbb{R}^n \\ |a_{ij}(x) - a_{ij}(y)| \leq \omega(|x-y|), \quad \text{für } x, y \in \bar{\Omega} \\ \| a_{ij}, b_i, c \|_{L^\infty(\Omega)} \leq \Lambda, \end{gathered}$$

für ein $\Lambda \geq 1$, wobei ω ein gegebener „Stetigkeitsmodul" sei, d.h. eine stetige Funktion von $\mathbb{R}_+$ nach $\mathbb{R}_+$ mit $\lim_{t \downarrow 0} \omega(t) = 0$. Aus der Calderon-Zygmund-Theorie elliptischer

Differentialgleichungen ist bekannt, daß für $u \in W^{2,p}(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega)$, welches die lineare elliptische Differentialgleichung in Nicht-Divergenzform

$$L(u) = -a_{ij}\partial_{ij}u + b_i\partial_i u + cu = \varphi \quad \text{fast überall in } \Omega \tag{7.2}$$

mit $\varphi \in L^p(\Omega)$ erfüllt, unter obigen Strukturbedingungen an L die folgenden Calderon-Zygmund-Abschätzungen gelten:

$$\| u \|_{W^{2,p}(\Omega)} \leq C(\Omega, p, \Lambda, \omega)(\| \varphi \|_{L^p(\Omega)} + \| u \|_{L^p(\Omega)}), \tag{7.3}$$

siehe z.B. [Gilbarg-Trudinger], Theorem 9.14. Solches u heißt eine „starke Lösung" von (7.2). Kombiniert man die Calderon-Zygmund-Abschätzungen, siehe [GT] Lemma 9.16, mit dem Alexandroffschen-Maximumprinzip, siehe [GT] Theorem 9.5, so folgt für $u \in W^{2,p}(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega)$, daß

$$L(u) = -a_{ij}\partial_{ij}u + b_i\partial_i u + cu \equiv 0 \Rightarrow u \equiv 0$$

gilt, falls $c \geq 0$ auf Ω zusätzlich angenommen wird, also dass jeder solche Differential-Operator L eine injektive, lineare Abbildung von X nach $L^p(\Omega)$ ist, falls zusätzlich $c \geq 0$ auf Ω gilt. Wir werden nun die wesentlichen Schritte des Beweises des folgenden Satzes skizzieren:

Theorem 7.0.13. *Jeder Differential-Operator L, der die obigen Strukturbedingungen erfüllt und für den ausserdem $c \geq 0$ auf Ω gilt, ist ein Isomorphismus von $X = W^{2,p}(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega)$ auf $L^p(\Omega)$.*

Beweis:

(i) Zunächst zeigt man leicht, dass jeder Operator L unter den obigen Strukturbedingungen ein *stetiger* Operator von $X = W^{2,p}(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega)$ nach $L^p(\Omega)$ mit $\| L \| \leq \Lambda$ ist.

(ii) Mittels eines klassischen Widerspruch-Beweises zeigen wir nun, dass im Falle $c \geq 0$, in welchem also L injektiv ist, die obige Calderon-Zygmund-Abschätzung für jeden zulässigen Operator L wesentlich verbessert werden kann:
Es existiert eine Konstante $\tilde{C}(\Omega, p, \Lambda, \omega)$, für die bereits

$$\| u \|_{W^{2,p}(\Omega)} \leq \tilde{C}(\Omega, p, \Lambda, \omega) \ \| L(u) \|_{L^p(\Omega)} \tag{7.4}$$

für jedes $u \in X$ gilt. Denn, angenommen diese Aussage wäre falsch, so existierte zu jedem $k \in \mathbb{N}$ ein zulässiger Operator L^k und ein $u_k \in X$, sodass

$$\| u_k \|_{W^{2,p}(\Omega)} > k \ \| L^k(u_k) \|_{L^p(\Omega)} \tag{7.5}$$

gilt. Anhand der Linearität von L^k können wir OBDA $\| u_k \|_{L^p(\Omega)} = 1$ annehmen. Somit liefert Kombination von (7.5) mit (7.3):

$$\left(1 - \frac{C(\Omega, p, \Lambda, \omega)}{k}\right) \| u_k \|_{W^{2,p}(\Omega)} \leq C(\Omega, p, \Lambda, \omega)$$

also

$$\| u_k \|_{W^{2,p}(\Omega)} < 2\,C(\Omega,p,\Lambda,\omega) \tag{7.6}$$

für $k > 2\,C(\Omega,p,\Lambda,\omega)$. Kombinieren wir dies erneut mit der Widerspruchsannahme (7.5), so sehen wir:

$$\| L^k(u_k) \|_{L^p(\Omega)} < \frac{2\,C(\Omega,p,\Lambda,\omega)}{k} \tag{7.7}$$

für $k > 2\,C(\Omega,p,\Lambda,\omega)$. Da $W^{2,p}(\Omega)$ für $1 < p < \infty$ reflexiv ist und da X bzgl. der $W^{2,p}-$Norm ein Banach-Teilraum von $W^{2,p}(\Omega)$ ist, erhalten wir zunächst anhand von (7.6) eine Teilfolge $\{u_{k_m}\}$ und ein $u^* \in X$, sodass

$$\begin{aligned} u_{k_m} &\rightharpoonup u^* \qquad \text{schwach in } W^{2,p}(\Omega) \\ u_{k_m} &\to u^* \qquad \text{stark in } W^{1,p}(\Omega). \end{aligned} \tag{7.8}$$

Desweiteren folgt aus den Strukturbedingungen $\| a_{ij}^k, b_i^k, c^k \|_{L^\infty(\Omega)} \leq \Lambda$ an die Koeffizienten jedes Operators L^k nun anhand der Reflexivität von $L^q(\Omega)$, für $q := \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{-1} \in (1,\infty)$, die Existenz von Teilfolgen $a_{ij}^{k_m}, b_i^{k_m}, c^{k_m}$ und von Funktionen $a_{ij}^*, b_i^*, c^* \in L^q(\Omega)$ mit

$$a_{ij}^{k_m}, b_i^{k_m}, c^{k_m} \rightharpoonup a_{ij}^*, b_i^*, c^* \qquad \text{schwach in } L^q(\Omega), \tag{7.9}$$

welche sogar $\| a_{ij}^*, b_i^*, c^* \|_{L^\infty(\Omega)} \leq \Lambda$ erfüllen. Ausserdem folgt aus den ersten beiden Strukturbedingungen an die Koeffizienten-Matrizen (a_{ij}^k) anhand des Satzes von Arzela-Ascoli, dass die Teilfolge $\{(a_{ij}^{k_m})\}$ sogar gleichmässig gegen die Matrix (a_{ij}^*) auf $\bar{\Omega}$ konvergiert, sodass die Koeffizienten-Matrix (a_{ij}^*) auch die ersten beiden Strukturbedingungen auf $\bar{\Omega}$ zu vorgegebenem Λ und ω erfüllt. Insgesamt ist somit der Limes-Operator L^* wieder zulässig. Kombiniert man nun die beiden Konvergenzen in (7.8) mit den Konvergenzen in (7.9) bzw. mit der gleichmässigen Konvergenz der $a_{ij}^{k_m}$ gegen a_{ij}^*, so folgt:

$$\int_\Omega L^{k_m}(u_{k_m})\,\phi\,d\mathcal{L}^n \to \int_\Omega L^*(u^*)\,\phi\,d\mathcal{L}^n \qquad \text{für } m \to \infty$$

für jedes $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$. Wegen (7.7) folgt hieraus $\int_\Omega L^*(u^*)\,\phi\,d\mathcal{L}^n = 0$, zunächst für jedes $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$, und wegen $L^*(u^*) \in L^p(\Omega)$ sogar für jedes $\phi \in L^q(\Omega)$. Da $\mathcal{L}^n-$fast jeder Punkt $x \in \Omega$ ein Lebesgue-Punkt von $L^*(u^*)$ ist, erhalten wir $L^*(u^*) = 0$ $\mathcal{L}^n-$fast überall auf Ω. Die zusätzliche Strukturbedingung $c^k \geq 0$ auf Ω an die Operatoren L^k vererbt sich anhand der schwachen Konvergenz $c^{k_m} \rightharpoonup c^*$ aus (7.9) auf c^*. Somit ist $L^* : X \to L^p(\Omega)$ injektiv und daher $u^* = 0$ $\mathcal{L}^n-$fast überall auf Ω. Andererseits wissen wir anhand der zweiten Konvergenz in (7.8) der u_{k_m}, dass $\| u^* \|_{L^p(\Omega)} = \lim_{m\to\infty} \| u_{k_m} \|_{L^p(\Omega)} = 1$ gilt, was den erwünschten Widerspruch herbeiführt.

(iii) In einem weiteren Schritt muss die Surjektivität von $-\triangle : W^{2,p}(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega) \to L^p(\Omega)$ gezeigt werden. Ansatz-Punkt ist hierfür Theorem 6.0.9, Punkt 3, welches insbesondere zu jedem $f \in C^\infty(\bar{\Omega})$ die Existenz genau einer Funktion $u = u_f \in W_0^{1,2}(\Omega)$ garantiert, welche die schwache Poisson-Gleichung

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \phi \, d\mathcal{L}^n = \int_\Omega f \, \phi \, d\mathcal{L}^n$$

$\forall \, \phi \in W_0^{1,2}(\Omega)$ löst. Da $\Omega \subset\subset \mathbb{R}^n$ einen C^∞-glatten Rand hat und die rechte Seite f dieser Gleichung von der Klasse $C^\infty(\bar{\Omega})$ ist, liefert der Satz von Friedrichs, dass u_f in $W^{k,2}(\Omega)$, für jedes $k \in \mathbb{N}$, also insbesondere in X liegt. Partielle Integration und das Fundamentallemma der Variationsrechnung liefern somit: $-\triangle(u_f) = f$ $\mathcal{L}^n$-f.ü. auf Ω. Nun wählen wir ein $f \in L^p(\Omega)$ beliebig und setzen dieses durch $f(x) = 0$, in jedem $x \in \mathbb{R}^n \setminus \Omega$, trivial zu $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ fort. Somit können Glättungen $f_\epsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ mit

$$\| f_\epsilon - f \|_{L^p(\Omega)} \to 0 \qquad \text{für } \epsilon \to 0 \tag{7.10}$$

konstruiert werden. Insbesondere ist also $\{f_\epsilon\}$ eine Cauchy-Familie in $L^p(\Omega)$. Zu jedem f_ϵ existiert nach obigem Zwischenresultat genau eine Funktion $u_\epsilon \in X$, welche

$$-\triangle(u_\epsilon) = f_\epsilon \qquad \mathcal{L}^n - \text{f.ü.} \quad \text{auf } \Omega \tag{7.11}$$

erfüllt. Da die Abschätzung (7.4) insbesondere für $L := -\triangle$ gilt, erweist sich diese Familie $\{u_\epsilon\}$ von Lösungen als eine Cauchy-Familie in X. Da X ein Banachraum ist, folgt hieraus die Existenz einer Grenzfunktion $u^* \in X$ mit $\| u_\epsilon - u^* \|_{W^{2,p}(\Omega)} \to 0$ für $\epsilon \to 0$. Zusammen mit (7.10) und (7.11) erhalten wir hieraus die erwünschte Gleichung $-\triangle(u^*) = f$ $\mathcal{L}^n$-f.ü. auf Ω.

(iv) Desweiteren ist $-\triangle$ auch injektiv, da jedes $u \in X$ mit $\triangle(u) = 0$ bereits aus $C^\infty(\bar{\Omega})$ ist, sodass entweder das Alexandroffsche oder das klassische (schwache) Maximumprinzip $u \equiv 0$ garantiert. Insgesamt erhalten wir somit, dass $-\triangle$ ein Isomorphismus von X auf $L^p(\Omega)$ ist.

(v) Fixieren wir nun einen Operator L, der den obigen Strukturbedingungen genüge und ausserdem $c \geq 0$ erfülle. Die Konvexkombination $L_t := t\,L + (1-t)\,(-\triangle)$ zwischen L und $-\triangle$ erfüllt wegen $\Lambda \geq 1$ wieder alle Strukturbedingungen und ausserdem $t\,c \geq 0$ auf Ω, für jedes $t \in [0,1]$. Somit existiert nach Schritt (ii) eine von t unabhängige Konstante $\tilde{C}(\Omega, p, \Lambda, \omega)$, mit welcher

$$\| u \|_{W^{2,p}(\Omega)} \leq \tilde{C}(\Omega, p, \Lambda, \omega) \; \| L_t(u) \|_{L^p(\Omega)} \tag{7.12}$$

für jedes $u \in X$ und jedes $t \in [0,1]$ gilt. Da nach Schritten (iii)+(iv) $L_0 = -\triangle$ ein Isomorphismus von X auf $L^p(\Omega)$ ist, kann anhand von Abschätzung (7.12) Theorem 7.0.12 angewandt werden, und $L = L_1$ ist in der Tat ein Isomorphismus von X auf $L^p(\Omega)$.

8 Der Brouwersche Abbildungsgrad im $\mathbb{R}^n$ und Fixpunktsätze

Definition 8.0.8. *[Brouwerscher Abbildungsgrad] Es sei $\mathcal{K}$ die Menge aller Tripel (Ω, f, y), die aus einer offenen, nicht-leeren Teilmenge $\Omega \subset\subset \mathbb{R}^n$, einer stetigen Funktion $f \in C^0(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^n)$ und einem Punkt $y \in \mathbb{R}^n \setminus f(\partial\Omega)$ bestehe. Eine Abbildung* $\deg : \mathcal{K} \to \mathbb{R}$ *heisse ein ,,Brouwerscher Abbildungsgrad" im $\mathbb{R}^n$, falls sie die folgenden Axiome erfüllt:*

(i) ,,Normierung": $\deg(\mathrm{id}, B_1(0), 0) = 1$.

(ii) ,,Additivität": Für zwei nicht-leere, offene Teilmengen $\Omega_1, \Omega_2 \subset \Omega$ mit $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$ gelte

$$\deg(f, \Omega, y) = \sum_{i=1,2} \deg(f, \Omega_i, y)$$

falls $y \in \mathbb{R}^n \setminus f(\bar{\Omega} \setminus (\Omega_1 \cup \Omega_2))$ ist.

(iii) ,,Randwert-Abhängigkeit": Falls $f = g$ auf $\partial\Omega$ gilt, so folgt

$$\deg(f, \Omega, y) = \deg(g, \Omega, y).$$

(iv) ,,Translations-Invarianz":

$$\deg(f, \Omega, y) = \deg(f - y, \Omega, 0).$$

Zunächst lassen sich aus der Additivität des Brouwerschen Abbildungsgrades dessen ,,Ausschneidungs-" und ,,Lösungseigenschaft" ableiten:

Proposition 8.0.10. *[Ausschneidungseigenschaft] Sei $\Omega_0 \subset \Omega$ eine offene, nichtleere Teilmenge und $y \in \mathbb{R}^n \setminus f(\bar{\Omega} \setminus \Omega_0)$ ein beliebiger Punkt. Dann gilt:*

$$\deg(f, \Omega, y) = \deg(f, \Omega_0, y).$$

Beweis: Wir setzen $K := f^{-1}(\{y\})$. Falls $y \in \mathbb{R}^n \setminus f(\bar{\Omega})$, so ist $K = \emptyset$. Andernfalls ist K eine kompakte, nicht-leere Teilmenge von Ω_0. Im ersten Fall definieren Wir $\Omega_i := B_i$ für zwei beliebige, disjunkte Bälle B_1, $B_2 \subset \Omega_0$. Im zweiten Fall wählen wir einen Punkt $x_0 \in \Omega_0 \backslash K$ und ein $\epsilon > 0$ so klein, dass der Ball $B_\epsilon(x_0) =: \Omega_1$ und die offene $\epsilon-$Umgebung $U_\epsilon(K) =: \Omega_2$ von K disjunkte, offene Teilmengen von Ω_0 sind. In beiden Fällen folgt nun mittels doppelter Anwendung der Additivität von deg:

$$\deg(f, \Omega, y) = \deg(f, \Omega_1, y) + \deg(f, \Omega_2, y) = \deg(f, \Omega_0, y).$$

Proposition 8.0.11. *[Lösungseigenschaft] Aus* $\deg(f, \Omega, y) \neq 0$ *folgt* $y \in f(\Omega)$.

Beweis: Wir nehmen das Gegenteil, also $y \notin f(\Omega)$ an. Zusammen mit $y \in \mathbb{R}^n \setminus f(\partial\Omega)$ folgt hieraus $y \notin f(\bar{\Omega})$. Wählen wir nun zwei disjunkte Bälle $B_\epsilon(x_j) \subset \Omega$, $j = 1, 2$, so können wir hiermit sowohl die Ausschneidungseigenschaft als auch die Additivität des Abbildungsgrades anwenden, und erhalten:

$$\deg(f, B_\epsilon(x_j), y) = \deg(f, \Omega, y) = \sum_{j=1}^{2} \deg(f, B_\epsilon(x_j), y),$$

für $j = 1, 2$. Dies ergibt beispielsweise für $j = 1$: $0 = \deg(f, B_\epsilon(x_2), y) = \deg(f, \Omega, y)$. Widerspruch !

Kombiniert man die ,,Randwert-Abhängigkeit" mit der Ausschneidungseigenschaft des Abbildungsgrades, so erhält man dessen Homotopie-Invarianz:

Proposition 8.0.12. *[Homotopie-Invarianz] Sei* $f : \bar{\Omega} \times [0, 1] \to \mathbb{R}^n$ *stetig,* $f_t(x) := f(x, t)$, $y : [0, 1] \to \mathbb{R}^n$ *stetig mit* $y(t) \in \mathbb{R}^n \setminus f_t(\partial\Omega)$ $\forall\, t \in [0, 1]$. *Dann ist* $t \mapsto \deg(f_t, \Omega, y(t))$ *konstant auf* $[0, 1]$.

Beweis: Anhand der ,,Translations-Invarianz" des Abbildungsgrades können wir OBDA anstatt $f(t)$ die Homotopie $f_t - y(t)$ betrachten und daher $y(t) = 0$ annehmen. Da f stetig und $\partial\Omega \times [0, 1]$ kompakt ist, existiert ein $\epsilon > 0$, für welches

$$| f_t(x) | \geq \epsilon \qquad \text{für } x \in U_\epsilon(\partial\Omega), \quad \forall\, t \in [0, 1] \tag{8.1}$$

gilt, wobei $U_\epsilon(\partial\Omega) := \{x \in \Omega \mid \operatorname{dist}(x, \partial\Omega) < \epsilon\}$ gesetzt sei. Weiterhin existiert ein $\delta > 0$, für welches

$$\| f_t - f_{\tilde{t}} \|_{C^0(\bar{\Omega})} < \epsilon/2 \qquad \text{für } | t - \tilde{t} | < \delta \tag{8.2}$$

gilt. Für all solche Paare $t, \tilde{t}$ zeigen wir nun: $\deg(f_t, \Omega, 0) = \deg(f_{\tilde{t}}, \Omega, 0)$. Hierzu wählen wir ein $\eta \in C_0^0(\Omega)$ mit $0 \leq \eta \leq 1$ und $\eta \equiv 1$ auf $\Omega_\epsilon := \Omega \setminus \overline{U_\epsilon(\partial\Omega)}$ und definieren die Hilfsfunktion

$$g := (1 - \eta)\, f_t + \eta\, f_{\tilde{t}}.$$

Es gilt auf $\overline{U_\epsilon(\partial\Omega)}$ wegen (8.1) und (8.2):

$$| g | \geq | f_t | - | \eta(f_t - f_{\tilde{t}}) | \geq \epsilon/2 > 0$$

und daher $0 \in \mathbb{R}^n \setminus g(\overline{U_\epsilon(\partial\Omega)})$. Desweiteren gilt $g = f_t$ auf $\partial\Omega$ und $g = f_{\tilde{t}}$ auf $\partial\Omega_\epsilon$. Insgesamt liefern somit die Proposition 8.0.10, die ,,Randwert-Abhängigkeit" des Abbildungsgrades und (8.1):

$$\deg(f_t, \Omega, 0) = \deg(g, \Omega, 0) = \deg(g, \Omega_\epsilon, 0) = \deg(f_{\tilde{t}}, \Omega_\epsilon, 0) = \deg(f_{\tilde{t}}, \Omega, 0).$$

Hieraus folgt offenbar die Behauptung der Proposition.

Falls die Urbildmenge $f^{-1}(y)$ aus nur endlich vielen Punkten besteht, oder falls noch spezieller $f \in C^\infty(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^n)$ und y ein regulärer Wert von f ist, so kann der Abbildungsgrad präziser berechnet werden:

Proposition 8.0.13. *[Index- und Jacobi-Determinantenformel]*

(i) Sei $f \in C^0(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^n)$ *und* $y \in \mathbb{R}^n \setminus f(\partial\Omega)$ *ein Wert von* f *mit endlicher Urbildmenge* $f^{-1}(y) = \{x_1, \ldots, x_m\}$*, so gilt die Additionsformel*

$$\deg(f, \Omega, y) = \sum_{k=1}^{m} \operatorname{ind}(f, x_k)$$

wobei wir $\operatorname{ind}(f, x) := \deg(f, U(x), f(x))$ *für eine beliebige offene Umgebung* $U(x)$ *von* x *mit* $\overline{U(x)} \cap f^{-1}(f(x)) = \{x\}$ *setzten.*

(ii) Sei $f \in C^\infty(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^n)$ *und* $y \in \mathbb{R}^n \setminus f(\partial\Omega)$ *ein regulärer Wert von* f*, d.h. ein Wert* $y \in \mathbb{R}^n \setminus f(\partial\Omega)$ *mit der Eigenschaft, dass die Jacobi-Matrix* $Df(x)$ *in allen* $x \in f^{-1}(y)$ *invertierbar ist. Dann ist* $f^{-1}(y)$ *eine endliche Menge, und es gilt die Formel*

$$\deg(f, \Omega, y) = \sum_{x \in f^{-1}(y)} \operatorname{sgn}[\det(Df(x))]. \tag{8.3}$$

Mittels gleichmässiger Approximation einer stetigen Funktion $f \in C^0(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^n)$ durch eine Funktion $g \in C^\infty(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^n)$ und mittels des Satzes von Sard lässt sich aus Formel (8.3) bereits die Eindeutigkeit des in Definition 8.0.8 axiomatisch eingeführten Abbildungsgrades herleiten, und ausserdem: $\deg(f, \Omega, y) \in \mathbb{Z}$ für jedes Tripel $(f, \Omega, y) \in \mathcal{K}$. Ausserdem kann diese Formel dazu verwandt werden, um den Abbildungsgrad zumindest für Funktionen $f \in C^\infty(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^n)$ mittels glatter Differentialformen auszudrücken:

Proposition 8.0.14. *[Heinz' Integralformel] Sei* $f \in C^\infty(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^n)$*,* $y \in \mathbb{R}^n \setminus f(\partial\Omega)$ *und* U *diejenige Zusammenhangskomponente von* $\mathbb{R}^n \setminus f(\partial\Omega)$*, die* y *enthält. Dann hat für jede glatte* $n-$*Differentialform* $\omega = \phi\, dy_1 \wedge dy_2 \wedge \ldots \wedge dy_n$ *mit* $\operatorname{supp}(\phi) \subset\subset U$ *und mit* $\int_{\mathbb{R}^n} \omega = \int_{\mathbb{R}^n} \phi\, d\mathcal{L}^n = 1$ *das Integral*

$$\int_\Omega f^\sharp(\omega) = \int_\Omega \phi \circ f \det(Df)\, d\mathcal{L}^n$$

denselben, ganzzahligen Wert, nämlich:

$$\int_\Omega f^\sharp(\omega) = \deg(f, \Omega, y). \tag{8.4}$$

Diese konkrete Formel beweist also bereits die Existenz des Abbildungsgrades zumindest für $C^\infty(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^n)-$Funktionen f. Mittels gleichmässiger Approximation stetiger Funktionen durch glatte Funktionen kann anschliessend der Brouwersche Abbildungsgrad $\deg : \mathcal{K} \to \mathbb{Z}$ explizit definiert werden:

Definition 8.0.9. *Seien* $\Omega \subset\subset \mathbb{R}^n$*,* $f \in C^\infty(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^n)$ *und* $y \in \mathbb{R}^n \setminus f(\partial\Omega)$*. So definieren wir den Brouwerschen Abbildungsgrad explizit durch*

$$\deg(f, \Omega, y) := \int_\Omega f^\sharp(\omega),$$

wobei $\omega := \phi\, dy_1 \wedge dy_2 \wedge \ldots \wedge dy_n$ *eine beliebige glatte* $n-$*Differentialform mit* $\mathrm{supp}(\phi) \subset\subset U$ *und* $\int_{\mathbb{R}^n} \omega = \int_{\mathbb{R}^n} \phi\, d\mathcal{L}^n = 1$ *sei und* U *diejenige Zusammenhangskomponente von* $\mathbb{R}^n \setminus f(\partial\Omega)$ *sei, die* y *enthält. Ist allgemein* $f \in C^0(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^n)$ *und* $y \in \mathbb{R}^n \setminus f(\partial\Omega)$*, so definieren wir den Brouwerschen Abbildungsgrad explizit durch*

$$\deg(f, \Omega, y) := \lim_{j \to \infty} \deg(f_j, \Omega, y)$$

wobei $\{f_j\} \subset C^\infty(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^n)$ *eine beliebige Folge glatter Funktionen mit* $\| f_j - f \|_{C^0(\bar{\Omega})} \to 0$ *und insbesondere mit* $y \in \mathbb{R}^n \setminus f_j(\partial\Omega)$ *für jedes* j *sei.*

Proposition 8.0.15. *Sei* $f : \overline{B_1^n(0)} \to \mathbb{R}^n$ *eine stetige Abbildung, welche*

$$\langle f(x), x \rangle \geq 0 \qquad \text{für alle } x \in \mathbb{S}^{n-1}$$

erfülle. Dann hat f *mindestens eine Nullstelle auf* $\overline{B_1^n(0)}$.

Beweis: Angenommen, ein solches f habe keine Nullstelle auf $\overline{B_1^n(0)}$. Wir definieren die lineare Homotopie $f_t(x) := (1-t)\, f(x) + tx$ und sehen für $x \in \mathbb{S}^{n-1}$:

$$\langle f_t(x), x \rangle = (1-t)\, \langle f(x), x \rangle + t \mid x \mid^2 \geq t.$$

Für $t \in (0, 1]$ beweist dies $f_t(x) \neq 0$ für alle $x \in \mathbb{S}^{n-1}$ und somit $f_t \neq 0$ auf $\mathbb{S}^{n-1}$ für $t \in [0, 1]$, da $f_0 = f$ per Annahme keine Nullstellen auf $\overline{B_1^n(0)}$ hat. Nun folgt aus der Homotopie-Invarianz und der ,,Normierung” des Abbildungsgrades:

$$\deg(f, B_1(0), 0) = \deg(\mathrm{id}, B_1(0), 0) = 1.$$

Aus Proposition 8.0.11 folgt nun $0 \in f(B_1^n(0))$ im Widerspruch zur Widerspruchsannahme.

Korollar 8.0.3. *[Fixpunktsatz von Brouwer] Jede stetige Abbildung* $f : \overline{B_R^n(0)} \to \overline{B_R^n(0)}$, $R > 0$*, hat mindestens einen Fixpunkt.*

Beweis: Wir betrachten die Abbildung $g(x) := Rx - f(Rx)$, für $x \in \overline{B_1^n(0)}$, und sehen:

$$\langle g(x), x \rangle = R \mid x \mid^2 - \langle f(Rx), x \rangle \geq R - \mid f(Rx) \mid \mid x \mid \geq 0$$

für jedes $x \in \mathbb{S}^{n-1}$. Somit hat g nach Proposition 8.0.15 mindestens eine Nullstelle auf $\overline{B_1^n(0)}$, d.h. f besitzt mindestens einen Fixpunkt auf $\overline{B_R^n(0)}$.

Korollar 8.0.4. *Sei* $K \neq \emptyset$ *eine konvexe, kompakte Teilmenge eines* $\mathbb{R}^n$ *und* $f : K \to K$ *eine stetige Abbildung. Dann hat* f *mindestens einen Fixpunkt.*

Beweis: Da K konvex und kompakt ist, existiert zu jedem $x \in \mathbb{R}^n$ ein eindeutiger Punkt $\tilde{x} \in K$, welcher $\mid x - \tilde{x} \mid = \mathrm{dist}(x, K)$ erfüllt. Die Zuordnung $x \mapsto P(x) := \tilde{x}$ ist wohldefiniert und stetig. Nun wählen wir ein $R > 0$ mit $K \subset B_R(0)$ und betrachten die

Verkettung $g := f \circ P \mid_{\overline{B_R(0)}}$. Somit ist g eine stetige Abbildung von $\overline{B_R(0)}$ nach $\overline{B_R(0)}$ mit $\text{Bild}(g) \subset K$. Nach dem Satz von Brouwer besitzt g mindestens einen Fixpunkt $x \in \overline{B_R(0)}$, also mit

$$x = g(x) = f(P(x)) \in K.$$

Wegen $x \in K$ folgt per Definition von P: $P(x) = x$, also $x = f(x)$, wie erwünscht.

Nun verallgemeinern wir dieses Resultat auf stetige Selbstabbildungen konvexer Teilmengen von Banachräumen:

Theorem 8.0.14. *[Fixpunktsatz von Schauder] Sei X ein Banachraum und $C \subset X$ eine nicht-leere, abgeschlossene, konvexe Teilmenge. Dann besitzt jede stetige Abbildung $f : C \to C$ mit relativ kompaktem Bild $f(C)$ mindestens einen Fixpunkt.*

Beweis: Nach Voraussetzung ist $K := \overline{f(C)}$ eine kompakte Teilmenge von C. Somit existieren zu beliebig fixiertem $\epsilon > 0$ endlich viele Punkte $x_i \in C$, $i = 1, \dots, m$, mit $K \subset \bigcup_{i=1}^m B_\epsilon(x_i)$. Anhand dieser Überdeckung sind die Funktionen $\phi_\epsilon^i : K \to [0, 1]$, definiert durch

$$\phi_\epsilon^i(x) := \frac{\text{dist}(x, X \setminus B_\epsilon(x_i))}{\sum_{j=1}^m \text{dist}(x, X \setminus B_\epsilon(x_j))},$$

wohldefiniert und stetig auf K, und erfüllen ausserdem die Relation

$$\sum_{j=i}^m \phi_\epsilon^i(x) = 1 \qquad \text{für } x \in K. \tag{8.5}$$

Hiermit definieren wir nun die Konvexkombinationen

$$P_\epsilon(x) := \sum_{i=1}^m \phi_\epsilon^i(x) x_i \qquad \text{für } x \in K$$

und erhalten somit eine stetige Abbildung $P_\epsilon : K \to C_\epsilon :=$ Konvexe Hülle$(\{x_1, \dots, x_m\}) \subset C$. Wegen (8.5) und wegen $\phi_\epsilon^i(x) = 0$ für $\| x - x_i \| \geq \epsilon$ erhalten wir die Abschätzung

$$\| P_\epsilon(x) - x \| = \| \sum_{i=1}^m \phi_\epsilon^i(x) \, (x_i - x) \| \leq \sum_{i=1}^m \phi_\epsilon^i(x) \, \| x_i - x \| \leq \epsilon \tag{8.6}$$

für alle $x \in K$. Die Komposition $P_\epsilon \circ f \mid_{C_\epsilon} : C_\epsilon \to C_\epsilon$ ist eine stetige Selbstabbildung der konvexen und kompakten Menge C_ϵ. Nach Korollar 8.0.4 besitzt somit $P_\epsilon \circ f \mid_{C_\epsilon}$ mindestens einen Fixpunkt $x_\epsilon \in C_\epsilon$. Für diesen gilt also

$$P_\epsilon(f(x_\epsilon)) = x_\epsilon.$$

Da $f(x_\epsilon) \in K$ und K kompakt ist, existiert eine Folge $\epsilon_i \to 0$ und ein Punkt $\bar{x} \in K \subset C$, sodass

$$f(x_{\epsilon_i}) \to \bar{x} \qquad \text{für } i \to \infty$$

gilt. Wenden wir (8.6) auf $f(x_{\epsilon_i}) \in K$ an, so erhalten wir

$$\| f(x_{\epsilon_i}) - x_{\epsilon_i} \| = \| f(x_{\epsilon_i}) - P_{\epsilon_i}(f(x_{\epsilon_i})) \| \leq \epsilon_i$$

und daher auch $x_{\epsilon_i} \to \bar{x}$. Somit erhalten wir anhand der Stetigkeit von f:

$$\bar{x} = \lim_{i\to\infty} f(x_{\epsilon_i}) = f(\lim_{i\to\infty} x_{\epsilon_i}) = f(\bar{x}),$$

also die Existenz eines Fixpunktes von f in C.

Korollar 8.0.5. *Sei X ein Banachraum und $f : \overline{B_1(0)} \subset X \to X$ eine stetige Abbildung, für die $f(\overline{B_1(0)})$ relativ kompakt ist und welche den Rand $\partial B_1(0)$ in den Einheitsball $\overline{B_1(0)}$ abbildet. Dann hat f mindestens einen Fixpunkt.*

Beweis: Wir definieren $g : \overline{B_1(0)} \to X$ durch

$$g(x) := \begin{cases} f(x) & : \text{ falls } \| f(x) \| \leq 1 \\ \frac{f(x)}{\|f(x)\|} & : \text{ falls } \| f(x) \| \geq 1. \end{cases}$$

g ist offenbar eine stetige Selbstabbildung von $\overline{B_1(0)}$ nach $\overline{B_1(0)}$ mit relativ kompaktem Bild $g(\overline{B_1(0)})$, da $f(\overline{B_1(0)})$ relativ kompakt ist. Nach Theorem 8.0.14 besitzt somit g einen Fixpunkt $x \in \overline{B_1(0)}$. Im Falle $\| f(x) \| \leq 1$ erhalten wir: $x = g(x) = f(x)$, also einen Fixpunkt von f. Im Falle $\| f(x) \| > 1$ haben wir per Definition von g:

$$\| x \| = \| g(x) \| = 1,$$

und somit $f(x) \in \overline{B_1(0)}$ nach Annahme an f, im Widerspruch zu $\| f(x) \| > 1$.

Theorem 8.0.15. *[Fixpunktsatz von Leray-Schauder] Sei X ein Banachraum und $f : X \times [0,1] \to X$, $f_t(x) := f(x,t)$ eine stetige, kompakte Abbildung, für die $f_0 = 0$ gilt. Desweiteren existiere eine Konstante $\Lambda \in (0,\infty)$, sodass:*
Falls $f(x,t) = x$, für ein beliebiges $t \in [0,1]$ gilt, so folgt

$$\| x \| < \Lambda. \tag{8.7}$$

Unter diesen Voraussetzungen hat f_1 mindestens einen Fixpunkt.

Beweis: Wir nehmen zunächst an, dass $\Lambda = 1$ gilt und definieren für jedes $\epsilon \in (0,1)$ die Abbildung

$$g_\epsilon(x) := \begin{cases} f\big(\frac{x}{\|x\|}, \frac{1-\|x\|}{\epsilon}\big) & : \text{ falls } 1-\epsilon \leq \| x \| \leq 1 \\ f\big(\frac{x}{1-\epsilon}, 1\big) & : \text{ falls } \| x \| \leq 1-\epsilon. \end{cases}$$

g_ϵ ist stetig und anhand der Kompaktheit von f auch kompakt. Für $x \in \partial B_1(0)$ gilt ausserdem: $g_\epsilon(x) = f(x,0) = 0$, also insbesondere dass g_ϵ den Rand $\partial B_1(0)$ in den Ball $\overline{B_1(0)}$ hinein abbildet. Korollar 8.0.5 liefert somit die Existenz eines Fixpunktes $x_\epsilon \in \overline{B_1(0)}$ von g_ϵ, d.h. es existiert $x_\epsilon \in \overline{B_1(0)}$ mit $x_\epsilon = g_\epsilon(x_\epsilon)$. Wir setzen nun

$$(y_\epsilon, t_\epsilon) := \begin{cases} \big(\frac{x_\epsilon}{\|x_\epsilon\|}, \frac{1-\|x_\epsilon\|}{\epsilon}\big) & : \text{ falls } 1-\epsilon \leq \| x_\epsilon \| \leq 1 \\ \big(\frac{x_\epsilon}{1-\epsilon}, 1\big) & : \text{ falls } \| x_\epsilon \| \leq 1-\epsilon. \end{cases}$$

Es gilt hiermit gerade $f(y_\epsilon, t_\epsilon) = g_\epsilon(x_\epsilon) = x_\epsilon$. Man verifiziert in beiden obigen Fällen für die Definition von y_ϵ:

$$\| y_\epsilon - x_\epsilon \| \leq \epsilon. \tag{8.8}$$

Anhand der Kompaktheit von f und wegen $\| y_\epsilon \| \leq 1$ und $f(y_\epsilon, t_\epsilon) = x_\epsilon$ existiert eine Folge $\epsilon_i \to 0$, für die $(x_{\epsilon_i}, t_{\epsilon_i})$ gegen ein Paar $(x, t) \in X \times [0, 1]$ konvergiert. Mit (8.8) folgt hieraus: $y_{\epsilon_i} \to x$ und somit

$$x = \lim_{i\to\infty} x_{\epsilon_i} = \lim_{i\to\infty} f(y_{\epsilon_i}, t_{\epsilon_i}) = f(x, t), \tag{8.9}$$

da f stetig ist. Aus der Voraussetzung (8.7) folgt also $\| x \| < \Lambda = 1$. Wir haben somit insgesamt:

$$\| x_{\epsilon_i} \| \longrightarrow \| x \| < 1 \longleftarrow 1 - \epsilon_i \qquad \text{für } \; i \to \infty$$

also $\| x_{\epsilon_i} \| < 1 - \epsilon_i$ für hinreichend grosse i. Per Definition von t_ϵ bedeutet dies: $t_{\epsilon_i} = 1$ für sehr grosse i, und daher $t = 1$. Zusammen mit (8.9) folgt hieraus: $f(x, 1) = x$, wie erwünscht.
Nun sei $\Lambda > 0$ beliebig. Wir betrachten anstatt f dessen Skalierung $\tilde{f}(x,t) := \Lambda^{-1} f(\Lambda x, t)$. $\tilde{f}$ ist stetig und kompakt und erfüllt $\tilde{f}(x, 0) = 0$. Ausserdem setzen wir voraus: Falls x ein Fixpunkt von $f(\,\cdot\,, t)$ ist, so gilt $\| x \| < \Lambda$. D.h.: Falls $\frac{x}{\Lambda} = \Lambda^{-1} f(x,t) = \Lambda^{-1} f(\Lambda(\Lambda^{-1}x), t) = \tilde{f}(\Lambda^{-1}x, t)$ gilt, so folgt $\| \frac{x}{\Lambda} \| < 1$. Somit folgt aus dem soeben Bewiesenen, in Anwendung auf $\tilde{f}$: $\tilde{f}_1$ besitzt einen Fixpunkt, d.h.: es existiert ein $x \in X$ mit $x = \tilde{f}(x, 1) = \Lambda^{-1} f(\Lambda x, 1)$. Somit ist in der Tat Λx ein Fixpunkt von f_1, wie erwünscht.

Als eine Anwendung dieses Satzes betrachten wir das folgende

Beispiel:
Es seien $\emptyset \neq \Omega \subset\subset \mathbb{R}^n$ offen mit C^∞-glattem Rand, $\alpha \in (0, 1)$ und $a = \big(a_{ij}\big), b \in C^{0,\alpha}_{loc}(\bar{\Omega} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{n^2}$ bzw. $\mathbb{R})$ mit

$$a_{ij}(x, z, w)\xi_i\xi_j > 0$$

für alle $(x, z, w) \in \bar{\Omega} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ und alle $\xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Weiterhin nehmen wir an, dass ein $\beta \in (0, 1)$ und ein $\Lambda \geq 1$ existieren, sodass jede $C^{2,\alpha}-$Lösung u der quasi-linearen Gleichung

$$\begin{aligned} -a_{ij}(\,\cdot\,, u, \nabla u)\, \partial_{ij}(u) + t\, b(\,\cdot\,, u, \nabla u) = 0 \qquad & \text{auf } \Omega \\ \text{mit } \; u \equiv 0 \qquad & \text{auf } \partial\Omega, \end{aligned} \tag{8.10}$$

für ein beliebiges $t \in [0, 1]$, der a-priori-Abschätzung

$$\| u \|_{C^{1,\beta}(\Omega)} < \Lambda$$

genüge. Dann gilt:

Theorem 8.0.16. *Es existiert eine $C^{2,\alpha}$-Lösung des quasi-linearen Randwertproblems* (8.10) *für $t = 1$.*

Beweis: Zu einem beliebigen $R > 0$ sei $K_R(0)$ die abgeschlossene Kugel vom Radius R in $C^{1,\beta}(\Omega)$. Dann gilt für jedes fixierte $v \in K_R(0)$:

$$\begin{aligned} &\| a_{ij}(\,\cdot\,, v, \nabla v) \|_{C^{0,\alpha\beta}(\Omega)}, \| b(\,\cdot\,, v, \nabla v) \|_{C^{0,\alpha\beta}(\Omega)} \\ \le \operatorname{Konst}\big(&\operatorname{diam}(\Omega), \alpha, \beta, R, \| a_{ij} \|_{C^{0,\alpha}(\Omega\times(-R,R)\times B_R(0))}, \| b \|_{C^{0,\alpha}(\Omega\times(-R,R)\times B_R(0))} \big) \\ &=: C(\Omega, \alpha, \beta, R, a, b), \end{aligned}$$

und anhand der Kompaktheit von $\bar\Omega \times [-R, R] \times \overline{B_R(0)} \times \mathbb{S}^{n-1}$:

$$a_{ij}(\,\cdot\,, v, \nabla v)\, \xi_i\, \xi_j \ge c_0\ |\ \xi\ |^2 \qquad \text{auf } \bar\Omega$$

und für jedes $\xi \in \mathbb{R}^n$, wobei c_0 eine von a und R abhängige Konstante ist. Somit erfüllt der elliptische Differential-Operator

$$L_v := -a_{ij}(\,\cdot\,, v, \nabla v)\partial_{ij} : C_0^{2,\alpha\beta}(\Omega) \to C^{0,\alpha\beta}(\Omega)$$

alle Strukturbedingungen von Aufgabe 29 für $\alpha\beta$ anstatt α, für ein hinreichend grosses Λ, abhängig von Ω, α, β, R und a, und mit $c = 0$ und ist somit ein injektiver Fredholm-Operator mit Index 0, also ein Isomorphismus von $C_0^{2,\alpha\beta}(\Omega)$ auf $C^{0,\alpha\beta}(\Omega)$. Somit existiert genau eine Lösung u_v des linearen Randwertproblems

$$\begin{aligned} -a_{ij}(\,\cdot\,, v, \nabla v)\, \partial_{ij}(u) + b(\,\cdot\,, v, \nabla v) = 0 \qquad &\text{auf } \Omega \\ u = 0 \quad &\text{auf } \partial\Omega \end{aligned}$$

im Raum $C_0^{2,\alpha\beta}(\Omega)$, und wir setzen $\tilde f(v) := u_v$. Desweiteren folgt aus Aufgabe 29 die Existenz einer Konstanten $K = K(\Omega, \alpha, \beta, R, a)$, für die

$$\| u_v \|_{C^{2,\alpha\beta}(\Omega)} \le K\ \| L_v(u_v) \|_{C^{0,\alpha\beta}(\Omega)} = K\ \| b(\,\cdot\,, v, \nabla v) \|_{C^{0,\alpha\beta}(\Omega)} \le K\, C(\Omega, \alpha, \beta, R, b) \tag{8.11}$$

für jedes $v \in K_R(0)$ und jedes $R > 0$ gilt. Betrachten wir also die Verkettung

$$f : C^{1,\beta}(\Omega) \to C_0^{2,\alpha\beta}(\Omega) \hookrightarrow C^{1,\beta}(\Omega)$$

von $\tilde f$ mit der kompakten Einbettung $C_0^{2,\alpha\beta}(\Omega) \hookrightarrow C^{1,\beta}(\Omega)$, so folgt aus (8.11) sofort die Kompaktheit von f, wenn wir auch die Stetigkeit von f zeigen können. Betrachten wir hierzu eine in $C^{1,\beta}(\Omega)$ gegen ein v^* konvergente Folge $\{v_k\}$, so folgt zunächst $\| \tilde f(v_k) \|_{C^{2,\alpha\beta}(\Omega)} \le K\, C(R)$ aus (8.11), für ein hinreichend grosses $R > 0$, und somit die Existenz einer in $C^2(\bar\Omega)$ konvergenten Teilfolge $\tilde f(v_k') \to u^*$, für ein $u^* \in C_0^{2,\alpha\beta}(\Omega)$. Da wir auch

$$a_{ij}(\,\cdot\,, v_k, \nabla v_k) \to a_{ij}(\,\cdot\,, v^*, \nabla v^*),\ b(\,\cdot\,, v_k, \nabla v_k) \to b(\,\cdot\,, v^*, \nabla v^*) \qquad \text{in } C^0(\bar\Omega)$$

wissen, folgt im Limes:

$$-a_{ij}(\,\cdot\,, v^*, \nabla v^*)\, \partial_{ij}(u^*) + b(\,\cdot\,, v^*, \nabla v^*) = 0 \qquad \text{auf } \Omega,$$

also $L_{v^*}(u^*) = -b(\,\cdot\,, v^*, \nabla v^*)$ und somit $u^* = u_{v^*} = \tilde{f}(v^*)$ anhand der Wohldefiniertheit des Lösungsoperators $\tilde{f}$. Somit liefert das Teilfolgen-Prinzip:

$$f(v_k) \to u^* = f(v^*) \qquad \text{in } C^{1,\beta}(\Omega),$$

also die Stetigkeit von f. Wir betrachten nun die ebenfalls kompakte, stetige Abbildung $f_t(v) := t\, f(v)$ von $C^{1,\beta}(\Omega) \times [0,1]$ nach $C^{1,\beta}(\Omega)$. Gilt $u = f(u,t)$, für ein $t \in [0,1]$, so ist u eine Lösung aus $C_0^{2,\alpha\beta}(\Omega)$ des Randwertproblems (8.10). Wegen $a_{ij}(\,\cdot\,, u, \nabla u) \in C^{0,\alpha}(\Omega)$ erhalten wir erneut aus Aufgabe 29, dass

$$L_u := -a_{ij}(\,\cdot\,, u, \nabla u)\partial_{ij} : C_0^{2,\alpha}(\Omega) \to C^{0,\alpha}(\Omega)$$

ein Isomorphismus ist, sodass wegen $b(\,\cdot\,, u, \nabla u) \in C^{0,\alpha}(\Omega)$ eine eindeutige Funktion $\tilde{u} \in C_0^{2,\alpha}(\Omega)$ existiert, die $L_u(\tilde{u}) = -t\, b(\,\cdot\,, u, \nabla u)$ erfüllt. Da andererseits $L_u(u) = -t\, b(\,\cdot\,, u, \nabla u)$ gilt, und $L_u : C_0^{2,\alpha\beta}(\Omega) \to C^{0,\alpha\beta}(\Omega)$ ebenfalls ein Isomorphismus ist, erhalten wir: $u = \tilde{u} \in C_0^{2,\alpha}(\Omega)$, also dass u eine $C^{2,\alpha}-$Lösung von (8.10) ist. Nach Voraussetzung folgt hieraus

$$\| \, u \, \|_{C^{1,\beta}(\Omega)} < \Lambda.$$

Somit liefert der Fixpunktsatz von Leray-Schauder die Existenz eines Fixpunktes $u^* \in C^{1,\beta}(\Omega)$ von $f_1 = f$. Per Konstruktion von f folgt hieraus zuerst, dass u^* eine $C^{2,\alpha\beta}-$Lösung des quasi-linearen Randwertproblems (8.10) für $t = 1$ ist, und mit obiger Argumentation, nun für $t = 1$, folgt schliesslich: $u^* \in C_0^{2,\alpha}(\Omega)$, wie behauptet.

Literaturverzeichnis

[1] Alt, H.W.: Lineare Funktionalanalysis, Springer Verlag, Berlin, 1999.

[2] Berger, M.: Nonlinearity in Functional Analysis, Academic Press, New York - San Francisco - London, 1977.

[3] Deimling, K.: Nonlinear Functional Analysis, Springer Verlag, Berlin, 1980.

[4] Rudin, W.T.: Functional Analysis, McGraw-Hill, New York, 1973.

[5] Struwe, M.: Variational methods, Applications to nonlinear partial differential equations and Hamiltonian Systems, 4th edition, Springer Verlag, Berlin, 2008.